

О ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА РАДИАЛЬНОЙ СЕТИ

Инж. ТОМКЕВИЧ А. П., ЯНУШКЕВИЧ О. А.

Белорусский национальный технический университет

Одно из приоритетных направлений в исследовании задач нелинейных электрических цепей – расчет установившегося режима, требующий решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений. К сожалению, в настоящее время в большинстве случаев используются лишь итерационные методы нахождения неизвестных параметров установившегося режима. Обычно такие методы предполагают большой объем вычислительных работ и не всегда являются сходящимися. В связи с этим стала актуальной проблема разрешимости задачи нахождения параметров установившегося режима, что напрямую связано с получением точного решения. Ранее [1] предпринимались попытки найти аналитическое решение задачи путем сведения системы нелинейных алгебраических уравнений к параметрическому уравнению. В настоящей статье приведены условия существования установившегося режима и формулы для вычисления точных решений системы уравнений узловых напряжений. Результаты исследований проанонсированы в [2].

В качестве физической модели линий для таких расчетов используем П-образную схему замещения линии электропередачи (ЛЭП). Это позволяет распространить полученные результаты на тупиковые линии различного исполнения (кабельные или воздушные) и всевозможных номинальных напряжений. Кроме этого, свойства, устанавливающие закономерности для одной ЛЭП, нетрудно обобщить для распределительных сетей.

ЛЭП опишем при помощи направленного взвешенного графа, состоящего из двух узлов и ребра (рис. 1). Каждый узел характеризуется двумя параметрами: мощностью \underline{S}_i и напряжением \underline{U}_i , ($i = 1, 2$). Ребро взвешено четырехмерными векторами $(r_{ik}; x_{ik}; g_{ik}; b_{ik})$ $i = 1, 2; k = 1, 2$, компоненты которых будем считать известными величинами, не зависящими от параметров режима \underline{S}_i и \underline{U}_i . Направление графа отражает положительное направление перетока мощности по ЛЭП (от узла 1 к узлу 2).

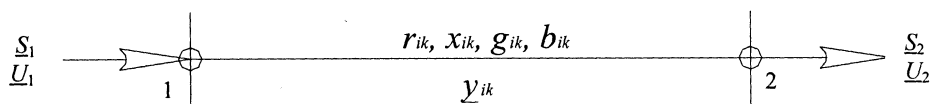


Рис. 1

Существует ряд электротехнических методов [3] для описания математической модели задачи: законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых напряжений и др. В качестве математической модели может быть использована система уравнений, полученная с помощью одного из этих методов.

В зависимости от способа представления узлов сети система уравнений является линейной или нелинейной. В случае известных параметров \underline{S}_i и \underline{U}_i одного из узлов получается линейная система уравнений, решение которой приведено в [3, 4]. В других случаях система уравнений – нелинейная и традиционно решается итерационными методами (Ньютона – Рафсона, Зейделя и др.), сходимость которых зависит от выбранного начального приближения и формы записи уравнений. Так, сходимость метода Ньютона – Рафсона будет наилучшей, если система уравнений составлена по методу узловых напряжений в форме баланса действительной и мнимой составляющей токов в декартовых координатах [5], несмотря на то, что метод контурных токов дает систему уравнений наименьшего порядка [6].

Рассмотрим математическую модель сети, полученную с помощью метода узловых напряжений. Отметим, что форма записи уравнений существенной роли не играет и зависит от известных и неизвестных параметров режима. В соответствии с основными положениями этого метода можно записать систему, в которой каждое уравнение соответствует узлу сети. В матричном виде система уравнений узловых напряжений в форме баланса мощности имеет вид

$$\text{diag} \underline{U} \overline{\underline{Y}} \overline{\underline{U}} = \underline{S}, \quad (1)$$

где $\text{diag} \underline{U}$ – диагональная матрица напряжений в узлах; $\overline{\underline{Y}}$ – матрица сопряженных собственных и взаимных проводимостей узлов, зависящая от векторов веса ребра $(r_{ik}; x_{ik}; g_{ik}; b_{ik})$; $\overline{\underline{U}}$ – вектор сопряженных напряжений в узлах; \underline{S} – то же мощностей в узлах.

Для рассматриваемой сети (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \overline{y}_{11} \underline{U}_1 \overline{\underline{U}}_1 + \overline{y}_{12} \underline{U}_1 \overline{\underline{U}}_2 = \underline{S}_1; \\ \overline{y}_{21} \underline{U}_2 \overline{\underline{U}}_1 + \overline{y}_{22} \underline{U}_2 \overline{\underline{U}}_2 = \underline{S}_2. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть узел 1 является балансирующим по мощности, т. е. известен комплекс напряжения \underline{U}_1 и неизвестна мощность \underline{S}_1 . В узле 2 считаем напряжение \underline{U}_2 неизвестным, а нагрузку \underline{S}_2 заданной постоянной мощностью.

Введем следующие обозначения:

$$\underline{S}_i = P_i + jQ_i = S_i e^{j\varphi_i}; \quad \underline{U}_i = U_i e^{j\psi_i}; \quad \overline{y}_{ik} = y_{ik} e^{j\alpha_{ik}},$$

$$i = 1, 2; \quad k = 1, 2; \quad \delta = \psi_2 - \psi_1.$$

Отметим, что система (2) имеет конечное число решений, если неизвестными являются не более четырех из восьми перечисленных параметров для обоих узлов (например, P_1 и Q_1 , U_2 и ψ_2).

Обозначим $V = \frac{y_{21}^2 U_1^2}{2y_{22} S_2}$.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием существования решения системы (2) с неизвестными \underline{S}_1 и \underline{U}_2 является неравенство

$$V \geq 2 \sin^2 \frac{\varphi_2 + \alpha_{22}}{2}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $(\underline{U}_2^*; \underline{S}_1^*)$ – решение системы (2). Тогда из второго уравнения (2), выделяя действительную и мнимую часть, имеем:

$$\begin{cases} \cos(\delta - \alpha_{21}) = \frac{S_2}{y_{21}U_2^*U_1} \cos \varphi_2 - \frac{y_{22}U_2^*}{y_{21}U_1} \cos \alpha_{22}; \\ \sin(\delta - \alpha_{21}) = \frac{S_2}{y_{21}U_2^*U_1} \sin \varphi_2 - \frac{y_{22}U_2^*}{y_{21}U_1} \sin \alpha_{22}. \end{cases}$$

Откуда с учетом основного тригонометрического тождества получаем уравнение

$$y_{22}^2 (U_2^*)^4 - A (U_2^*)^2 + S_2^2 = 0, \quad (4)$$

где $A = y_{21}^2 U_1^2 + 2S_2 y_{22} \cos(\varphi_2 + \alpha_{22})$. Поскольку модуль напряжения U_2^* является действительным неотрицательным числом, должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} A^2 - 4y_{22}^2 S_2^2 \geq 0; \\ A \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

решая которую выводим неравенство (3).

Обратно, если верно неравенство (3), то в силу выполнения условий (5) существует неотрицательное решение U_2^* уравнения (4), а следовательно, система (2) также имеет решение. Теорема 1 доказана.

Выясним сущность условия (3). Для этого перепишем его в следующем виде:

$$S_2 \leq \frac{y_{21}^2 U_1^2}{2y_{22}(1 - \cos(\varphi_2 + \alpha_{22}))}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что максимальная мощность нагрузки в узле 2 $S_2 e^{j\varphi_2}$ зависит только от параметров ЛЭП и модуля напряжения в ее начале U_1 . Установившийся режим существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (6).

Из формулы (6) с учетом соотношения $P_2 = S_2 \cos \varphi_2$ устанавливаем, что предельная потребляемая активная мощность максимальна при угле $\varphi_2 = \pi + \alpha_{22}$ и составляет

$$P_{2\max} = -\frac{y_{21}^2 U_1^2}{4y_{22} \cos(\alpha_{22})}.$$

Теорема 2. Если неравенство (3) строгое, то система (2) с неизвестными \underline{S}_1 и \underline{U}_2 имеет два решения:

$$\left(\underline{U}_2^{(i)}; \underline{S}_1^{(i)}\right), \quad i=1, 2, \quad (7)$$

где

$$\underline{U}_2^{(i)} = U_2^{(i)} e^{j(\delta^{(i)} + \psi_1)};$$

$$U_2^{(1)} = \sqrt{\frac{S_2}{y_{22}} \left(F + \sqrt{F^2 - 1} \right)}; \quad U_2^{(2)} = \sqrt{\frac{S_2}{y_{22}} \left(F - \sqrt{F^2 - 1} \right)}; \quad (8)$$

$$F = V + \cos(\varphi_2 + \alpha_{22}); \quad \delta^{(i)} = \arg(\delta_{\text{Re}}^{(i)} + j\delta_{\text{Im}}^{(i)}) + \alpha_{21};$$

$$\delta_{\text{Re}}^{(i)} = \left(\frac{S_2 \cos \varphi_2 - y_{22} (U_2^{(i)})^2 \cos \alpha_{22}}{y_{21} U_2^{(i)} U_1} \right); \quad \delta_{\text{Im}}^{(i)} = \left(\frac{S_2 \sin \varphi_2 + y_{22} (U_2^{(i)})^2 \sin \alpha_{22}}{y_{21} U_2^{(i)} U_1} \right);$$

$$S_1^{(i)} = \bar{y}_{11} \underline{U}_1 \bar{\underline{U}}_1 + \bar{y}_{12} \underline{U}_1 \bar{\underline{U}}_2^{(i)}.$$

Если соотношение (3) является равенством, то

$$\left(\underline{U}_2^{(1)}; \underline{S}_1^{(1)}\right) = \left(\underline{U}_2^{(2)}; \underline{S}_1^{(2)}\right),$$

т. е. система (2) с неизвестными \underline{S}_1 и \underline{U}_2 имеет единственное решение.

Доказательство. Из второго уравнения системы (2) после несложных преобразований получаем биквадратное уравнение (4). Очевидно, если неравенство (3) строгое, то уравнение (4) имеет два положительных решения (8). Поэтому и система (2) имеет также два решения, которые вычисляются по (7).

Если соотношение (3) является равенством, то дискриминант биквадратного уравнения (4) равен нулю и уравнение имеет два решения, равные по абсолютной величине. Следовательно, уравнение (4), а значит, и система (2) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (7). В этом случае будем иметь $\left(\underline{U}_2^{(1)}; \underline{S}_1^{(1)}\right) = \left(\underline{U}_2^{(2)}; \underline{S}_1^{(2)}\right)$. Теорема 2 доказана.

При выполнении практических расчетов с использованием полученных зависимостей в теореме 2 необходимо учесть, что генерируемая мощность (активная или реактивная) берется со знаком «+», а потребляемая – со знаком «-». Также учтена сопряженность элементов матрицы \underline{Y} , построение которой выполняется в соответствии с общепринятыми правилами (например, [3]).

На основе теоремы 2 проведен вычислительный эксперимент по решению практической задачи [4]. Пусть нагрузка $\underline{S}_2 = 15 + j10$ МВ·А питается от шин электростанции по одноцепной линии 110 кВ длиной 80 км. Напряжение на шинах электростанции $U_1 = 116$ кВ. Схема замещения линии и

ее параметры представлены на рис. 2. Требуется определить мощность \underline{S}_1 , вырабатываемую электростанцией, и напряжение в конце линии \underline{U}_2 .

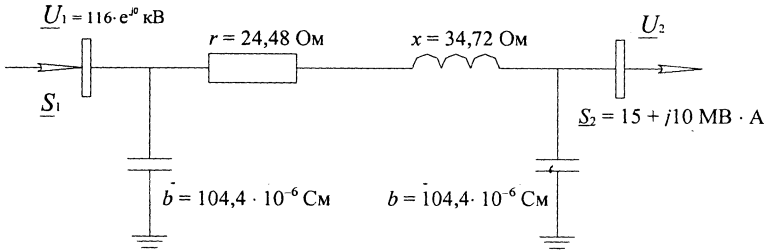


Рис. 2

Составляем систему уравнений в соответствии с методом узловых напряжений. Для этого необходимо определить значения элементов матриц \underline{Y} , \underline{U} , \underline{S} . Элементы матрицы \underline{Y} находятся следующим образом:

$$\underline{y}_{ik} = -\frac{1}{\underline{z}_{ik}} = -\frac{1}{r_{ik} + jx_{ik}}, \quad i \neq k; \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2;$$

$$\underline{y}_{ik} = \frac{1}{\underline{z}_{ik}} = \frac{1}{r_{ik} + jx_{ik}} + g_{ik} + jb_{ik}, \quad i = k; \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2.$$

Вычисляем:

$$\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21} = -\frac{1}{24,48 + j34,72} = -0,013564 + j0,019238 \text{ См};$$

$$\underline{y}_{11} = \underline{y}_{22} = \frac{1}{24,48 + j34,72} + j104,4 \cdot 10^{-6} = 0,013564 - j0,019134 \text{ См}.$$

Принимаем фазу напряжения в первом узле равной нулю. Получаем $\underline{U}_1 = 116 \text{ кВ}$. Так как задана мощность нагрузки (узел 2), имеем $\underline{S}_2 = -15 - j10 \text{ МВ} \cdot \text{А}$.

Выписываем математическую модель задачи:

$$\begin{cases} (-0,013564 + j0,019134) \cdot 19256 + (0,013564 - j0,019238) \cdot 116 \underline{\bar{U}}_2 = \underline{S}_1; \\ (0,013564 - j0,019238) \underline{U}_2 (-116) + (-0,013564 + j0,019134) \underline{U}_2 \underline{\bar{U}}_2 = -15 - j10. \end{cases}$$

Для дальнейших вычислений необходимо найти модули и аргументы известных комплексных величин:

$$y_{11} = y_{22} = 0,023454 \text{ См}; \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = 2,184916;$$

$$y_{12} = y_{21} = 0,023539 \text{ См}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = -0,954111;$$

$$S_2 = 18,027756 \text{ МВ} \cdot \text{А}; \quad \varphi_2 = -2,55359.$$

Проверяем выполнение условия (3) существования установившегося режима:

$$V = \frac{0,023539^2 \cdot 116^2}{2 \cdot 0,023454 \cdot 18,027756} = 8,816812;$$

$$2 \sin^2 \frac{\varphi_2 + \alpha_{22}}{2} = 2 \sin^2 \frac{-2,55359 + 2,184916}{2} = 1,933727.$$

Видно, что имеет место строгое неравенство (3), поэтому согласно теореме 2 система (2) имеет два решения:

$$\underline{U}_2^{(1)} = 109,861884 \cdot e^{-j0,02408} \text{ кВ}; \quad S_1^{(1)} = 15,611261 + j8,202104 \text{ МВ} \cdot \text{А};$$

$$\underline{U}_2^{(2)} = 6,996465 \cdot e^{-j0,347159} \text{ кВ}; \quad S_1^{(2)} = 177,48036 + j239,036084 \text{ МВ} \cdot \text{А}.$$

Для сравнения приводим результат, полученный в [4] итерационным методом:

$$\underline{U}_2 = 109,83 \cdot e^{-j0,02} \text{ кВ}; \quad \underline{S}_1 = 15,61 + j8,34 \text{ МВ} \cdot \text{А}.$$

Представляет интерес графическая интерпретация условий теорем 1 и 2. На рис. 3 и 4 представлены зависимости искомых параметров режима от величины модуля мощности в конце ЛЭП. Модуль мощности S_2 изменяется от 0 до предельного значения (6). Качественный состав нагрузки принят неизменным $\cos \varphi_2 = 0,8$.

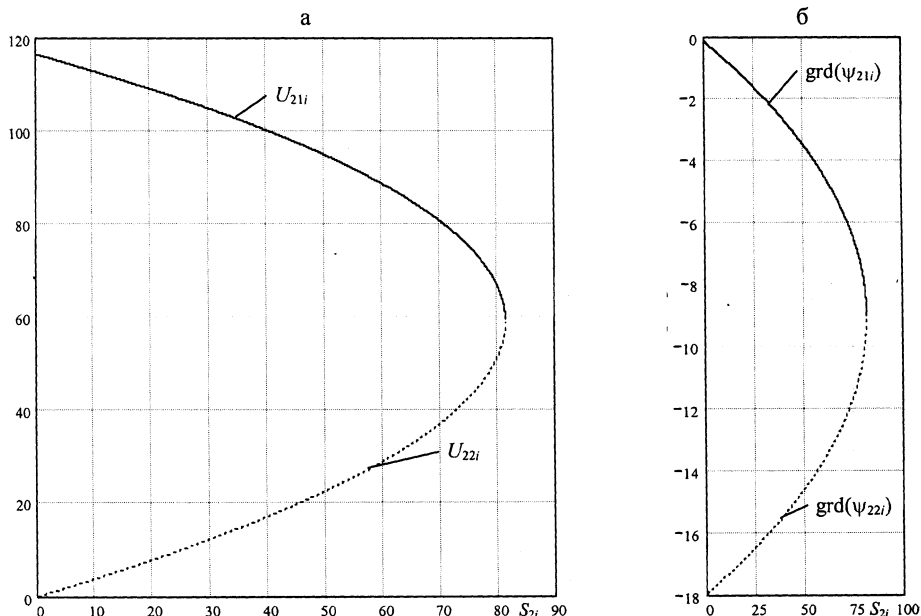


Рис. 3. Зависимость модуля (а) и фазы (б) напряжения в конце линии от величины нагрузки – статическая характеристика линии по напряжению

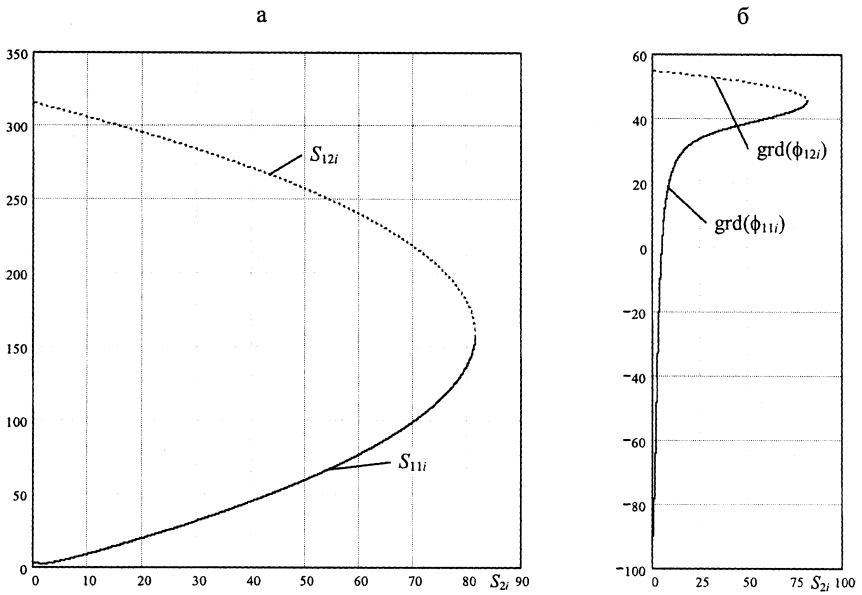


Рис. 4. Зависимость модуля (а) и угла (б) мощности, отдаваемой в линию, от величины нагрузки в конце линии

При экономических и оптимизационных расчетах часто требуется оценивать потери мощности в линии в зависимости от величины нагрузки (рис. 5).

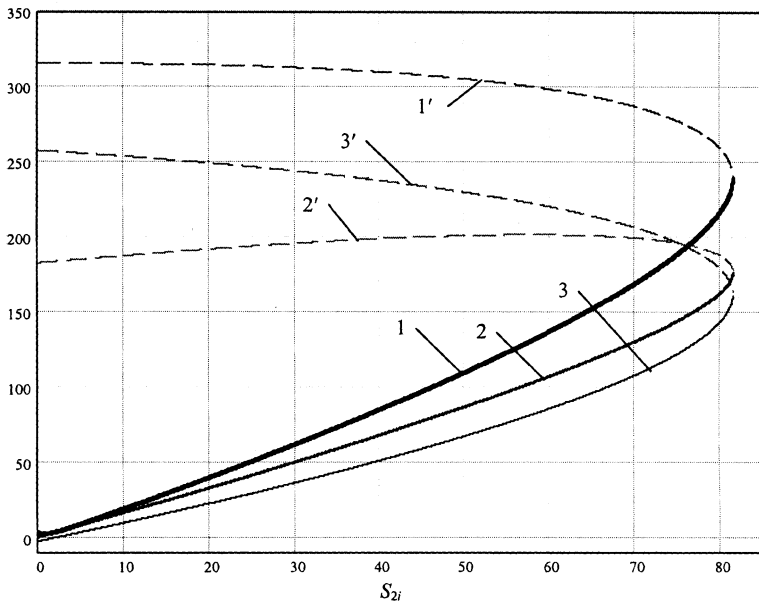


Рис. 5. 1 – ΔS_{1i} ; 1' – ΔS_{2i} ; 2 – ΔP_{1i} ; 2' – ΔP_{2i} ; 3 – ΔQ_{1i} ; 3' – $\Delta Q_{S_{2i}}$

В некоторых задачах узел 1 (рис. 1) является балансирующим по реактивной мощности, т. е. считаются известными активная мощность P_1 и модуль напряжения U_1 , а неизвестными – величины Q_1 и ψ_1 . Представление узла 2 остается прежним. При такой постановке задачи система (2) имеет

бесконечное множество значений аргументов комплексных напряжений ψ_1 и ψ_2 в узлах, но их разность δ принимает конечное число значений. В этом случае неизвестный модуль напряжения U_2 и δ находятся аналогичным образом, как и при решении системы (2) с неизвестными \underline{S}_1 и \underline{U}_2 .

В заключение отметим, что если принимать электрические параметры ЛЭП, не зависящими от параметров узлов, то имеется определенная погрешность в исходных данных (параметрах системы) [4]. Кроме того, погрешность вносится идеализированным представлением узлов, известные параметры которых также содержат ошибку. Отсюда следует, что даже точное решение будет не вполне адекватно реальным условиям. Тем не менее, отпадает необходимость в итерационном процессе, который является не всегда сходящимся и не дает определенного ответа о существовании решения.

ВЫВОДЫ

1. Найден критерий существования установившегося режима на тупиковой ЛЭП.
2. Получено точное решение системы уравнений узловых напряжений для тупиковой линии.
3. Указано предельное значение активной мощности нагрузки по условию существования установившегося режима электропередачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р о к у р о р о в Н. С. Общий метод решения системы нелинейных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы // *Электромеханика*. – 1988. – № 9. – С. 13–16.
2. Т о м к е в и ч А. П., Я н у ш к е в и ч О. А. О точном решении системы уравнений узловых напряжений в форме баланса мощности // *Вестник БГПА*. – 2002. – № 1. – С. 63–65.
3. И д е л ь ч и к В. И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
4. И д е л ь ч и к В. И. Электрические системы и сети: Учеб. для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
5. С т р а т а н И. П., Н е р е т и н В. И., С п и в а к В. Л. Расчет и анализ режимов электроэнергетических систем. – Кишинев: Штиинца, 1990. – 140 с.
6. Г у р с к и й С. К. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в электроэнергетике. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 368 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2

Поступила 28.01.2003