



The two-dimensional mathematical model for calculation of thermal field of the continuous cylindrical casting is formed on the basis of method of finite differences.

Е. И. МАРУКОВИЧ, А. М. БРАНОВИЦКИЙ,
В. А. ХАРЬКОВ, ИТМ НАН Беларуси

ДВУХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ОТЛИВКИ

УДК 621.74.047.001.57

Введение. Непрерывное литье проволоки из цветных и драгоценных металлов на установке с вертикальной технологической осью [1] имеет ряд особенностей (скоротечность цикла вытягивания затвердевшей отливки, малые размеры элементов оснастки, затрудняющие расположение достаточного количества датчиков), которые не позволяют в полной мере проведение экспериментальных исследований процесса затвердевания. Для описания и исследования сложных технологических процессов, когда необходимо учитывать множество факторов, разных по своей природе, но тесно взаимодействующих между собой, в настоящее время используют математическое моделирование.

Схема установки. Принципиальная схема непрерывного литья проволочных заготовок представлена на рис. 1. Плавка шихты и подготовка расплава осуществляются в индукционном плавильном узле, который представляет собой много-

витковой водоохлаждаемый индуктор 4 с графитовым тиглем 2. Тигель имеет наружную огнеупорную футеровку 1. Расплав 3 из тигля 2 попадает в рабочую полость кристаллизатора, состоящего из металлического водоохлаждаемого корпуса 5 и графитовой рабочей втулки 10, внутри которой он затвердевает, образуя отливку. В нижней части корпуса кристаллизатора имеются отверстия 9, через которые охлаждающая вода попадает непосредственно на отливку, образуя вторичное охлаждение. Отливка циклически (движение—остановка) извлекается из кристаллизатора тянущим устройством 7.

Расчетные формулы затвердевания отливки. При расчете затвердевания отливки малого диаметра необходимо учитывать теплоотвод не только в радиальном, но и в продольном направлениях. Целью данной работы является оценка тепловых потоков в отливке в продольном направлении в промежутке времени между протяжками.

При таких обстоятельствах представляется целесообразным использование для моделирования численных методов с реализацией расчета на ЭВМ. На основании уравнения теплопроводности разработана численная модель расчета процесса затвердевания цилиндрической непрерывнолитой отливки. В общем случае оно имеет вид

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \frac{\partial}{\partial t} (c\rho T), \quad (1)$$

где T — температура; λ — теплопроводность; c — теплоемкость; ρ — плотность металла; t — время.

Ввиду радиальной симметрии уравнение (1) приводим к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (c\rho T), \quad (2)$$

где r — радиальная координата в круглом сечении отливки; z — координата вдоль отливки.

Рассмотрим граничные условия для уравнения (2) в кристаллизаторе. На границе с металлоприемником будем полагать, что температура металла

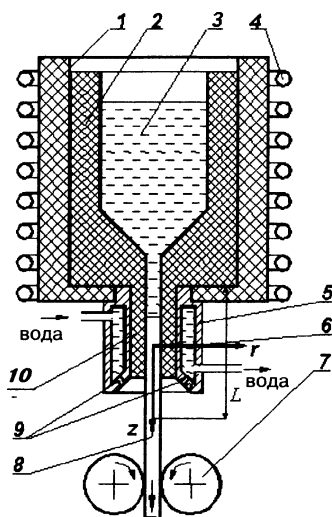


Рис. 1. Схема непрерывного литья проволочных заготовок: 1 — футеровка; 2 — тигель; 3 — расплав; 4 — индуктор; 5 — металлический корпус; 6 — охлаждающая вода; 7 — вытягивающее устройство; 8 — отливка; 9 — отверстия вторичного охлаждения; 10 — рабочая втулка кристаллизатора

всегда постоянна и равна начальной температуре расплава:

$$T(z=0) = T_0. \quad (3)$$

Для границы на выходе из кристаллизатора можно определить условия, увеличив длину рассчитываемой отливки так, чтобы дальний конец был выдвинут за кристаллизатор на достаточно большое расстояние. При этом на такой выдвинутой границе можно просто обрезать отливку, считая, что тепловой поток на дальней границе уже никак не влияет на температуру отливки внутри кристаллизатора. Тогда можно считать, что дальний конец отливки охлаждается воздухом, что математически записывается как:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = \alpha_{\text{мет-возд}} (T_{\text{возд}} - T), \quad (4)$$

где L — протяженность расчетной области отливки; $\alpha_{\text{мет-возд}}$ — коэффициент теплоотдачи на границе отливка — воздух; $T_{\text{возд}}$ — температура окружающей среды.

На поверхности отливки имеет место нулевой поток при контакте расплава с неохлаждаемой зоной кристаллизатора (НЗ), поток в соответствии с теплопроводностью $\alpha_{\text{мет-вода}}$ в охлаждаемой зоне (ОЗ) и поток на границе с воздухом в зоне, выходящей за пределы кристаллизатора:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{при } z < L_{\text{НЗ}}, \\ -\alpha_{\text{мет-вода}} (T - T_{\text{вода}}) & \text{при } L_{\text{НЗ}} \leq z \leq L_{\text{ОЗ}}, \\ -\alpha_{\text{мет-возд}} (T - T_{\text{возд}}) & \text{при } z > L_{\text{ОЗ}}, \end{cases} \quad (5)$$

где $L_{\text{НЗ}}$ — длина неохлаждаемой части кристаллизатора; $L_{\text{ОЗ}}$ — суммарная длина НЗ и ОЗ; $\alpha_{\text{мет-вода}}$ — коэффициент теплоотдачи между отливкой и водой; $T_{\text{вода}}$ — температура воды в системе охлаждения кристаллизатора.

Здесь при контакте с кристаллизатором использовано приближенное аналитическое выражение для теплопроводности на фиктивной границе металл—вода, описывающее тепловой поток в тонком кристаллизаторе [2].

Наконец, на оси отливки используем условие симметрии

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Для решения уравнения (2) с граничными условиями (3)—(6) воспользуемся численным методом сеток. Отметим, что в общем случае влияние нелинейности величин c , λ и ρ требует отдельного учета, например, с помощью метода итераций [3]. Однако при достаточно малом шаге по времени при численном счете по неявной схеме проще просто брать c , λ и ρ на предыдущем шаге по времени. Шаг по времени, при котором данный алгоритм имеет удовлетворительную точность, находим из сравнения полученных таким образом результатов с численными данными, полученными методом итераций.

Как показано в [3], для решения многомерных задач теплопроводности достаточно последовательного решения на одномерных сетках. При этом в качестве начальных условий для решения по следующей координате берется решение по предыдущей. По каждой координате решение получается методом прогонки. Подробно использованные выражения для подобной схемы описаны в [4].

Итак, на каждом шаге по времени путем решения одномерных систем по радиусу и координате вдоль кристаллизатора получаем температурное поле отливки. Далее поскольку при счете по радиусу берется стандартная сетка, узлы которой лежат посередине границы с кристаллизатором [5], производится пересчет на сетку, узел которой совпадает с границей.

Приведенный алгоритм расчета реализован в программе для ЭВМ. Рассчитывались температурное поле отливки, потоки в радиальном направлении на границе отливки и потоки в продольном направлении по всему объему отливки.

Результаты расчетов. Все расчеты проводили для трех различных параметров $\alpha_{\text{мет-вода}}$, соответствующих кристаллизаторам со слабым, средним и сильным охлаждением ($\alpha=3000, 5000, 7000$). Также варьировали диаметр отливки — тонкая, средняя и толстая ($d=5, 10, 15$ мм). Расчеты выполняли для трех материалов — серебра, алюминия и бронзы ОЦ10-2. Использовали справочные данные о зависимостях теплофизических параметров этих материалов от температуры. В промежутках между точками справочных данных использовали кусочно-линейную аппроксимацию для расчета c , ρ и λ в зависимости от температуры.

Расчеты показывают, что при малых временах между протяжками, характерных для данного процесса, тепловой поток в продольном направлении отличен от нуля только в областях возле границы НЗ—ОЗ, возле границы ОЗ—воздух и в конце расчетной части отливки. Однако две последние зоны не представляют интереса для анализа, поскольку в них отливка уже затвердела. Таким образом, исследовали только зону возле границы НЗ—ОЗ.

На рис. 2 показано пространственное распределение теплового потока в продольном направлении серебряной отливки. Вертикальное направление рисунка соответствует радиальному направлению в сечении отливки. Верх сечений соответствует границе отливка — кристаллизатор, низ — центру отливки. Горизонтальное направление рисунка соответствует направлению вдоль оси кристаллизатора. Левая граница сечений соответствует началу НЗ кристаллизатора. Длина каждого сечения — 3 см, длина НЗ — 1 см. Яркость на изображаемых сечениях пропорциональна тепловому потоку в продольном направлении.

Из рисунка видно, что зона, в которой тепловой поток в продольном направлении заметно

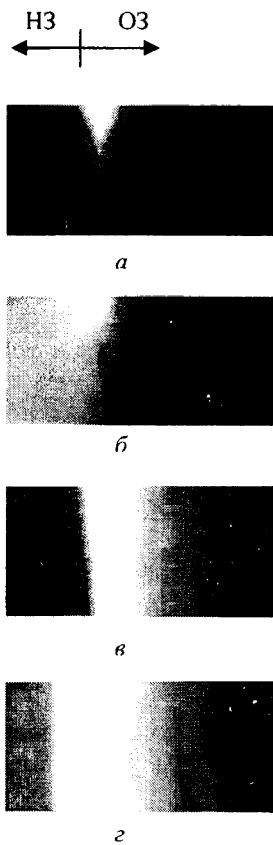


Рис. 2. Распределение теплового потока в продольном направлении на границе НЗ — ОЗ для серебряной отливки (более яркие участки рисунка соответствуют максимальному тепловому потоку): а — время после заливки 0,02 с; б — 0,82; в — 1,62, з — 2,22 с

отличен от нуля, расширяется с увеличением времени. Вначале она ограничена небольшой областью вблизи границы с кристаллизатором в точке перехода НЗ—ОЗ. В дальнейшем расширяется в обоих направлениях по горизонтали и вертикали, достигая центра отливки. Отметим, что в зависимости от степени охлаждения зона расширяется сильнее влево к началу кристаллизатора при сильном охлаждении и в обе стороны при слабом. При сильном охлаждении зона активного теплового потока приближается к началу кристаллизатора уже через 1,5—2,0 с.

Для определенной количественной оценки тепловых потоков использовали три значения. Первое — максимальный тепловой поток в продольном направлении. В соответствии с рис. 2 он расположен в точке, близкой к границе НЗ—ОЗ и границе отливка—кристаллизатор. Второе — поток в радиальном направлении на границе кристаллизатор — отливка рядом с описанной выше зоной. Третье — поток в радиальном направлении на границе кристаллизатор—отливка вдали от границы НЗ—ОЗ, примерно в середине области ОЗ.

Зависимости максимального продольного теплового потока от времени для алюминия приведены на рис. 3. На малых временах расчета тепловые потоки заметно больше для отливок с малым

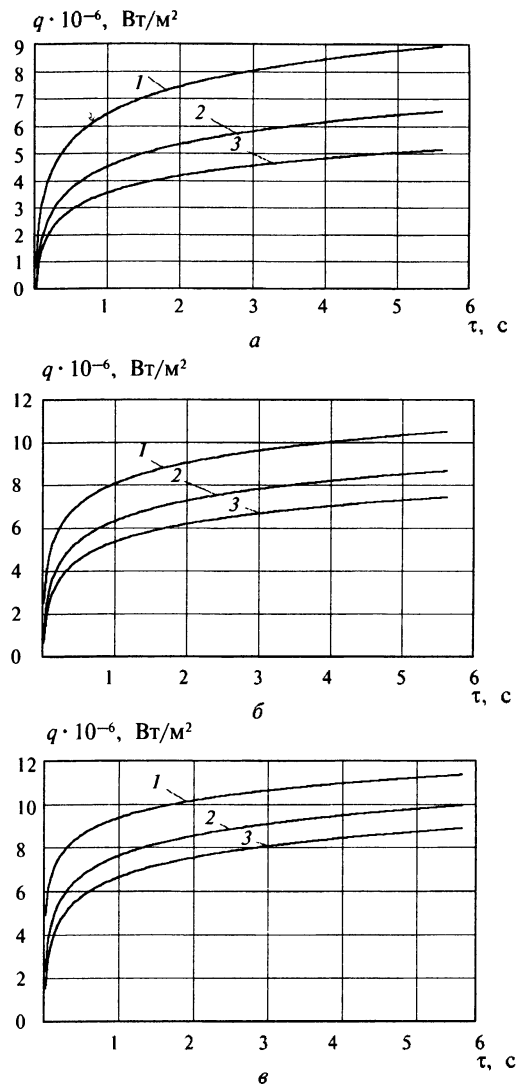


Рис. 3. Зависимость максимального продольного теплового потока на границе НЗ—ОЗ от времени для алюминия: а — $\alpha=3000$ Вт/(м² · К); б — 5000; в — 7000; 1 — диаметр 5 мм; 2 — 10; 3 — 15 мм

радиусом, что объясняется лучшей схемой общего охлаждения для отливок с меньшим радиусом. Однако с течением времени потоки становятся сравнимыми и в дальнейшем тепловой поток в отливке с малым радиусом может быть меньше. Но, как правило, для промежутков времени, характерных для процесса литья, тепловые потоки в продольном направлении для малых отливок значительно выше.

Зависимость данных потоков от степени охлаждения кристаллизатора на малых временах не столь значительна, как зависимость от радиусов отливки. Тем не менее заметен рост потоков с увеличением степени охлаждения кристаллизатора. Из материалов значительно больший тепловой поток имеет серебро, алюминий и бронза не слишком отличаются друг от друга.

На рис. 4 показано отношение максимального продольного теплового потока к радиальному потоку в точке рядом с границей НЗ—ОЗ на границе отливка—кристаллизатор для серебра, т. е. факти-

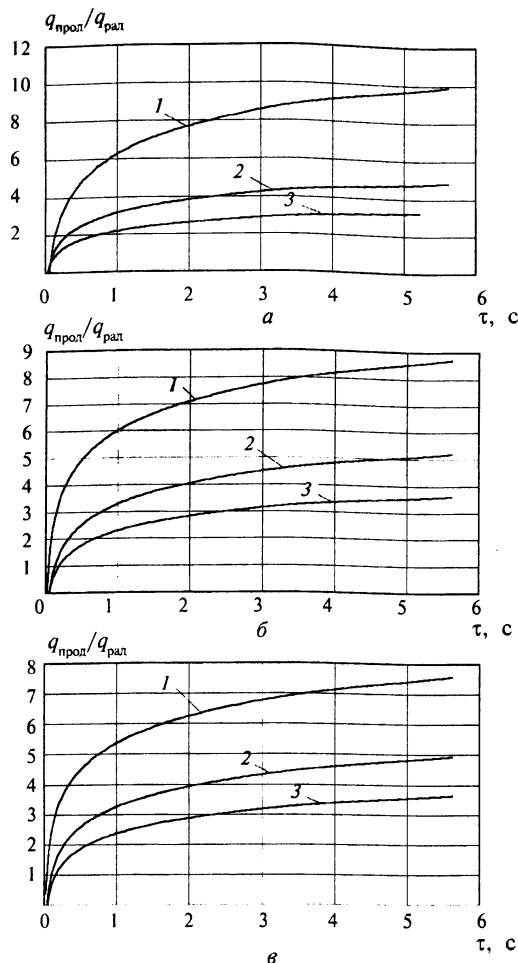


Рис. 4. Отношение максимального теплового потока в продольном направлении к радиальному потоку в точке рядом с границей НЗ—ОЗ на границе отливка—кристаллизатор для серебра: а — $\alpha=3000$ Вт/(м²·К); б — 5000; в — 7000; 1 — диаметр 5 мм; 2 — 10; 3 — 15 мм

чески отношение потоков в близких точках отливки. Интересно отметить значительное превышение максимального продольного потока над радиальным с увеличением времени. Это может быть связано с тем, что в зоне НЗ недалеко от границы НЗ—ОЗ единственным направлением стока тепла является продольное, в то время как радиальный сток уже в зоне ОЗ осуществляется на достаточно большой площади поверхности. Отметим, что от-

ношение максимального потока в продольном направлении к радиальному потоку в середине кристаллизатора еще значительно выше, или, говоря иными словами, радиальный поток на границе НЗ—ОЗ значительно выше радиального потока в середине ОЗ. Эти явления наблюдаются уже при времени расчета порядка 1 с и увеличиваются со временем.

Из рисунка видно, что приведенное отношение при малых временах заметно растет с уменьшением радиуса отливки. Однако с увеличением времени данное отношение стремится к константе, причем чем выше степень охлаждения кристаллизатора, тем быстрее оно перестает значительно меняться. Отметим, что с ростом степени охлаждения значение данной константы уменьшается.

Из материалов наибольшее отношение имеет серебро, незначительно меньшее — алюминий и значительно меньшее — бронза.

Заключение. В работе сделана численная оценка тепловых потоков в осевом направлении отливки для установки непрерывного литья проволочных заготовок. Расчеты проведены для времени затвердевания между протяжками. Показано, что тепловой поток в осевом направлении отливки может достигать значительной величины уже через 1—2 с после заливки расплава. Особенно значительный эффект передачи тепла в осевом направлении наблюдается для тонких отливок из материалов с высокой теплопроводностью, таких, как серебро.

Литература

1. Марукович Е. И., Земцов В. А., Харьков В. А. и др. Разработка установки непрерывного литья заготовок для ювелирного производства // *Литье и металлургия*. 2000. №1. С. 26—27.
2. Марукович Е. И., Брановицкий А. М., Харьков В. А. Расчет затвердевания цилиндрической непрерывной отливки // *Литье и металлургия*. 2001. № 2. С. 25—29.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972.
4. Марукович Е. И., Брановицкий А. М. Трехмерная тепловая модель процесса непрерывного литья прямоугольных биметаллических заготовок // *Докл. НАН Беларуси*. 2001. Т. 45, № 2. С. 127—132.
5. Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуе Л. И. Расчеты процессов литья. Мн.: Выш. шк., 1977.