

## МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Докт. техн. наук, проф. **ГЕРАСИМОВИЧ А. Н.**, инж. **ГЕРАСИМОВИЧ Д. А.**,  
канд. техн. наук **МИШКИНА М. А.**,  
инженеры **ЕЖЕНКОВ Г. Г.**, **КЛИМОВИЧ Ю. А.**

*Белорусский национальный технический университет,  
Пинские электрические сети,  
РУП «Брестэнерго»*

Надежная работа контактных соединений различных типов определяется, в первую очередь, их динамической и термической стойкостью в режимах коротких замыканий. Расчет стойкости является одной из важнейших задач проектирования и разработки новых конструкций контактов. Ее решение требует исследования распределения параметров переходного электромагнитного поля в контактных узлах при коротких замыканиях. Следует отметить, что, несмотря на массовое использование контактов в различных электроустановках, теория электромагнитных процессов в них при протекании переменных токов начала интенсивно развиваться лишь в последние годы. При этом разработаны основы и алгоритмы расчета параметров поля нормального режима в отдельных конструкциях. Расчеты же самих переходных электромагнитных процессов в проводниках контактов практически отсутствуют, так как они намного сложнее расчетов поля установившегося режима.

Настоящая работа посвящена разработке аналитического метода расчета переходного электромагнитного поля в проводниках плоского контактного соединения при протекании в них токов короткого замыкания.

**Математическая модель переходных электромагнитных процессов.** Основы расчета переходного электромагнитного поля в проводниках контактного узла рассмотрим на примере многослойной структуры, заимствованной из [1, 2]. Структура состоит из собственно контактного узла (область 2) и прилегающих к нему контактирующих проводников (области 1 и 3). Проводники слоев обладают анизотропными электромагнитными свойствами [1]. При решении задачи исходим из допущения, что в областях 1 и 3 параметры поля зависят только от переменных  $z$  и  $t$ , а в области 2 – от  $x$ ,  $z$  и  $t$ . Проникающее в такую структуру электромагнитное поле при протекании по ней тока можно оценивать плоской электромагнитной волной с неизменными в направлении координаты  $y$  параметрами. Задавая в такой структуре для каждой области количество слоев, их размеры и свойства, можно получить различные конструкции плоских контактных соединений [1].

Ниже рассматривается расчет параметров переходного электромагнитного поля непосредственно в контактном узле, т. е. в области 2 рассматриваемой структуры. Электромагнитное состояние слоев в любой момент времени удовлетворяет уравнениям Максвелла [4]:

электромагнитной связи

$$\operatorname{rot} \vec{H}_i(x, z, t) = \vec{\sigma}_i(x, z, t) (a); \quad \operatorname{rot} \vec{E}_i(x, z, t) = -\frac{\partial \vec{B}_i(x, z, t)}{\partial t} (б); \quad (1)$$

непрерывности поля

$$\operatorname{div} \vec{B}_i(x, z, t) = 0 \quad (\text{а}); \quad \operatorname{div} \vec{\sigma}_i(x, z, t) = 0 \quad (\text{б}); \quad (2)$$

уравнениям свойств слоев и закону Ома

$$\vec{B}_i(x, z, t) = \mu_i \vec{H}_i(x, z, t) \quad (\text{а}); \quad \vec{\sigma}_i(x, z, t) = \gamma_i \vec{E}_i(x, z, t) \quad (\text{б}), \quad (3)$$

где  $\vec{H}_i(x, z, t)$  и  $\vec{E}_i(x, z, t)$  – векторы напряженности магнитного и электрического полей соответственно;  $\vec{B}_i(x, z, t)$  – то же магнитной индукции;  $\vec{\sigma}_i(x, z, t)$  – то же плотности электрического тока проводимости;  $i = 1, 2, \dots, n$  – номер слоя ( $n$  – общее число слоев контактного узла в соответствии с рис. 1).

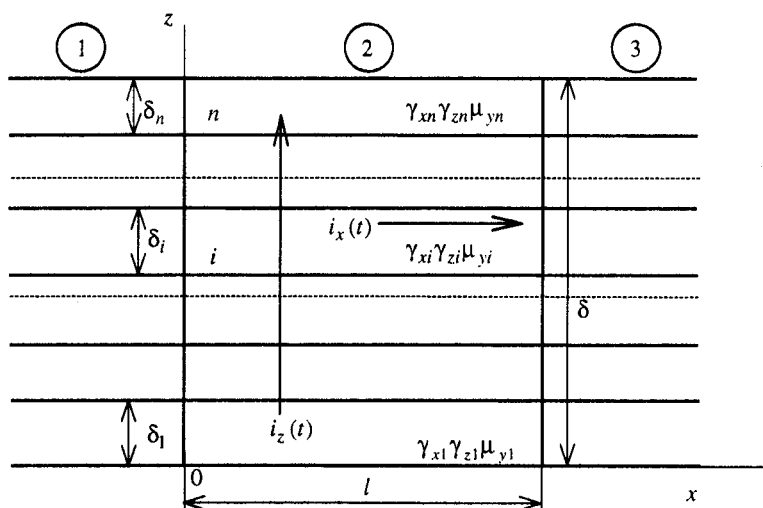


Рис. 1. Многослойная структура плоского контактного соединения

Электрическая проводимость  $\gamma_i$  и магнитная проницаемость  $\mu_i$  в (3) являются компонентами тензорных величин.

Уравнения (1)–(3) с учетом отмеченных допущений сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка относительно проекций векторов поля, которое для  $i$ -го слоя с учетом анизотропии свойств проводников имеет вид [1, 4]

$$\gamma_{xi} \frac{\partial^2 f_i(x, z, t)}{\partial x^2} + \gamma_{zi} \frac{\partial^2 f_i(x, z, t)}{\partial z^2} - \gamma_{xi} \gamma_{zi} \mu_{yi} \frac{\partial f_i(x, z, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

где  $f_i(x, z, t)$  в зависимости от исследуемой характеристики поля может принимать значения проекций векторов  $\vec{H}_i(x, z, t)$ ,  $\vec{E}_i(x, z, t)$  или  $\vec{\sigma}_i(x, z, t)$ .

Уравнение (4) дополняется граничными и начальными условиями. Определение граничных условий (значения величин токов и их распре-

ление на краях контактного узла и границах слоев) подробно рассмотрено в [1, 3]. Начальные условия рассматриваются ниже при расчете свободных составляющих поля.

Решение (4) может быть осуществлено или с применением операционного исчисления и интеграла Дюамеля, или классическим методом. Применение последнего для расчета переходного электромагнитного поля уединенного проводника прямоугольного профиля приведено в [5, 6]. Его также с успехом можно применить для исследования переходных электромагнитных процессов в многослойных проводниковых структурах. Решение (4) классическим методом представляется суммой составляющих вынужденного (установившегося) и свободного режимов, что позволяет использовать в исследованиях ранее разработанные методы и результаты анализа поля в контактных узлах и многослойных проводниках [1–3]. Искомая функция  $f_i(x, z, t)$  в (4) представляется в виде

$$f_i(x, z, t) = f_i^{\text{вын}}(x, z, t) + f_i^{\text{св}}(x, z, t), \quad (5)$$

где  $f_i^{\text{вын}}(x, z, t)$  – вынужденная составляющая решения (4);  $f_i^{\text{св}}(x, z, t)$  – свободная составляющая.

Определение составляющих (5) рассмотрим для случая переходного электромагнитного поля, обусловленного протеканием в контактном узле тока внезапного короткого замыкания.

**Расчет параметров электромагнитного поля вынужденного режима.** При внезапном коротком замыкании в контактных узлах электроустановки на протяжении переходного процесса протекает ток, содержащий в общем случае составляющие: периодическую установившегося режима, аperiodическую и периодическую, затухающую по экспоненциальному закону. Полный ток переходного режима в общем случае можно представить суммой  $m$  составляющих [6]

$$i_{\Sigma}(t) = \sum_{j=1}^m I_{mj} e^{-t/T_j} \sin(\omega_j t + \varphi_{0j}), \quad (6)$$

где  $I_{mj}$ ,  $T_j$ ,  $\omega_j$ ,  $\varphi_{0j}$  – амплитуда, постоянная времени затухания, частота и начальная фаза  $j$ -й составляющей тока.

При решении уравнения (4) для вынужденного режима формально принимается, что полный ток протекает в интервале времени  $(-\infty, +\infty)$ . В этом случае каждая составляющая (6) является стационарным током и вызывает в контактном соединении появление вынужденных параметров электромагнитного поля, которые будут изменяться во времени по тому же закону, что и соответствующая составляющая тока.

Для получения вынужденных решений используем представление Френеля для искомых величин и понятие «комплексной частоты» [5, 6]. Тогда мгновенные значения параметров поля  $i$ -го слоя, обусловленные  $j$ -й составляющей тока, можно представить как мнимую часть показательной функции

$$f_{ij}^{\text{вын}}(x, z, t) = \text{Im} \left( \dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z) e^{j\dot{\omega}_j t} \right), \quad (7)$$

где  $\dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z) = f_{mij}^{\text{вын}}(x, z) e^{j\varphi_j t}$  – комплексная амплитуда искомой функции;  $\dot{\omega}_j = \omega_j + j/T_j$  – комплексная частота.

Для периодических затухающих функций частота имеет вещественную  $\omega_j$  и мнимую  $1/T_j$  части, для периодических она вещественная  $\dot{\omega}_j = \omega_j$ , а для экспоненциальных функций – мнимая  $\dot{\omega}_j = j/T_j$ . При подстановке выражения (7) в (4) последнее превращается в дифференциальное уравнение в частных производных относительно комплексных амплитуд  $\dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z)$ , т. е.

$$\gamma_{xi} \frac{\partial^2 \dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z)}{\partial x^2} + \gamma_{zi} \frac{\partial^2 \dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z)}{\partial z^2} - j\dot{\omega}_j \gamma_{xi} \gamma_{zi} \mu_{yi} \dot{f}_{mij}^{\text{вын}}(x, z) = 0. \quad (8)$$

Решение (8) и расчет параметров поля для случая протекания по контактному узлу периодического тока с частотой  $\dot{\omega}_j = \omega_j$  подробно рассмотрены в [1, 2]. Для других составляющих тока алгоритм решения (8) остается прежним при условии замены  $\omega_j$  на  $\dot{\omega}_j$ . Применение данного алгоритма не вызывает трудностей, и в данной работе он не рассматривается. Полные величины параметров поля вынужденного режима представляются суммой решений для  $j$ -х составляющих тока. Таким образом, расчет вынужденного электромагнитного состояния многослойной структуры контактного соединения при коротком замыкании аналогичен расчету нормального режима и при его выполнении можно с успехом применять полученные в [1–3] результаты.

**Расчет свободных составляющих параметров поля.** Переход электромагнитного состояния контактного соединения из одного установившегося режима в другой сопровождается появлением в каждом слое свободных составляющих поля. Рассматриваемая структура является линейной, и свободным составляющим характерен экспоненциальный закон изменения во времени. Причем, показатели степени экспонент должны быть отрицательными в силу диссипативности системы. Для расчета параметров свободных составляющих поля используется метод, предложенный для расчета переходного поля уединенного проводника [6]. Первоначально находятся начальные значения свободных составляющих поля в сечении контактного узла при  $t = 0$ , т. е.  $f^{\text{св}}(x, z, 0)$ . Так как вынужденные решения уравнения (4) до нарушения режима и после его изменения известны, начальные значения свободных составляющих будут

$$f^{\text{св}}(x, z, 0) = f(x, z, 0) - f^{\text{вын}}(x, z, 0), \quad (9)$$

где  $f(x, z, 0)$  – мгновенные значения параметров поля предыдущего режима при  $t = 0$ ;  $f^{\text{вын}}(x, z, 0)$  – то же вынужденного режима от всех  $m$  составляющих тока (6) при  $t = 0$ .

Представим функцию  $f^{\text{св}}(x, z, 0)$  двойным рядом Фурье по косинусам, дополнив ее до четной в соответствии с [6]:

$$f^{\text{св}}(x, z, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{m \text{ св}}^{k,l} \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x), \quad (10)$$

где  $\omega_z = \pi/\delta$ ,  $\omega_x = \pi/l$  – пространственные частоты по соответствующим координатам  $z$  и  $x$  ( $\delta$  и  $l$  – размеры контактного узла в соответствии с рис. 1);  $f_{m \text{ св}}^{k,l}$  – амплитуды  $(k, l)$ -х пространственных гармоник свободных составляющих, равные

$$f_{m \text{ св}}^{k,l} = \frac{4}{l\delta} \int_0^l \int_0^\delta f^{\text{св}}(x, z, 0) \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x) dz dx. \quad (11)$$

При  $k = 0$  или  $l = 0$  величины  $f_{m \text{ св}}^{k,l}$  уменьшаются в 2 раза, а при  $k = 0$  и  $l = 0$  – в 4 раза.

Использование (10) позволяет искать решение для свободных составляющих  $i$ -го слоя в виде [6]

$$f_i^{\text{св}}(x, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{mi^* \text{ св}}^{k,l}(t) \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x) = \quad (12)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{m \text{ св}}^{k,l} \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x) e^{p_i^{k,l} t}.$$

Дифференциальное уравнение (4) относительно свободных составляющих с учетом (12) преобразуется в совокупность обыкновенных алгебраических уравнений относительно показателей степеней  $p_i^{k,l}$ . Их решение позволяет непосредственно определять показатели для составляющих  $i$ -го слоя

$$p_i^{k,l} = - \frac{\gamma_{xi} (k\omega_x)^2 + \gamma_{zi} (l\omega_z)^2}{\gamma_{xi} \gamma_{zi} \mu_{yi}}. \quad (13)$$

Таким образом, по выражениям (9)–(13) находятся решения исходных уравнений для свободных составляющих каждого  $i$ -го слоя. Однако в целом для многослойной структуры контактного узла они будут только одним из частных решений системы (1)–(3), так как различные показатели степени слоев предполагают различную величину параметров поля

в одинаковые моменты времени на границах раздела слоев. Для многослойной среды это может приводить к нарушению условий непрерывности поля. Отмеченное иллюстрирует рис. 2, на котором приведено изменение во времени пространственных амплитуд параметров поля свободного режима в слоях с различными электромагнитными свойствами.

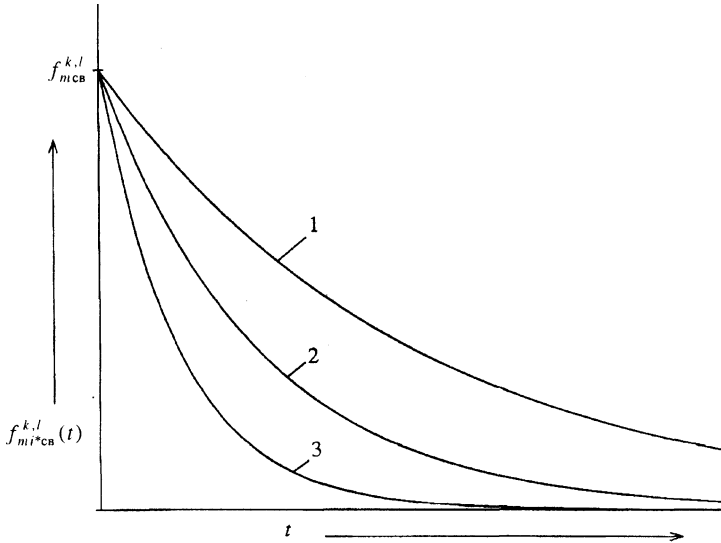


Рис. 2. Изменение свободных составляющих в слоях контактного соединения:

$$1 - f_{мсв}^{k,l} e^{p_i^{k,l} t}; \quad 2 - f_{мсв}^{k,l} e^{p_i^{k,l} t}; \quad 3 - f_{мсв}^{k,l} e^{p_{i+1}^{k,l} t}$$

При исследовании переходных электромагнитных процессов в контактном узле следует исходить из того, что в нем протекают перпендикулярные  $i_z(t)$  и параллельные  $i_x(t)$  слоям многослойной структуры составляющие тока (рис. 1). Для первых токов требуется выполнение условия равенства нормальной составляющей их плотности на границах раздела слоев, а для вторых – тангенциальных составляющих напряженности электрического поля. Первоначально рассмотрим расчет свободных параметров поля для многослойной среды в случае перпендикулярных токов. Уравнение (4) при этом рассматривается относительно составляющей плотности тока  $\sigma_z(x, z, t)$ , как в [2], а функция  $f^{cb}(x, z, t)$  принимает значения  $\sigma_z^{cb}(x, z, t)$ . Так как на границах раздела слоев для произвольного момента времени  $t$  условие непрерывности для пространственных амплитуд плотности тока не выполняется, т. е.  $\sigma_{mzi*cb}^{k,l}(t) \neq \sigma_{mz(i+1)*cb}^{k,l}(t)$ , решение (4) относительно свободных составляющих  $i$ -го слоя следует искать, подобно тому, как это делалось для нормального режима [2]:

$$\sigma_{mzi*cb}^{k,l}(t) = \sigma_{mzi*cb}^{k,l}(t) + \Delta\sigma_{mzi*cb}^{k,l}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где  $\sigma_{mzi^*cb}^{k,l}(t) = \sigma_{mzcb}^{k,l} e^{p_i^{k,l}t}$  – уже рассмотренные частные решения (4) (выражение (12));  $\Delta\sigma_{mzi^*cb}^{k,l}(t)$  – величины невязок на границах раздела слоев.

При этом должно выполняться равенство

$$\sigma_{mzi^*cb}^{k,l}(t) = \sigma_{mz(i+1)cb}^{k,l}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

Точное определение величин невязок на границах слоев, их законов изменения по пространственным координатам и во времени становится трудно разрешимой задачей, так как в данном случае трудно подобрать решение (4), которое бы одновременно удовлетворяло условию (15). Поэтому для определения величин  $\sigma_{mzi^*cb}^{k,l}(t)$  используем приближенное решение, основанное на физической аналогии протекания тока в цепи с последовательно соединенными источниками, т. е. найдем эквивалентные свободные токи. Получаемые таким образом выражения будут удовлетворять условию непрерывности и приближенно удовлетворять уравнению (4). Свободные токи рассматриваются как токи от источников, величины ЭДС которых изменяются по экспоненциальному закону с соответствующими постоянными времени. Причем, источники каждого слоя включены последовательно в электрическую цепь и величины их ЭДС будут  $E_{mzi^*cb}^{k,l}(t) = \gamma_{zi}^{-1} \delta_i \sigma_{mzcb}^{k,l} e^{p_i^{k,l}t}$ , а внутренние сопротивления –  $\gamma_{zi}^{-1} \delta_i$  (сопротивления проводников слоев). Отмеченное позволяет определить изменение во времени эквивалентной пространственной амплитуды ( $k, l$ )-й гармоники свободного тока по выражению

$$\sigma_{mzcb}^{k,l}(t) = \sigma_{mzcb}^{k,l} \left( \sum_{i=1}^n \gamma_{zi}^{-1} \delta_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma_{zi}^{-1} \delta_i e^{p_i^{k,l}t}. \quad (16)$$

Мгновенные значения плотности тока, протекающего в перпендикулярном к слоям контактного узла направлении, по аналогии с (11) будут

$$\sigma_z^{cb}(x, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{mzcb}^{k,l}(t) \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x). \quad (17)$$

В приведенных выражениях коэффициенты двойного ряда  $\sigma_{mzcb}^{k,l}$  вычисляются в соответствии с (12). Выражение (17) в отличие от (12) учитывает совместное влияние слоев на закон изменения во времени свободных составляющих тока.

При расчете распределения тока  $i_x(t)$ , протекающего параллельно границам раздела слоев, уравнение (4) разрешается относительно напря-

женности электрического поля  $E_x(x, z, t)$  [2] и определяются величины  $E_x^{\text{ввн}}(x, z, t)$  и  $E_x^{\text{св}}(x, z, 0)$  в сечении контактного узла. После представления начальных значений  $E_x^{\text{св}}(x, z, 0)$  двойным рядом Фурье в соответствии с (12) и решения (4) амплитуда  $(k, l)$ -й пространственной гармоники свободной составляющей напряженности электрического поля для  $i$ -го слоя с учетом невязки решения будет

$$E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t) = E_{mxi^*\text{св}}^{k,l}(t) + \Delta E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

где  $E_{mxi^*\text{св}}^{k,l}(t) = E_{mx\text{св}}^{k,l} e^{p_i^{k,l} t}$  – найденные частные решения (4);  $\Delta E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t)$  – величины невязок на границах раздела слоев.

Вычисление невязок  $\Delta E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t)$  связано с удовлетворением условия равенства тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на границах раздела слоев. Приближенное решение (4) относительно  $E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t)$ , удовлетворяющее указанному равенству, можно получить, если рассматривать каждый параллельный слой как источник с ЭДС  $E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t) = l E_{mx\text{св}}^{k,l} e^{p_i^{k,l} t}$  и внутренним сопротивлением  $(\gamma_{xi} \delta_i)^{-1} l$ . Всему многослойному проводнику будет присуща эквивалентная ЭДС, а составляющая  $E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t)$  будет для всех слоев одинаковой и равной

$$E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t) = E_{mx\text{св}}^{k,l} \left( \sum_{i=1}^n \gamma_{xi} \delta_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma_{xi} \delta_i e^{p_i^{k,l} t}. \quad (19)$$

Свободная составляющая плотности тока в каждом  $i$ -м слое связана с напряженностью электрического поля законом Ома

$$\sigma_{xi}^{\text{св}}(x, z, t) = \gamma_{xi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_{mxi\text{св}}^{k,l}(t) \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x). \quad (20)$$

Аналогично получают выражения для расчета свободных составляющих напряженности магнитного поля  $H_y^{\text{св}}(x, z, t)$ :

$$H_{my\text{св}}^{k,l}(t) = H_{my\text{св}}^{k,l} \left( \sum_{i=1}^n \mu_{yi} \delta_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_{yi} \delta_i e^{p_i^{k,l} t}; \quad (21)$$

$$H_y^{\text{св}}(x, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} H_{my\text{св}}^{k,l}(t) \cos(l\omega_z z) \cos(k\omega_x x). \quad (22)$$



Рассмотренный алгоритм расчета параметров поля вынужденного и свободного режимов позволяет проводить анализ переходных электромагнитных процессов в проводниках многослойных структур плоских контактных соединений. Его применение для расчета поля в отдельных конструкциях контактов при протекании токов короткого замыкания будет приведен в следующей статье.

## ВЫВОД

На основании решения уравнений электромагнитного поля классическим методом и использования понятия «комплексной частоты» при представлении составляющих поля показательными функциями (представление Френеля) разработан алгоритм расчета переходных электромагнитных процессов в проводниках слоев плоских контактных соединений в режимах коротких замыканий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович А. Н., Герасимович Д. А., Яковлев Г. В. Обобщенная модель электромагнитных процессов в плоских многослойных контактных соединениях // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2001. – № 3. – С. 37–47.
2. Электромагнитные процессы в слоистых проводниках и структурах контактных соединений / А. Н. Герасимович, Д. А. Герасимович, Г. В. Яковлев и др. // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2001. – № 2. – С. 11–23.
3. Основы расчета токораспределения в плоских контактных соединениях / А. Н. Герасимович, Д. А. Герасимович, Г. В. Яковлев и др. // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2000. – № 3. – С. 12–24.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
5. Герасимович Д. А., Носайрат Фаиз, Мелешко И. Н. Токораспределение в шине прямоугольного сечения при затухающем законе изменения силы тока // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2000. – № 1. – № 27–35.
6. Герасимович Д. А., Носайрат Фаиз. Электромагнитные характеристики шины прямоугольного профиля в переходных режимах // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2000. – № 2. – С. 15–24.

Представлена кафедрой  
электрических станций

Поступила 1.07.2002