УДК 621.373.8:621.937:549.517.14

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ

[1]Шалупаев С.В., [2]Лукашевич С.А., [3]Крючков В.С.
[1]ГГУ им Ф. Скорины, Гомель, Беларусь, shalupaev@gsu.by
[2]ГГУ им Ф. Скорины, Гомель, Беларусь, lukashevich@gsu.by
[3]ГГУ им Ф. Скорины, Гомель, Беларусь, kruychkov98@ya.ru

Значительные трудности, возникающие при использовании аналитических методов для решения задач термоупругости, обусловили необходимость использования численных методов для моделирования процессов лазерного термораскалывания. Наилучшим образом для этих целей подходит метод конечных элементов (МКЭ). «Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура или перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей» [1].

Алгоритм применения МКЭ состоит из четырех этапов [2]:

1) выделение конечных элементов;
2) определение аппроксимирующей функции для каждого элемента;
3) объединение конечных элементов в ансамбль;
4) определение вектора узловых значений функции.

Наиболее важными преимуществами МКЭ являются:

- возможность учета зависимости свойств материалов от температуры при численном моделировании;
- простота рассмотрения задачи при использовании смешанных граничных условий;
- применимость метода для тел, изготовленных из нескольких материалов;
- возможность использования МКЭ при решении задач о телах произвольной геометрической формы.

Среди наиболее известных программных комплексов конечно-элементного анализа нужно отметить программу ANSYS, с применением которой решается широкий спектр задач механики деформируемого твердого тела, теплообмена и теплопередачи, гидроаэродинамики, акустики и электродинамики. Эта программа представляет собой инструментарий для проведения математического моделирования и вычислительного эксперимента, содержит эффективные численные методы реализации разработанных пользователем моделей [3].

Программа ANSYS является открытой системой для программирования с применением встроенного языка APDL и других языков программирования высокого уровня. Многоцелевая направленность ANSYS (т.е. реализация в ней средств для описания отклика системы на воздействия различной физической природы) позволяет использовать одну и ту же модель для решения таких связанных задач, как прочность при тепловом нагружении, влияние магнитных полей на прочность конструкции, тепломассоперенос в электромагнитном поле.

Моделирование в ANSYS основано на использовании средств термо-прочностного анализа, применимых для проведения прочностного анализа на основе результатов решения задачи теплопроводности [4]. При этом в программе ANSYS тепловой и прочностной анализ выполняются последовательно друг за другом, что соответствует методике решения несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке.

При использовании МКЭ, реализованного в ANSYS, для нахождения температурных полей, разрешимое матричное уравнение процесса теплопередачи имеет вид [4]:

$$[C]\{T'\} + [K]\{T\} = \{Q\}, \tag{1.1}$$

где $[C]$ – матрица удельных теплоемкостей;
$\{T'\}$ – производная по времени температуры в узле;
$[K]$ – матрица эффективной теплопроводности;
$\{T\}$ – вектор узловых температур;
$\{Q\}$ – вектор эффективного теплового потока в узле.

При этом в матрицах $[C]$ и $[K]$ учитывается температурная зависимость теплопроводности и теплоемкости материала от температуры; в векторе $\{Q\}$ учитывается характер воздействия лазерного пучка и охлаждение поверхности материала в результате воздействия хладагента.

Как уже отмечалось, определение температурного поля – лишь первый этап в моделировании процесса лазерного термораскалывания. Второй, наиболее важный этап – это определение термоупругих напряжений в обрабатываемом материале.

В [1] отмечено, что в общепринятой формулировке МКЭ предполагается определение поля перемещений и поэтому решение задачи сопряжено с минимизацией потенциальной энергии системы. В программе ANSYS для решения этой задачи используются разрешающее уравнение, представленное в виде:

$$[K]\{u\} = \{F\}, \tag{1.2}$$

где $[K]$ – матрица жесткости;
$\{F\}$ – вектор узловых сил;
$\{u\}$ – вектор узловых перемещений.

При моделировании процессов лазерного термораскалывания формирование вектора $\{F\}$ осуществляется с учетом влияния деформации, связанной с тепловым расширением материала при лазерном нагреве и с его сжатием в зоне воздействия хладагента. Затем с использованием найденных значений узловых перемещений определяются компоненты тензора напряжений [1].

Главным недостатком МКЭ, как и любого вариационного метода, является сложность получения априорных оценок. Проверку надежности можно осуществлять лишь посредством его апробирования для точных решений.

В работе [5] приведены три основных источника погрешности численного решения задач методом конечных элементов:

- погрешность дискретизации, возникающая из-за использования аппроксимации базисными функциями;
- погрешность округления, связанная с использованием в вычислительных машинах чисел с конечной точностью представления;
- погрешность математической модели, связанная с ее несоответствием физической реальности.

Источником погрешности являются также исходные данные, получаемые, как правило, в результате экспериментов; при этом в целом точность полученных результатов не превосходит точности исходных данных.

В [3] сообщается, что ошибки, обусловленные округлением при выполнении арифметических операций на ЭВМ, менее значимы, чем ошибки других перечисленных выше типов; поэтому данному источнику погрешностей в дальнейшем не будет уделяться внимания.

Одной из ключевых проблем при использовании МКЭ является обоснование выбранного размера конечного элемента, так как любой численный метод обладает определенной зависимостью результатов расчета от характера дискретизации. Таким образом, основным источником погрешности МКЭ, требующим детального рассмотрения, является погрешность дискретизации [5].

Общепринятой практикой обоснования сходимости МКЭ к точному решению является использование сравнения численного решения, выполненного с большим числом интервалов разбиения области, с предыдущим приближением более низкого порядка. При этом близость полученных решений служит критерием сходимости метода [5]. Уменьшением размеров элемента до определенного уровня обеспечивается необходимая детализация расчетной модели и получение более достоверных результатов.

Однако нужно отметить еще раз, что оптимальным вариантом проверки достоверности результатов численного моделирования является их сопоставление с точными аналитическими решениями.

Для оценки погрешности, обусловленной применением выбранной модели конечных элементов, было использовано точное аналитическое решение [6] неоднородного линейного уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 \cdot T(\vec{r},t) - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{-Q(\vec{r},t)}{\lambda}, \tag{1.3}$$

с источником

$$Q(\vec{r},t) = \gamma \cdot P_0 \cdot \exp\left[\frac{-(x-vt)^2-(y)^2}{A^2} - \gamma z\right], \tag{1.4}$$

которым моделируется равномерное движение лазерного пучка по которым моделируется равномерное движение лазерного пучка по прямой,

где λ – коэффициент теплопроводности материала;

a – температуропроводность материала;

P_0 – плотность мощности лазерного излучения в центре пучка;

γ – коэффициент поглощения среды;

v – скорость прямолинейного движения лазерного пучка;

R – радиус лазерного пучка.

Функция Грина уравнения теплопроводности для полубесконечной среды с учетом теплоотдачи с поверхности имеет вид:

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}',\tau) &= \frac{a}{8\cdot\lambda(\pi\cdot a\cdot\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left[\frac{-(y-y')^2-(x-x')^2}{4\cdot a\cdot\tau}\right] \times \\ &\times \left\{\exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\cdot a\cdot\tau}\right] + \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\cdot a\cdot\tau}\right] - 2\cdot h_0\cdot\sqrt{\pi\cdot a\cdot\tau} \times \right. \\ &\left. \times erfc\left(\frac{(z+z')}{\sqrt{4\cdot a\cdot\tau}} + h_0 \sqrt{a\cdot\tau}\right) \cdot \exp\left[h_0\cdot(z+z') + a\cdot h_0^2\cdot\tau\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $h_0 = h/\lambda$ – относительный коэффициент теплоотдачи (h – коэффициент теплоотдачи), $\tau = t - t'$.

$$T(\vec{r},t) = \int d^3\vec{r}' \int dt' G(\vec{r},\vec{r}',t-t') \cdot Q(\vec{r}',t'). \tag{1.6}$$

Интегрируя (1.6), получим следующее выражение для температурного поля:

$$T(\vec{r},t) = \frac{P_0\cdot\gamma\cdot a\cdot R^2}{2\cdot\lambda} \int_0^t dt' f(\vec{r},\tau), \tag{1.7}$$

где

$$f(\vec{r},t)=\frac{\exp\left\{\dfrac{-(x-v\cdot\tau)^2-(y)^2)}{4\cdot a\cdot\tau+R^2}\right\}}{4\cdot a\cdot\tau+R^2}\times$$
$$\times\left\{\exp(\gamma^2\cdot a\cdot\tau-\gamma\cdot z)\cdot erfc(\gamma\cdot\sqrt{a\cdot\tau}-z/\sqrt{4\cdot a\cdot\tau})+\right.$$
$$+\frac{\gamma+h_0}{\gamma-h_0}\exp(\gamma^2\cdot a\cdot\tau+\gamma\cdot z)\cdot erfc(\gamma\cdot\sqrt{a\cdot\tau}+z/\sqrt{4\cdot a\cdot\tau})-\qquad(1.8)$$
$$\left.-\frac{2\cdot h_0}{\gamma-h_0}\exp(h_0{}^2\cdot a\cdot\tau+h_0\cdot z)\cdot erfc(h_0\cdot\sqrt{a\cdot\tau}+z/\sqrt{4\cdot a\cdot\tau})\right\}.$$

При устремлении коэффициента поглощения к бесконечности решение (1.7) – (1.8) принимает вид [6]:

$$T(\vec{r},t)=\frac{P_0\cdot a\cdot R^2}{\lambda\cdot\pi^{1/2}}\int_0^t dt' f(\vec{r},\tau),\qquad(1.9)$$

где

$$f(\vec{r},t)=\frac{\exp\left\{\dfrac{-(x-v\cdot t')^2-(y)^2)}{4\cdot a\cdot\tau+R^2}\right\}}{(4\cdot a\cdot\tau+R^2)\cdot\sqrt{a\cdot\tau}}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\exp(\dfrac{-z^2}{4\cdot a\cdot\tau})-h_0\cdot\pi\cdot\sqrt{a\cdot\tau}\cdot\\ \cdot erfc(\dfrac{z}{2\cdot\sqrt{a\cdot\tau}}+h_0\cdot\pi\cdot\sqrt{a\cdot\tau})\\ \cdot\exp(h_0\cdot z+h_0{}^2\cdot a\cdot\tau)\end{array}\right\}.\qquad(1.10)$$

В дальнейшем полученное точное аналитическое решение (1.9) было использовано для оценки достоверности результатов конечноэлементного моделирования. При этом адекватность полученных результатов оценивалась сопоставлением максимальных значений температуры, рассчитанных с применением МКЭ и на основе аналитического решения (1.9).

Расчеты были выполнены с учетом следующих параметров: P_0 = 2,238·10^6 Вт/м^2, R = 1,5·10^{-3} м, v = 25·10^{-3} м/с. При расчетах на основе выражения (1.9) получено максимальное значение температуры равное 769,7 ˚К для листового стекла и 347,1 ˚К для поликора.

Приведенные в таблице 1 результаты верификации результатов численного моделирования позволяют сделать вывод о том, что используемая конечноэлементная модель обладает сходимостью к точному решению при уменьшении размеров элементов. При этом погрешность дискретизации составляет порядка 2 – 3,5 %.

Таблица 1 – Параметры конечноэлементных моделей и результаты исследования точности решений

Материал	Листо вое стекло	Листо вое стекло	Листовое стекло	Поликор
Тип элемента	Solid7 0	Solid7 0	Solid90	Solid90

Окончание таблицы 1

Шаг дискретизации по времени, с	0,01	0,005	0,005	0,005
Длина грани элемента в плоскости обработки, 10^{-3} м	0,25	0,125	0,125	0,125
Максимальное значение температуры, К	720,7	731,4	744,3	340,6
Относительная погрешность, %	6,4	5,0	3,3	1,9

Обратим внимание на еще один источник погрешности – на погрешность используемой математической модели.

Для теплопроводности и теплоемкости алюмооксидной керамики характерна существенная зависимость от температуры материала.

Плотность потока энергии с поверхности стекла вследствие излучения при достижении температуры стеклования приблизительно равна $3 \cdot 10^4$ Вт/м^2, а плотность потока, обусловленная конвективным теплообменом, не превышает 25 Вт/м^2. Для термораскалывания использованы плотности мощности, заключенные в пределах от $0{,}3 \cdot 10^6$ Вт/м^2 до $20 \cdot 10^6$ Вт/м^2. Таким образом, при определении температурных полей, формируемых во время лазерного термораскалывания, можно пренебречь потерями энергии с поверхности материала вследствие излучения и конвекции (за исключением области воздействия хладагента).

Кроме вышеуказанных источников погрешности используемой модели нужно обратить внимание на то, что при определении полей напряжений используется так называемая несвязанная квазистатическая постановка задачи термоупругости. Особенностью такой модели процессов лазерного термораскалывания является пренебрежение взаимозависимостью поля деформаций и температурного поля (эффект связанности), а также пренебрежение динамическими эффектами, обусловленными движением частиц твердого тела при тепловом расширении. Однако в [6] содержится утверждение об относительно небольшой величине эффекта связанности и динамических эффектов, проявляющихся при лазерном термораскалывании.

Отдельно можно выделить критерий разрушения материала, используемый для выявления физических закономерностей лазерного термораскалывания алюмооксидной керамики. Как уже отмечалось, при моделировании соответствующих процессов в качестве критерия разрушения материала целесообразно использование прочности на разрыв определенных марок силикатного стекла и алюмооксидной керамики.

Таким образом, в качестве основного критерия, определяющего направление развития трещины, в данной работе выбран критерий максимальных растягивающих напряжений, впервые введенный Е. Иоффе [7, с. 193]. В соответствии с этим критерием лазерная микротрещина распространяется в направлении, перпендикулярном действию максимальных растягивающих напряжений. При этом принято во внимание, что трещина, распространяющаяся в зоне растяжения, прекращает свой рост и даже может «отразиться» от зоны сжатия.

Дальнейшее повышение точности инженерных расчетов процесса лазерного термораскалывания возможно в рамках механики разрушения, базирующейся на теории трещинообразования Грифитса-Ирвина. Анализируя лазерное термораскалывание в рамках этого подхода можно несколько уточнить значения температуры и напряжений в зоне обработки. Эта возможность обусловлена тем, что при наличии трещины может нарушиться теплообмен между разделенными ею частями материала, а вершина движущейся трещины сама является источником тепла. При этом, как уже отмечалось выше, происходит концентрация напряжений вблизи вершины трещины.

С использованием указанного подхода для моделирования процессов лазерного термораскалывания успешно определены физические закономерности и особенности лазерного термораскалывания керамики. При этом для выявления особенностей формирования микротрещин при различных схемах лазерного термораскалывания были использованы пространственные распределения термоупругих полей, рассчитанные для режимов обработки, либо при использовании которых обеспечивались приемлемые результаты во время экспериментов.

Список литературы:

1. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
2. Кундас, С. П. Компьютерное моделирование технологических систем / С. П. Кундас, Т. А. Кашко.: учеб. пособие: в 2 ч. – Минск.: БГУИР, 2004. – Ч.1. – 168 с.
3. Каплун, А. Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – М: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
4. Введение в ANSYS: прочностной и тепловой анализ: учебное пособие / А. С. Шалумов [и др.]. – Ковров: КГТА, 2002. - 52 с.
5. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппраксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Шалупаев, С. В. Термоупругие поля, формируемые в твердых телах световыми и звуковыми потоками: дис. … канд. физ.-матем. наук: 01.04.05 / С. В. Шалупаев. – Мн, 1987. – 157 с.
7. Карзов, Г. П. Физико – механическое моделирование процессов разрушения / Г. П. Карзов, Б. З. Марголин, В. А. Шевцова. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с.