УДК 621.316.728

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Канд. техн. наук САФАРЯН В. С.

ЗАО «НИИ энергетики» (Республика Армения)

Обычно решение нелинейных уравнений установившегося режима (УУР) определяется в результате итерационного расчета. Если итерационный процесс не приведет к решению, то отнюдь не следует, что режим не существует.

Проблеме существования решения УУР посвящен ряд работ [1–3], однако вопросы все еще остаются. В данной работе предлагается метод исследования УУР с использованием теоремы Брауэра о неподвижной точке [4]. Получено достаточное условие существования решения УУР.

Рассмотрим решение УУР в обращенной форме

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_0 + \underline{\mathbf{Z}}\underline{\hat{\mathbf{U}}}_d^{-1}\underline{\hat{\mathbf{S}}} \tag{1}$$

или в форме, позволяющей выполнять интеративное уточнение:

$$\underline{\mathbf{U}}^{(l+1)} = \underline{\mathbf{U}}_0 + \underline{\mathbf{Z}}\left(\underline{\hat{\mathbf{U}}}_d^{(l)}\right)^{-1}\underline{\hat{\mathbf{S}}}, \tag{2}$$

где $\underline{\mathbf{U}}$ – вектор искомых узловых комплексных напряжений; $\underline{\mathbf{U}}_0$ – то же узловых комплексных напряжений в холостом режиме $(\underline{\mathbf{S}} = 0)$; $\underline{\mathbf{Z}}$ – матрица узловых комплексных сопротивлений; $\underline{\mathbf{S}}$ – вектор узловых комплексных мощностей; l – номер итерации.

Вектор $\underline{\mathbf{U}}^*$, удовлетворяющий уравнению (1), называется неподвижной точкой комплексной вектор-функции $\mathbf{F}$ от комплексной вектор-переменной $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{U}}) = \{f_1(\underline{\mathbf{U}}), f_2(\underline{\mathbf{U}}), \ldots, f_n(\underline{\mathbf{U}})\}; \\ f_i(\underline{\mathbf{U}}) = \underline{U}_{0i} + \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{Z}_{ij} \dfrac{\hat{\underline{S}}_j}{\hat{\underline{U}}_j}, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\underline{\mathbf{U}} = \{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \ldots, \underline{U}_n\}$, n – число независимых узлов рассматриваемой сети.

Согласно теореме Брауэра о неподвижной точке [4], если G – непустое компактное выпуклое множество в C^n (n – мерное комплексное пространство), а $\mathbf{F}: G \to G$ – непрерывное отображение, переводящее каждую точку $g \in G$ множества G в некоторую точку $F(g)$ этого же множества, то $\mathbf{F}$ имеет неподвижную точку в области G.

Обозначим через G_U, G_I множества векторов узловых комплексных напряжений и токов. Если множество G_U компактное и выпуклое и для всех векторов $\underline{\mathbf{U}} \in G_U$, $\underline{\mathbf{U}}_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, то отображение $\mathbf{F}: G_U \to G_U$, задаваемое системой (3), будет непрерывным и однозначным.

Рассмотрим отображения $\mathbf{F}_1 : G_U \to G_I$:

$$\underline{I}_i = \frac{\hat{\underline{S}}_i}{\hat{\underline{U}}_i}; \quad i = \overline{1,n},$$

и $\mathbf{F}_2 : G_I \to G'_U$, задаваемое известным выражением

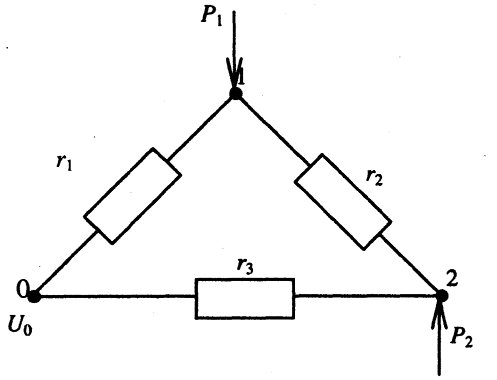
$$\underline{U}_i = \underline{U}_{0i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{Z}_{ij} \underline{I}_j, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что отображение $\mathbf{F}: G_U \to G_U$, задаваемое формулой (2), является суперпозицией (композицией) отображений $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2\mathbf{F}_1$.

Согласно теореме Брауэра, если $G'_U \cap G_U = \emptyset$, то система нелинейных уравнений (1) в области G_U не имеет решений, а при $G'_U \subseteq G_U$ система (1) имеет неподвижную точку (решение) $\underline{U}^* \subseteq G_U$. Но процедура проверки вложенности множеств G_U и G'_U – вызывает определенные затруднения. Ниже предлагаются эффективные способы для проверки вложенности множеств G_U и G'_U.

Сначала в качестве примера рассмотрим сеть постоянного тока. Без ущерба для общности и с целью геометрической иллюстрации все рассуждения проведем на примере трехузловой электрической сети постоянного тока (рис. 1). Для этой схемы определим матрицы узловых проводимостей и узловых сопротивлений:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом;

$U_0 = 220$ кВ;

$P_1 = 100$ МВт;

$P_2 = -200$ МВт.

Рис. 1

Предположим, нас интересует существование режима в заданной области G_U (рис. 2).

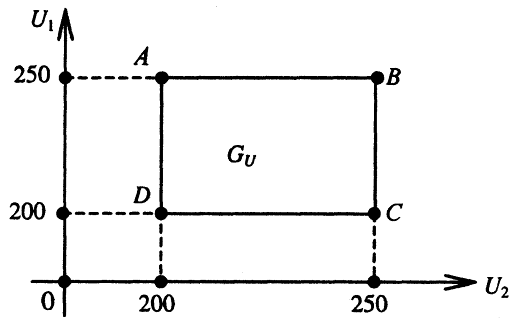


Рис. 2

Определяем множество узловых токов. Поскольку множества G_U и G_I являются выпуклыми, а отображения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ не искажают прямых, параллельных координатным осям, значит, достаточно найти образы точек A, B, C, D и соединить их прямыми линиями (рис. 3).

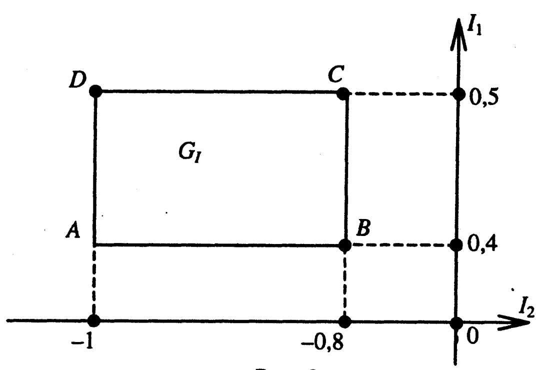


Рис. 3

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} 100/250 \\ -200/200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} 100/250 \\ -200/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} 100/200 \\ -200/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}8 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_D = \begin{bmatrix} 100/200 \\ -200/200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Отображение $\mathbf{F}_1$ непрерывно и однозначно отображает множество G_U на множество G_I. Для определения множества G'_U находим образы точек $A, B, C, D \in G_I$, задаваемые отображением $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{U}_A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 219\dfrac{14}{15} \\ 219\dfrac{7}{15} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 219\dfrac{9}{15} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\dfrac{1}{15} \\ 219\dfrac{19}{30} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_D = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 219\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

По значениям координат векторных значений $\mathbf{U}_A$, $\mathbf{U}_B$, $\mathbf{U}_C$, $\mathbf{U}_D$ построим множество G'_U (рис. 4).

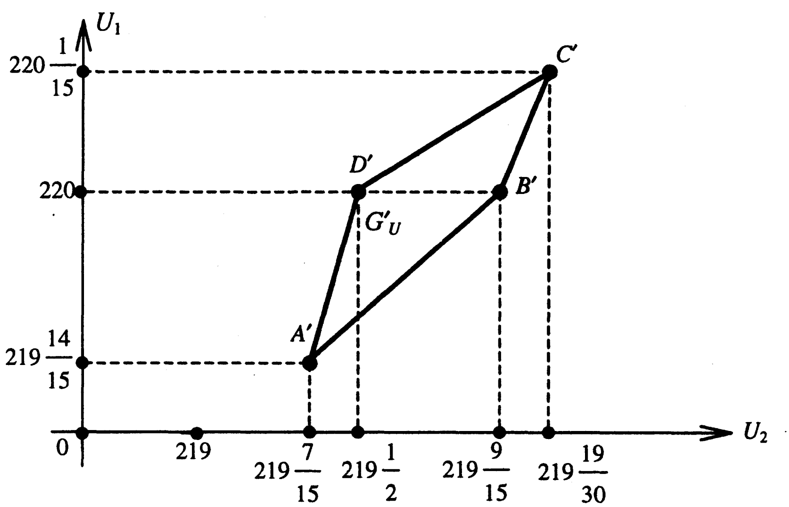


Рис. 4

Поскольку точки $A', B', C', D' \in G_U$, вследствие выпуклости области G'_U, согласно теореме Брауэра, режим электрической сети (рис. 1) в множестве G_U существует, т. е. $\underline{\mathbf{U}}^* \in G'_U$.

Отметим, что полученный результат можно обобщить для n-мерного эвклидова пространства, в частности, для трехмерного пространства множество G_U является прямоугольным параллелепипедом, грани которого параллельны координатным плоскостям и не пересекаются с координатными осями.

Предложенную методику можно также использовать для исследования влияния изменения того или иного режимного параметра на существование режима. В частности, при $U_0 > 250\frac{1}{15}$ и $U_0 < 200\frac{1}{15}$ в множестве G_U (рис. 2) режим электрической сети (рис. 1) не существует, так как при этом $G'_U \cap G_U = \emptyset$. Можно определить граничные значения других режимных параметров.

По приведенному выше методу для определения множества G'_U в общем случае требуется определить координаты 2^n точек. Ниже для сетей постоянного тока предлагается другой алгоритм определения вложенности множеств G_U и G'_U, требующий вычисления координат всего лишь $2n$ точек.

Пусть требуется определить, существуют ли решения нелинейных УУР сетей постоянного тока в заданной области искомых параметров, т. е. $U_i^{\min} \le U_i \le U_i^{\max}$, $i = \overline{1,n}$.

Для решения поставленной задачи сначала находим:

$$I_i^{\min} = \min\left(\frac{P_i}{U_i^{\min}}, \frac{P_i}{U_i^{\max}}\right), \; i = \overline{1,n};$$

$$I_i^{\max} = \max\left(\frac{P_i}{U_i^{\min}}, \frac{P_i}{U_i^{\max}}\right), \; i = \overline{1,n}.$$

Далее, поскольку для сетей постоянного тока $R_{ij} \ge 0$, $i, j = \overline{1,n}$, следовательно, можно записать:

$$\overline{U}_i^{\min} = U_{0i} + \sum_{j=1}^{n} R_{ij} I_j^{\min}, \; i = \overline{1,n};$$

$$\overline{U}_i^{\max} = U_{0i} + \sum_{j=1}^{n} R_{ij} I_j^{\max}, \; i = \overline{1,n},$$

где $\overline{U}_i^{\min}$, $\overline{U}_i^{\max}$ – соответствующие наименьшее и наибольшее значения узловых напряжений.

Если $\overline{U}_i^{\min} \ge U_i^{\min}$ и $\overline{U}_i^{\max} \le U_i^{\max}$, $i=\overline{1,\ n}$, (очевидно, что $\overline{U}_i^{\max} \ge \overline{U}_i^{\min}$), то в заданной области режим существует.

Для схемы, приведенной на рис. 1, имеем:

$$I_1^{\min} = 100/250 = 2/5;\ \ I_1^{\max} = 100/200 = 1/2;$$

$$I_2^{\min} = -200/200 = -1;\ I_2^{\max} = -200/250 = -4/5;$$

$$\overline{U}_1^{\min} = 220 + \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{2}{3} - 1\right) = 219\frac{14}{15};\ \ \overline{U}_2^{\min} = 220 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - 2\right) = 219\frac{7}{15};$$

$$\overline{U}_1^{\max} = 220 + \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) = 220\frac{1}{15};\ \ \overline{U}_2^{\max} = 220 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{4}{5}\right) = 219\frac{19}{30}.$$

Так как $\overline{U}_1^{\min} > 200$; $\overline{U}_2^{\min} > 200$ и $\overline{U}_1^{\max} < 250$; $\overline{U}_2^{\max} < 250$, значит, в заданной области режим существует.

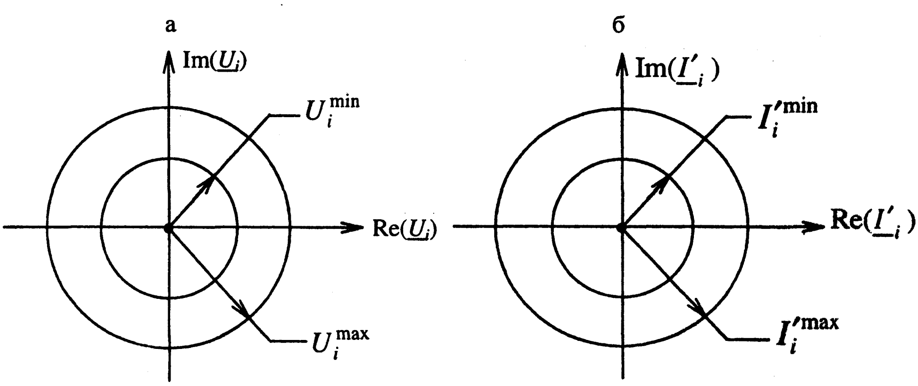


Рис. 5

Рассмотрим сеть переменного тока с заданными мощностями в узлах. Ограничения здесь устанавливаются на модули узловых напряжений (рис. 5а).

Обозначим $\underline{Z}'_{ij} = \underline{Z}_{ij}\hat{S}_j$, $j=\overline{1,\ n}$, $i=\overline{1,\ n}$, и построим область изменения комплексных узловых токов (рис. 5б) при единичных узловых комплексных мощностях, т. е. $I_i'^{\min} = \dfrac{1}{U_i^{\max}}$; $I_i'^{\max} = \dfrac{1}{U_i^{\min}}$.

Точки множества G'_U будем определять по формуле

$$\underline{U}'_i = \underline{U}_{0i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{Z}'_{ij}\underline{I}'_J,\ \ i=\overline{1,\ n}.$$

Представим (3) в полярных координатах

$$\underline{U}'_i = U_{0i}e^{j\psi_0} + \sum_{j=1}^{n} Z'_{ij}I'_J e^{j(\varphi_{ij}+\psi_j)},\ \ i=\overline{1,\ n},$$

где $\underline{U}_{i0} = U_{i0}e^{i\psi_0}$, $\underline{Z}'_{ij} = Z'_{ij}\, e^{j\varphi_{ij}}$, $\underline{I}'_j = I'_j\, e^{j\psi_j}$.

Нетрудно видеть, что U'_i достигает наибольшего значения при $\psi_j = \psi_0 - \varphi_{ij}$ и $I'_j = I'^{\max}_j$, следовательно, имеем

$$U'^{\max}_i = U_{i0} + \sum_{j=1}^{n} Z'_{ij}\, I'^{\max}_j,\ i = \overline{1,n}.$$

Аналогично при $\psi_j = -\psi_0 - \varphi_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, имеем

$$U'^{\min}_i = U_{i0} - \sum_{j=1}^{n} Z'_{ij}\, I'^{\max}_j,\ i = \overline{1,n}.$$

Перед тем как определить $U'^{\min}_i$, проверяем условие

$$\sum_{j=1}^{n} Z'_{ij}\, I'^{\max}_j \ge U_{i0},\ i = \overline{1,n}.$$

При его соблюдении принимаем $U'^{\min}_i = 0$ (этого можно достичь выбором соответствующих узловых токов вместо $I'^{\max}_j$, $j = \overline{1,n}$). При этом нарушается непрерывность отображения (1).

Таким образом, если:

$$\begin{cases} U'^{\min}_i \ge U_i^{\min},\ i = \overline{1,n}; \\ U'^{\max}_i \ge U_i^{\max},\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (4)$$

то режим в заданной области существует. Если условие (4) нарушено для всех узлов $(G_u \cap G'_u = \emptyset)$, то в заданной области режим не существует.

Отметим, что при определении $U'^{\min}_i$ и $U'^{\max}_i$, $i = \overline{1,n}$, был использован только $U_i^{\min}$, $\left(I_i^{\min}\right)$, $i = \overline{1,n}$. Если нас интересует существование режима вообще, то достаточно оценить только $U'^{\min}_i$, $i = \overline{1,n}$:

$$U'^{\min}_i = U_{i0} - \sum_{j=1}^{n} Z'_{ij} \frac{1}{U_j^{\min}} \ge U_i^{\min},\ i = \overline{1,n},$$

или, принимая $U_j^{\min} = U^{\min}$, $j = \overline{1,n}$, получим:

$$U^{\min} + \frac{A_i}{U^{\min}} \le U_{i0},\ i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

где $A_i = \sum_{j=1}^{n} Z'_{ij}$.

Из (5) получаем достаточное условие существования режима

$$U_{i0}^{2} \ge 4A_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Если в некоторых узлах (k) заданы P_k, U_k, $Q_k^{\min}$ и $Q_k^{\max}$, то поступаем следующим образом.

Приняв $\underline{Z}'_{ik} = \underline{Z}_{ik}\,\hat{\underline{S}}_k,\ i=\overline{1,n},$ найдем $I_k^{\max} = I_k^{\min} = \dfrac{1}{U_k}$, $Q_k = \max\left(\left|Q_k^{\min}\right|, \left|Q_k^{\max}\right|\right)$, а вместо $U_k'^{\min}$ и $U_k'^{\max}$ вычисляем $Q_k'^{\max}$ и $Q_k'^{\min}$, используя формулу

$$Q_k = -\operatorname{Im}\left[\underline{Y}_{kk}U_k^{2} + \hat{\underline{U}}_k\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{Y}_{kj}\underline{U}_j + \underline{I}_{k0}\right)\right].$$

Проверяем условия:

$$Q_k'^{\min} \ge Q_k^{\min};\ Q_k'^{\max} \le Q_k^{\max}$$

совместно с условиями (4). При одновременном их выполнении можно утверждать, что режим в заданной области существует.

ВЫВОДЫ

1. Предложен метод определения существования решения УУР в заданной области с использованием теоремы Брауэра о неподвижной точке.
2. Получено достаточное условие существования решения УУР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Идельчик В. И. Расчеты установившихся режимов электрических систем. – М.: Энергия, 1977. – 189 с.
2. Идельчик В. И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
3. Баринов В. А, Совалов С. А. Режимы энергосистем: Методы анализа и управления. – М.: Энергия, 1990.
4. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.

Представлена
Ученым советом

Поступила 12.12.2002