УДК 536.2

# ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ДВИЖУЩИХСЯ РАСПЛАВАХ

**Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И., канд. техн. наук ШУБ Л. И.**

*Белорусский национальный технический университет*

В ряде специальных теплотехнологий объектом изучения являются потоки расплавов, обладающие свойствами реологических сред. Эффекты тепломассопереноса в движущихся расплавах исследуются при течении и затвердевании жидких металлов и сплавов в специальных технологиях литья (жидкая штамповка, литье выжиманием, центробежное и непрерывное литье и т. д.), в физико-химических технологиях двойного назначения при лазерной и плазменной обработке изделий, при движении вулканической лавы и др.

В процессе движения расплава в полости формы происходят охлаждение жидкого металла и затвердевание за счет теплоотвода в стенку металлической формы (матрицы) и в неметаллическую форму. Вследствие этого вязкость металла непрерывно изменяется по времени, что определяет нестационарный характер течения. Другой особенностью рассматриваемой задачи является наличие фазового перехода в жидком металле (затвердевания). Благодаря теплоотдаче в форму температура расплава непрерывно уменьшается, а вязкость возрастает. При дальнейшем охлаждении на поверхностях формы образуется твердая корочка затвердевшего металла и происходит перемещение фронта кристаллизации в глубь отливки.

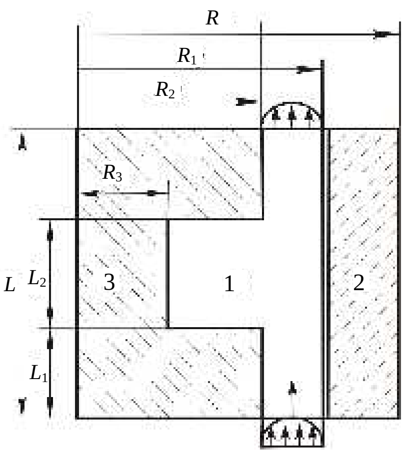


*Рис. 1.* Расчетная схема: 1 – область, занятая жидким металлом; 2 – металлическая; 3 – неметаллическая формы

В качестве объекта исследования рассмотрим наиболее характерное сечение сложной осесимметричной отливки (рис. 1). Расчетная область представляет собой полость переменного сечения с внутренним выступом, в которой происходят движение и затвердевание расплава при несимметричных условиях охлаждения: на внутренней поверхности металл затвердевает за счет теплоотвода в песчаный стержень, на наружной – за счет теплоотвода в металлическую форму.

При расчете затвердевания металла теплоту кристаллизации введем в теплоемкость в точках, занятых областью фазового превращения. При этом предполагаем, что заполнение формы осуществляется сплошным ламинарным потоком: в начальный момент времени вязкость, плотность, температура расплава имеют постоянные значения по всему объему, а между потоком и поверхностью формы имеется плотный контакт. По мере охлаждения металла вязкость будем рассматривать как переменную величину во всей области течения $м = м(T)$. С этой целью воспользуемся полученной экспериментально зависимостью эффективной вязкости от температуры (рис. 2) для высокопрочного алюминиевого сплава ВАЛ10.

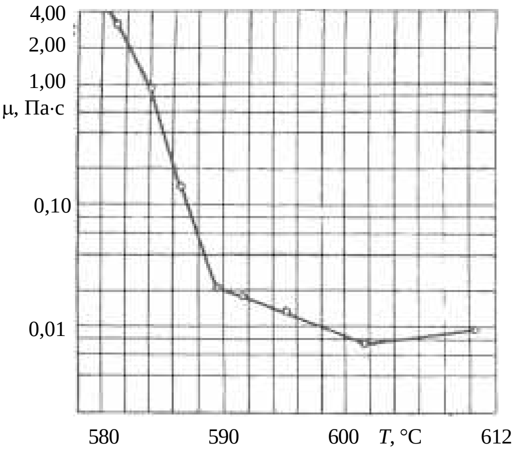


*Рис. 2.* Зависимость вязкости от температуры

При конечно-разностной аппроксимации уравнений переноса (движения) воспользуемся методом контрольного объема (рис. 3), широко применяемым при решении задач течения и конвективного переноса. Разбивка расчетной области на контрольные объемы производится следующим образом. Сначала наносится нерегулярная сетка с узлами на пересечении координатных линий. Затем каждый узел связывают с контрольным объемом, грани которого проходят посредине между двумя смежными узлами. Исходная система дифференциальных уравнений интегрируется по каждому объему при замене подынтегральных выражений соответствующими интерполяционными многочленами, описывающими изменение параметров между узловыми точками. В результате для данной системы находят дискретный аналог, который связывает значение параметра в данной узловой точке с его значениями в соседних узлах. Точность конечно-разностной схемы в значительной степени зависит от вида интерполяционного полинома.

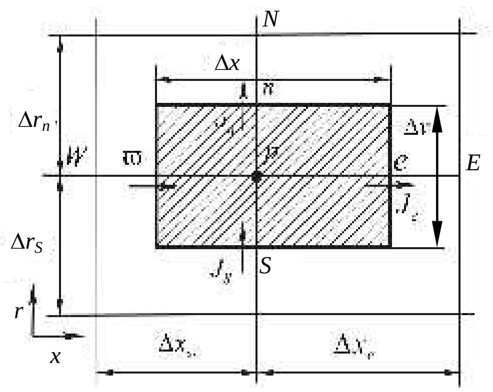


*Рис. 3.* Схема контрольного объема

Точность, с которой рассчитываются гидродинамические параметры потока при разностном решении уравнений переноса, зависит не только от метода разностной аппроксимации, но и от того, какие переменные в уравнениях выбраны в качестве искомых функций. Для двумерных уравнений движения в качестве зависимых параметров могут быть выбраны физические переменные (составляющие скорости $u$, $v$, давление $p$, функция тока $\psi$ и т. д.).

Запишем уравнения, определяющие течение жидкого металла и теплообмен во всей расчетной области $L \times R$ (рис. 1). Уравнение энергии в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho c\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r v_x T}{\partial x}+\frac{\partial r v_r T}{\partial r}\right)\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]. \qquad (1)$$

В левой части члены, стоящие в круглых скобках, определяют конвективный теплоперенос, их следует учитывать только в области, занятой каналом с движущимся жидким металлом. Во всей остальной расчетной области для металлической формы, стержня и затвердевшего металла следует положить $\partial r v_x T/\partial x + \partial r v_r T/\partial r = 0$.

Если бы течение происходило при постоянных теплофизических свойствах жидкости, то для его описания следовало бы воспользоваться уравнениями Навье–Стокса. Изменение вязкости от температуры можно учесть, применяя форму уравнений количества движения в направлениях. С учетом сказанного уравнения движения в цилиндрической системе координат запишем следующим образом:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r}+\frac{\partial r v}{\partial x}=0; \qquad (2)$$

- уравнение изменения количества движения в проекции на ось $r$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau_{rr}+\frac{\partial}{\partial x}\tau_{rx}=\frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}; \qquad (3)$$

- уравнение изменения количества движения в проекции на ось $x$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau_{rx}+\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx}. \qquad (4)$$

Для ламинарного режима течения напряжения, входящие в уравнения (3), (4), выражаются таким образом:

$$\tau_{rx}=\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right); \quad \tau_{rr}=2м\frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \tau_{\varphi\varphi}=2\mu\frac{v_r}{r}. \qquad (5)$$

С учетом переменной вязкости $\mu$ в выражениях (5) перепишем уравнения неразрывности и количества движения в виде:

$$\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial r}=0\,; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial ruv}{\partial x}+\frac{\partial rv^2}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right]+Q_v\,; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial ru^2}{\partial x}+\frac{\partial ruv}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]+Q_u\,, \qquad (8)$$

где источниковые члены $Q_v$ и $Q_u$ соответственно равны:

$$Q_v=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r};$$
$$Q_u=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (9)$$

При записи выражений (5)…(9) использованы безразмерные переменные

$$(\bar{x},\bar{r})=(x,r)/R\,;\quad u=v_x/u_0\,;\quad v=v_r/u_0\,;$$
$$\bar{t}=t\,u_0/R_1\,;\quad \bar{\mu}=\mu/(\rho_f u_0 R_1);\quad \bar{p}=p/(\rho_f u_0^2), \qquad (10)$$

черточки над которыми в уравнениях (6)…(10) и в дальнейшем опущены.

Введем также безразмерную температуру $\Theta=(T-T\infty)/T_\infty$ , где $T$ – температура окружающей среды, и перепишем выражение (1) в виде

$$\rho u_0 R_1 c\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial ru\Theta}{\partial r}\right)\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\lambda\frac{\nabla\Theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\right]. \qquad (11)$$

Начальные условия по скорости получаются из решения стационарных уравнений движения в канале при изотермическом процессе $T$ = $T_{01}$. Для этого стационарные уравнения количества движения, которые получаются из выражений (7), (8) при приравнивании к нулю локальных производных по времени $\partial u/\partial t=0$, решаются при постоянных физических свойствах жидкости, соответствующих начальной температуре $T$ – $T_{01}$ и полученные поля скорости и давления принимаются за начальные условия. Формулировка граничных условий для давления будет дана при рассмотрении численного метода.

**Конечно-разностная схема.** Для описания численного метода перепишем уравнения (6), (8), (11) в обобщенной форме

$$a\frac{\partial\Phi}{\partial t}+b\frac{1}{\partial}\left(\frac{\partial ru\Phi}{\partial x}+\frac{\partial rv\Phi}{\partial r}\right)=d\,\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]Q_\Phi\,. \qquad (12)$$

где $\Phi$ = 1, $u$, $v$, $\Theta$ .

В выражении (11) величины $\rho$, $u_0$, $R$, $C$ и $\lambda$ – размерные, остальные – безразмерные. Введение безразмерных комплексов $\mathrm{Re} = \rho_f u_0 R_1/\mu$ и $\mathrm{Pr} = c_p \mu/\lambda$ не имеет смысла ввиду переменности физических свойств среды в области течения и во всей расчетной области.

Для решения системы уравнений (6)…(11) необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Начальные условия по температуре, как обычно, принимаются постоянными в каждой из подобластей (рис. 1), а именно: при $t = 0$ в подобласти 1 (жидкий металл) $T = T_{01}$; в подобласти 2 (металлическая форма) $T – T_{02}$; в подобласти 3 (стержень) $T = T_{03}$.

Сформулируем граничные условия на наружной поверхности формы, на оси симметрии, в плоскостях входного и выходного сечений. На наружной поверхности формы принимается условие теплообмена с окружающей средой – $\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r} = \alpha\left(T - T_\infty\right)$, а на оси – условие симметрии $\partial T/\partial r = 0$. В безразмерных переменных эти условия перепишутся в виде:

при $r = 1$

$$\frac{\partial \Theta = \mathrm{Bi}\Theta}{\partial r};$$

при $r = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0,$$

где $\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha R}{\lambda}$; $\lambda$ – коэффициент теплопроводности материала кокиля, взятый при температуре наружной поверхности.

Для составляющих скорости с учетом ламинарности течения на твердых стенках выполняются условия «прилипания». На входе $x = 0$ и выходе $x = L$ для составляющих скорости и температуры принимаются мягкие граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю производной по продольной координате. Это обусловлено равномерным характером течения и теплопереноса на достаточно большом удалении от выступа.

Рассмотрим структуру общего дифференциального уравнения (12), которое содержит нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый члены. Слово «диффузия» используется здесь в обобщенном значении. Диффузионный поток, вызванный градиентом обобщенной переменной Ф, определяется как $\Gamma \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, при $\Phi = uv$ он представляет собой вязкое напряжение; при $\Phi = T$ – тепловой поток.

Перепишем (12) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_r}{\partial r}\right) = Q_\Phi, \qquad (13)$$

где $I_x$ и $I_r$ – суммарные потоки (конвекция плюс диффузия), определенные следующим образом:

$$I_x = r\left(u\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right);$$

$$I_r = r\left(v\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

где Г = Г/*b* – безразмерный коэффициент диффузии, причем при вычислении Г искомая величина берется на грани, а *b* – в центре контрольного объема.

Для получения дискретного аналога покроем расчетную область нерегулярной сеткой со сгущением узлов вблизи контактных линий (рис. 1). На рис. 3 представлена схема контрольного объема с центром в узле *P*. Грани узла обозначены *e*, *n*, *w*, *s* и расположены посередине между узлом *P* и смежными узлами *E, N, W, S*. Интегрируя уравнение (13) по контрольному объему, получаем

$$\frac{\Phi_p - \Phi_p^0}{Дt} r_p ДxДr + \left[\left(I_{xe} - I_{xw}\right)Дr + \left(I_{rn} - I_{rs}\right)Дx\right] = rQ_\Phi ДxДr\,, \qquad (14)$$

где $l_{xe}$ $I_{xw}$ $I_{rn}$ $I_{rs}$ – потоки на соответствующих гранях контрольного объема; $\Phi_p^0$ – значение искомой функции *т* на предыдущем временном слое.

Отдельно выпишем дискретный аналог для уравнения неразрывности

$$\left(F_e - F_w\right)\Delta r + \left(F_n - F_s\right)\Delta x = 0\,, \qquad (15)$$

где $F_e$, $F_w$, $F_n$ и $F_s$ – массовые расходы потока через грани контрольного объема с учетом постоянства плотности: $F_e = r_p u_e$; $F_w = r_p u_w$; $F_n = r_n v_n$; $F_s = r_s v_s$; $\Delta x$, $\Delta r$ – размеры граней контрольного объема.

Если умножить (15) на $\Phi_p$ и вычесть его из (14), то имеем

$$\frac{\Phi_p - \Phi_p^0}{\Delta t} r_p \Delta x \Delta r +$$

$$+\left\{\left[\left(I_e - F_e\Phi_p\right) - \left(I_w - F_w\Phi_p\right)\right]\Delta r + \left[\left(I_n - F_n\Phi_p\right) - \left(I_s - F_s\Phi_p\right)\right]\right\}\Delta x = r_p Q_\Phi \Delta x \Delta r. \qquad (16)$$

Для получения дискретного аналога необходимо в выражении (16) аппроксимировать потоки на гранях. От способа аппроксимации зависят точность и устойчивость конечно-разностной схемы. Для устойчивости разностная схема должна строиться с учетом направления потока. В схемах первого порядка поток на гранях выражается через параметры в соседних узлах, например $I_e = A\Phi_e + B\Phi_p$. При подстановке выражений для потоков в (16) получим дискретный аналог в виде

$$C_p\Phi_p = C_E\Phi_E + C_W\Phi_W + C_N\Phi_N + C_S\Phi_S + S, \qquad (17)$$

где

$$C_p = C_E + C_W + C_N + C_S + \frac{r_p\Delta x\Delta r}{\Delta t};$$

$$S = \left( Q_{\Phi} + \frac{\Phi_p^0}{Дt} \right) r_p \Delta x \Delta r \ .$$

Выражения для коэффициентов $C_E$, $C_W$, $C_N$, $C_S$ для устойчивой схемы первого порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} C_E &= T_e(F_e + |F_e|) + |L_e| - L_e; \\ C_W &= T_w(F_w + |F_w|) + |L_w| + L_w; \\ C_N &= T_n(F_n + |F_n|) + |L_n| - L_n; \\ C_S &= T_S(F_S + |F_S|) + |L_S| + L_S, \end{aligned} \qquad (18)$$

где

$$L_e = u_e r_p \Delta r; \quad L_w = u_w r_p \Delta r; \quad L_n = v_n r_n \Delta x; \quad L_S = v_S r_S \Delta x;$$

$$T_e = \Gamma r_p \frac{\Delta r}{\Delta x_e}; \quad T_w = \Gamma r_p \frac{\Delta r}{\Delta x_w}; \quad T_n = \Gamma r_n \frac{\Delta x}{\Delta r_n};$$

$$T_S = \Gamma r_s \frac{\Delta x}{\Delta r_S} \ .$$

Здесь $\Delta x_e$, $\Delta x_w$, $\Delta r_n$, $\Delta r_s$, – шаги сетки; $\Delta x$, $\Delta r$ – размеры граней.

Значения коэффициента $F$ в выражениях (18) для двух наиболее распространенных схем первого порядка следующие: $F = 0{,}5(1 - |L|/T)$ – для комбинированной схемы; $F = 0{,}5(1 - 0{,}1|L|/T)^5$ – для схемы со степенным законом.

Поясним смысл упомянутых схем. Величина $\mathrm{Pe}_e = L_e/T_e = u_e \Delta x_e/\Gamma$ представляет собой отношение конвективного потока к диффузионному и называется сеточным числом Пекле. Суть комбинированной схемы состоит в том, что для области чисел Пекле $-2 \le \mathrm{Pe} \le 2$ (диффузионный поток сравним или превышает конвективный поток на грани) она идентична схеме с центральными разностями, при которой производная в диффузионном члене $\partial\Phi/\partial x$ аппроксимируется отношением $(\Phi_E - \Phi_p)/\Delta x_e$, а скорость $u_e$ в конвективном члене вычисляется как полусумма $(u_E + u_0)/2$. Вне области указанных чисел Пекле Pe > 2 и Pe < –2 комбинированная схема сводится к схеме против потока, в котором диффузионный член принимается равным нулю, а конвективный вычисляется по скорости, взятой в узле со стороны набегающего потока. Аналогично аппроксимируются потоки на всех остальных гранях контрольного объема. Сравнение комбинированной схемы с точным решением одномерной конвективно-диффузионной задачи показывает, что наибольшее отклонение наблюдается для чисел Пекле, несколько больших Pe = ±2. Наилучшее совпадение с точным решением дает схема со степенным законом. В ней диффузионный член сохраняется до чисел Pe = ±10. При |Pe| > 10 схема со степенным законом совпадает с комбинированной.

Несколько подробнее следует остановиться на решении уравнения энергии (11). Как уже указывалось, от уравнения теплопроводности оно отличается тем, что содержит конвективный член. Вне области течения этот член равен нулю. Поэтому при решении полного уравнения (11) в области, занятой движущимся жидким металлом, коэффициенты дискретного аналога (11) определяются по формулам (17), а при решении уравнения теплопроводности в области, занятой твердым материалом, – по формулам:

$$C_E = T_e; \quad C_W = T_w; \quad C_N = T_n; \quad C_S = T_s \,. \tag{19}$$

Для учета фазового превращения добавим к теплоемкости количество приведенной теплоты фазового превращения в узлах сетки, находящихся в данный момент времени в области фазового превращения. Это приведет к изменению коэффициентов *a*, *b* в уравнении переноса (12) и далее к локальному изменению коэффициента Γ = Γ/*b* и источникового члена $Q_Ф = Q_Ф / b$ в (18).

## ВЫВОД

Установлено количественное соотношение между тепловыми и гидродинамическими параметрами движущихся расплавов в каналах комбинированных форм специальной технологии литья. Из анализа температурных и скоростных полей выявлено влияние краевых условий на структуру потока расплава.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л ы к о в А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. А н и с о в и ч Г. А. Затвердевание отливок. – Мн.: Наука и техника, 1979. – 323 с.
3. М а л е в и ч Ю. А., С а м о й л о в и ч Ю. А. Теплофизические основы затвердевания отливок и слитков. – Мн.: Вышэйш. шк., 1989. – 203 с.
4. Е с ь м а н Р. И., Ж м а к и н Н. П., Ш у б Л. И. Расчеты процессов литья. – Мн.: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой
промышленной теплоэнергетики
и теплотехники

Поступила 20.04.2005