УДК 518:517.5:536.2

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Докт. физ.-мат. наук МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается одна краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости ($y > 0$) плоскости комплексного переменного $z = x + iy$:

$$\Delta T = 0, \qquad y > 0; \tag{1}$$

$$T = T_0 f(x), \quad |x| \le 1, \quad f(\pm 1) = \frac{T^0}{T_0}, \quad y = 0; \tag{2}$$

$$T = T^0, \quad |x| > 1, \quad y = 0, \tag{3}$$

где $T = T(x, y)$ – температура; T_0 – характерная температура; T^0 – известная температура; $f(x)$ – известная функция.

В [1] с помощью методов теории аналитических функций строятся комплексные тепловые потенциалы плоских задач теории теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для практической реализации такого метода важное значение имеет вопрос об эффективном вычислении интегралов типа Коши, входящих в представление тепловых потенциалов. Как известно, во многих случаях этот вопрос представляет значительные трудности.

В настоящей статье на основе интеграла Пуассона для полуплоскости конструируется приближенное представление функции температуры $T = T(x, y)$ в верхней полуплоскости. Полученная приближенная формула эффективна в том смысле, что она сравнительно проста, устойчива и позволяет оценивать погрешности вычислений.

1. Точное представление решения краевой задачи (1)…(3). При помощи представления решения задачи Дирихле для полуплоскости интегралом Пуассона [2, с. 224–225], [3, с. 590] получаем точное решение краевой задачи (1)…(3)

$$T(x, y) = T^0 + \frac{T_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[f(t) - \frac{T^0}{T_0} \right] \frac{y\,dt}{(t - x)^2 + y^2}, \quad y > 0. \tag{4}$$

Запишем формулу (4) в виде

$$T(x, y) = T^0 + T_0 I(x, y), \quad y > 0, \tag{5}$$

где

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(t) \frac{y\,dt}{(t - x)^2 + y^2}, \qquad \varphi(x) = f(x) - \frac{T^0}{T_0}. \tag{6}$$

Примечание 1. Решение краевой задачи (1)…(3) может быть записано также через решение соответствующей задачи Шварца для полуплоскости [4, с. 268] с граничными условиями (2), (3) на действительной оси с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt.$$

Так как очевидно, что интеграл (6)

$$I(x,y) = \operatorname{Re}\Phi(z),$$

формулу (5) можно записать в виде

$$T(x,y) = T^0 + T_0 \operatorname{Re}\Phi(z).$$

2. Приближенное решение краевой задачи (1)…(3). Сначала получим приближенную формулу для интеграла (6). Зададимся на отрезке [–1; 1] системой точек

$$x_k = kh,\ k = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n,\ h = \frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ в выражении интеграла $I(x, y)$ (6) на отрезке [–1; 1] по формуле

$$\varphi(x) \approx \tilde{\varphi}(x) = \sum_{-n}^{n}\Theta_k(x)\varphi(x_k), \tag{7}$$

в которой

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \left[x_k - \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2}\right]; \\ 0,\ x \notin \left[x_k - \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$$

После этого получим квадратурную формулу

$$I(x,y) \approx \tilde{I}(x,y) = \sum_{-n}^{n} A_k(x,y)\varphi(x_k), \tag{8}$$

где коэффициенты

$$A_k(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{x_k-\frac{h}{2}}^{x_k+\frac{h}{2}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt,\ \ y > 0. \tag{9}$$

Из соотношений (9) для коэффициентов $A_k(x,y)$ квадратурной формулы (8) следует, что все они неотрицательны для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y > 0$.

Вычислив интеграл в правой части (9), получим формулу для нахождения коэффициентов $A_k(x,y)$ ($k = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n$)

$$A_k(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_k + \frac{h}{2} - x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{x_k - \frac{h}{2} - x}{y}\right). \tag{10}$$

Подставляя затем в формулу (5) вместо интеграла $I(x, y)$ его приближение по (8), найдем приближенное решение краевой задачи (1)…(3)

$$T(x,y) \approx \tilde{T}(x,y) = T^0 + T_0 \sum_{-n}^{n} A_k(x,y)\varphi(x_k), \tag{11}$$

где коэффициенты $A_k(x,y)$ определены формулой (10).

Получим неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (11).

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *в граничном условии* (2) *непрерывна на отрезке* [–1; 1], *то имеет место равномерная по x и y* $(-\infty < x < +\infty,\ y \ge 0)$ *следующая оценка погрешности приближенной формулы* (11):

$$\left|T(x,y) - \tilde{T}(x,y)\right| \le T_0 \omega(f;\, h), \tag{12}$$

где $\omega(f;h)$ *– модуль непрерывности функции* $f(\varphi)$.

Если же $f(x)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то*

$$\left|T(x,y) - \tilde{T}(x,y)\right| \le T_0 \frac{M}{2} h,\ -\infty < x < +\infty,\ y \ge 0, \qquad M = \max_{x\in[-1,1]} \left|f'(x)\right|. \tag{13}$$

Доказательство. Сравнивая соответственно равенства (5) и (11), (6) и (8), находим, что

$$T(x,y) - \tilde{T}(x,y) = T_0\left(I(x,y) - \tilde{I}(x,y)\right) = T_0 \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\right)\frac{y\,dt}{(t-x)^2 + y^2},\ y > 0.$$

Оценим последнее равенство по модулю

$$\left|T(x,y) - \tilde{T}(x,y)\right| \le T_0 \max_{x\in[-1,1]}\left|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y\,dt}{(t-x)^2 + y^2}. \tag{14}$$

Интеграл в правой части равенства (14) представляет собой гармоническую функцию в верхней полуплоскости, равную единице на отрезке [–1; 1] действительной оси и нулю – на остальной части этой оси. В силу принципа симметрии и принципа максимума модуля для гармонической функции в любой точке плоскости

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y\,dt}{(t-x)^2 + y^2} \le 1. \tag{15}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [–1; 1], то

$$\left|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| \le \omega(f;h),\ -1 \le x \le 1. \tag{16}$$

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко устанавливается при помощи формулы Тейлора, что

$$\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right| \le \frac{M}{2}h, \; -1 \le x \le 1 . \tag{17}$$

Из неравенств (14)–(16) вытекает неравенство (12), а неравенства (14), (15), (17) приводят к неравенству (13).

Примечание 2. Очевидно, что квадратурная формула (8) является точной, если $\varphi(x) \equiv 1.$ Следовательно,

$$\sum_{-n}^{n} A_k(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}, \; y > 0.$$

Из неравенства (15) следует, что

$$\sum_{-n}^{n} A_k(x, y) \le 1, \; -\infty < x < +\infty, \; y > 0. \tag{18}$$

Таким образом, можем отметить, что квадратурная формула (8) обладает замечательным качеством: все ее коэффициенты $A_k(x, y)$ неотрицательны при всех $x \in (-\infty, +\infty), y > 0$, и удовлетворяют соотношению (18).

3. Пример. В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу в верхней полуплоскости:

$$\Delta T = 0, \qquad y > 0\,; \tag{19}$$

$$T = (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \quad |x| \le 1, \; y = 0\,; \tag{20}$$

$$T = 0, \quad |x| > 1, \; y = 0\,, \tag{21}$$

(для определенности положено $T_0 = 1$, $T^0 = 0$).

С помощью точных методов вычисления интегралов типа Коши [5] находим

$$\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{-1}\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{5}{2}}}{t-z} = \frac{i}{16}\left[\xi^2(z) - 5\xi^3(z) + 10\xi(z)\right],$$

где $\xi(z) = z - \sqrt{z^2-1}.$

Учитывая связь интеграла (6) с интегралом типа Коши по отрезку [–1; 1] действительной оси (примечание 1), точное решение краевой задачи (19)…(21) можно записать в виде

$$T(x, y) = \mathrm{Re}\frac{i}{16}\left[\xi^5(z) - 5^3\xi(z) + 10\xi(z)\right]. \tag{22}$$

Для сравнения точных и приближенных значений функции $T = T(x, y)$, полученных соответственно по формулам (22) и (11) при $n = 10$, $n = 20$ и $n = 40$, приводим табл. 1.

Таблица 1

(x, y)	$T(x, y)$	$\tilde{T}_{10}(x, y)$	$\tilde{T}_{20}(x, y)$	$\tilde{T}_{40}(x, y)$
(0,1; 0,1)	0,81679	0,816106	0,816558	0,816721
(0,2; 0,2)	0,654278	0,654035	0,654165	0,654241
(0,3; 0,3)	0,521429	0,521509	0,521404	0,521415
(0,4; 0,4)	0,418555	0,418837	0,418588	0,418557
(0,5; 0,5)	0,34138	0,341759	0,341442	0,341389
(0,6; 0,6)	0,28414	0,284544	0,284212	0,284153
(0,7; 0,7)	0,241466	0,241855	0,241538	0,241479
(0,8; 0,8)	0,209137	0,209494	0,209204	0,20915
(0,9; 0,9)	0,184123	0,184444	0,184183	0,184134
(1; 1)	0,164336	0,164623	0,16439	0,164346
(0; 1000)	0,000312	0,000313	0,000313	0,000313

Результаты численного эксперимента подтверждают эффективность и устойчивость приближенной формулы (11).

ВЫВОД

С помощью интеграла Пуассона получено приближенное представление решения одной краевой задачи Дирихле для верхней полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. П ы х т е е в Г. Н. О точном и приближенном решении плоских задач теории теплопроводности с граничными условиями первого рода // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. – 1975. – № 3. – С. 19–24.
2. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. П ы х т е е в Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. – Новосибирск: Наука, 1980. – 121 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2

Поступила 30.05.2005