УДК 621.311

УЧЕТ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ ЭНЕРГО- И ГАЗОСНАБЖЕНИЯ

Докт. техн. наук, проф. АНИЩЕНКО В. А., асп. ГОРОШ А. В.

Белорусский национальный технический университет

Сложность измерительной аппаратуры резко возрастает с повышением точности производимых измерений. Поэтому наряду с совершенствованием технической базы средств измерений значительный интерес представляют расчетные методы уточнения результатов измерений, реализация которых возможна в информационно-вычислительных комплексах диспетчерских пунктов систем электро-, тепло- и газоснабжения промышленных и иных потребителей. Основой для такого подхода является информационная избыточность, обеспечиваемая результатами непосредственных измерений и учетом уравнений функциональных связей между контролируемыми переменными.

Оптимальная коррекция показаний измерительных приборов путем вычислений эквивалентна замене установленной измерительной аппаратуры на более точную. Эта задача решается методами статистического оценивания, применяемыми в самых разных областях техники, в том числе в расчетах режимов систем энерго- и газоснабжения. Процедура оценивания позволяет получать эффективные и оптимальные оценки измеряемых переменных, дисперсии которых меньше априорных дисперсий погрешностей результатов измерений.

Однако практическая ценность указанных методов снижается из-за несоответствия теоретической модели реальным условиям эксплуатации измерительной аппаратуры. В связи с этим актуальны задачи определения максимально допустимых границ отклонений от теоретической модели оценивания, гарантирующих эффективность и точность оценок, и разработки адаптивных методов оценивания, в которых осуществляемая оперативная автоподстройка параметров модели на основе накапливаемой в процессе работы информации о результатах измерений и оценках [1–3].

Один из основных постулатов статистического оценивания предполагает отсутствие систематических погрешностей измерений. В [4] был проведен анализ их влияния на точность оценивания и предложен способ определения допустимых граничных условий применимости оценивания методом наименьших взвешенных квадратов для случая гауссовского распределения случайных погрешностей измерений. Способ основан на контроле остатков оценивания переменных и позволяет блокировать работу алгоритма оценивания при больших погрешностях, когда точность оценок ниже точности измерений.

Дальнейшие исследования [5] были связаны с определением интервала осреднения, на котором следует рассчитывать математические ожидания остатков оценивания – для нелинейных уравнений связи и математические ожидания невязок уравнений – для линейных уравнений. Оптимальный интервал осреднения определялся по критерию минимума погрешности расчета математического ожидания, обусловленной ограниченностью числа измерений на интервале осреднения, и погрешности из-за запаздывания получения информации об измерении математического ожидания.

Для получения оптимальных оценок в случае обнаружения больших систематических погрешностей измерений необходима локализация последних с последующей коррекцией недостоверных результатов измерений. Систему уравнений связи представим в виде [6, 7]

$$\gamma_i(x_1, x_2, ..., x_k) = 0, \quad i = 1, 2, ..., r, \tag{1}$$

где $\gamma_i(x_1, x_2, ..., x_k)$ – известная (в общем случае нелинейная) функция неизвестных переменных $x_1, x_2, ..., x_k$; k – число переменных; r – то же уравнений связи (как зависимых, так и независимых).

После линеаризации система (1) принимает вид

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jk}x_k = 0, \quad j = 1, 2, ..., r, \tag{2}$$

где $a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jk}$ – коэффициенты, имеющие для физически однородных переменных значения $a_{ji} = \pm 1$, а при отсутствии i-й переменной в j-м уравнении $a_{ji} = 0$.

Условие появления недопустимо больших систематических погрешностей как минимум одного из возможных неравенств

$$|M(\delta_j)| > M_{\text{доп}}(\delta_j), \quad j = 1, 2, ..., r, \tag{3}$$

где $M(\delta_j)$ – математическое ожидание невязки j-го уравнения связи, определяемое на оптимальном интервале осреднения подстановкой в систему (2) результатов измерений переменных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$; $M_{\text{доп}}(\delta_j)$ – допустимое значение математического ожидания, гарантирующее оптимальность оценок и определяемое по формуле

$$M_{\text{доп}}(\delta_j) = \rho\sqrt{\sum_i^k \sigma_i^2 a_{ji}^2}, \quad j = 1, 2, ..., r, \tag{4}$$

где σ_i – среднеквадратичная случайная погрешность измерений i-й переменной, соответствующая расчетной точности измерительного прибора; ρ – квантиль, характеризующий уровень значимости учитываемой вероятности распределения случайной погрешности невязки уравнения связи.

В [7] было предложено локализовывать недопустимо большие, согласно условию (3), систематические погрешности измерений исходя из предположения, что наиболее вероятной причиной их появления является систематическая погрешность одного, реже – двух и т. д. переменных. Участие в формировании систематической погрешности невязки уравнения связи измерений всех переменных полагалось маловероятным и практически не рассматривалось. В такой постановке решение задачи сводилось к ранжированию подозреваемых источников больших систематических погрешностей по мере убывания вероятности их появления.

Однако для большей точности статистического оценивания целесообразно расширить рамки локализации и производить коррекцию результатов измерений и в том случае, когда в соответствии с условием (3) отсутствуют недопустимо большие систематические погрешности невязок всех уравнений связи. В такой постановке более обоснованным выглядит предположение о практической равновероятности участия всех измеряемых переменных в формировании систематических погрешностей. Тогда можно записать равенство

$$M(\delta_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ji} M(\bar{x}_i), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{5}$$

где $M(\bar{x}_i)$ – математическое ожидание результатов измерений i-й переменной, определяемое на интервале осреднения T,

$$M(\bar{x}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \bar{x}_i(t); \tag{6}$$

$n = \dfrac{T}{\Delta t}$ – число циклов измерений на интервале осреднения T с временной дискретизацией Δt.

Если систематические погрешности измерений рассматривать как случайные величины, подчиняющиеся гауссовскому закону распределения, локализация может производиться методом наименьших квадратов по критерию

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{M}(x_i) - M(\bar{x}_i)\right]^2 + \sum_{j=1}^{r^*} \lambda_j \left[\sum_{i=1}^{k} a_{ji} \hat{M}(x_i)\right] = \min, \tag{7}$$

где $\hat{M}(x_i)$ – оптимальная оценка математического ожидания i-й переменной; λ_j – неопределенный множитель Лагранжа; r^* – число независимых уравнений связи.

Разности оценок математических ожиданий переменных, удовлетворяющих критерию (7), и математических ожиданий результатов измерений, рассчитанных по формуле (6) на фиксированном интервале осреднения T, принимаются за систематические погрешности измерений переменных

$$\Delta_i^{\text{сист}} = \hat{M}(x_i) - M(\bar{x}_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{8}$$

Таким образом, при дальнейшем оценивании переменных в каждый момент времени следует рассматривать скорректированные с учетом систематических погрешностей результаты их измерений

$$\overline{x}_i^* = \overline{x}_i + \Delta_i^{\text{сист}}. \qquad (9)$$

В качестве иллюстративного примера рассмотрим фрагмент схемы электроснабжения (рис. 1), в котором потоки активной мощности измеряются ваттметрами одного класса точности $\alpha_i = 0{,}02$ о. е. с диапазонами шкал: $A_1 = 100$ МВт; $A_2 = A_3 = 50$ МВт; $A_4 = A_5 = 25$ МВт.

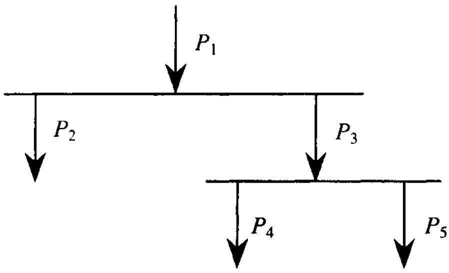

Рис. 1. Схема участка электроснабжения потребителя

Среднеквадратичные случайные погрешности, соответствующие гауссовскому закону распределения и паспортным данным приборов, определенные по известной формуле [6]:

$$\sigma_i = \frac{1}{3}\alpha_i A_i, \qquad (10)$$

следующие: $\sigma_1 = 0{,}667$ МВт; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0{,}333$ МВт; $\sigma_4 = \sigma_5 = 0{,}167$ МВт.

Зафиксированные показания приборов на заданном интервале осреднения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Моменты времени	Результаты измерений				
	$\overline{P}_1$, МВт	$\overline{P}_2$, МВт	$\overline{P}_3$, МВт	$\overline{P}_4$, МВт	$\overline{P}_5$, МВт
t_1	85,2	46,1	47,2	22,7	23,8
t_2	89,6	47,2	40,3	21,5	23,5
t_3	94,6	45,6	38,6	17,6	22,2
t_4	81,2	41,6	38,4	16,4	24,1
t_5	95,5	44,9	43,2	22,3	22,1
t_6	96,4	42,6	39,1	22,4	19,4
t_7	80,5	47,5	40,8	23	21,2
t_8	86,2	47	42,3	21,2	21,6
t_9	90,6	44,9	42,1	20,5	24
t_{10}	93,2	44,6	48	18,4	23,1
$M(\overline{P}_i)$, МВт	89,3	45,2	42,0	20,6	22,5

Составляем уравнения связи:

$$\begin{cases} M(\delta_1)=a_{11}M(\overline{P}_1)+a_{12}M(\overline{P}_2)+a_{13}M(\overline{P}_3)+a_{14}M(\overline{P}_4)+a_{15}M(\overline{P}_5); \\ M(\delta_2)=a_{21}M(\overline{P}_1)+a_{22}M(\overline{P}_2)+a_{23}M(\overline{P}_3)+a_{24}M(\overline{P}_4)+a_{25}M(\overline{P}_5); \\ M(\delta_3)=a_{31}M(\overline{P}_1)+a_{32}M(\overline{P}_2)+a_{33}M(\overline{P}_3)+a_{34}M(\overline{P}_4)+a_{35}M(\overline{P}_5). \end{cases} \quad (11)$$

Математические ожидания невязок уравнений:

$$\begin{cases} M(\delta_1)=1\cdot 89{,}3+(-1)\cdot 45{,}2+(-1)\cdot 42{,}0+0\cdot 20{,}6+0\cdot 22{,}5=2{,}1\ \text{МВт}; \\ M(\delta_2)=0\cdot 89{,}3+0\cdot 45{,}2+1\cdot 42{,}0+(-1)\cdot 20{,}6+(-1)\cdot 22{,}5=-1{,}1\ \text{МВт}; \\ M(\delta_3)=1\cdot 89{,}3+(-1)\cdot 45{,}2+0\cdot 42{,}0+(-1)\cdot 20{,}6+(-1)\cdot 22{,}5=1{,}0\ \text{МВт}. \end{cases} \quad (12)$$

Далее определяем допустимые невязки уравнений связи:

$$M_{\text{доп}}(\delta_1)=\rho\sqrt{\sigma_1^2a_{11}^2+\sigma_2^2a_{12}^2+\sigma_3^2a_{13}^2+\sigma_4^2a_{14}^2+\sigma_5^2a_{15}^2}=$$

$$=3\sqrt{0{,}667^2\cdot 1^2+0{,}333^2\cdot(-1)^2+0{,}333\cdot(-1)^2+0{,}167^2\cdot 0^2+0{,}167^2\cdot 0^2}=2{,}449\ \text{МВт};$$

$$M_{\text{доп}}(\delta_2)=\rho\sqrt{\sigma_1^2a_{21}^2+\sigma_2^2a_{22}^2+\sigma_3^2a_{23}^2+\sigma_4^2a_{24}^2+\sigma_5^2a_{25}^2}= \quad (13)$$

$$=3\sqrt{0{,}667^2\cdot 0^2+0{,}333^2\cdot 0^2+0{,}333\cdot 1^2+0{,}167^2\cdot(-1)^2+0{,}167^2\cdot(-1)^2}=1{,}225\ \text{МВт};$$

$$M_{\text{доп}}(\delta_3)=\rho\sqrt{\sigma_1^2a_{31}^2+\sigma_2^2a_{32}^2+\sigma_3^2a_{33}^2+\sigma_4^2a_{34}^2+\sigma_5^2a_{35}^2}=$$

$$=3\sqrt{0{,}667^2\cdot 1^2+0{,}333^2\cdot(-1)^2+0{,}333\cdot 0^2+0{,}167^2\cdot(-1)^2+0{,}167^2\cdot(-1)^2}=2{,}449\ \text{МВт}.$$

Согласно условию (3), в результатах измерений отсутствуют недопустимо большие систематические погрешности.

Определяем оптимальные оценки математических ожиданий по критерию (7)

$$\Phi=\left[\hat{M}(P_1)-89{,}3\right]^2+\left[\hat{M}(P_2)-45{,}2\right]^2+\left[\hat{M}(P_3)-42{,}0\right]^2+\left[\hat{M}(P_4)-20{,}6\right]^2+$$

$$+\left[\hat{M}(P_5)-22{,}5\right]^2+\lambda_1\left(\hat{M}(P_1)-\hat{M}(P_2)-\hat{M}(P_3)\right)+ \quad (14)$$

$$+\lambda_2\left(\hat{M}(P_3)-\hat{M}(P_4)-\hat{M}(P_5)\right)=\min.$$

Возьмем частные производные функции Φ по переменным $\hat{M}(P_1)$, $\hat{M}(P_2)$, $\hat{M}(P_3)$, $\hat{M}(P_4)$, $\hat{M}(P_5)$, λ_1, λ_2, приравняем их к нулю и получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
2\cdot\left[\hat{M}(P_1)-89{,}3\right]+\lambda_1=0;\\
2\cdot\left[\hat{M}(P_2)-45{,}2\right]-\lambda_1=0;\\
2\cdot\left[\hat{M}(P_3)-42{,}0\right]-\lambda_1+\lambda_2=0;\\
2\cdot\left[\hat{M}(P_4)-20{,}6\right]-\lambda_2=0;\\
2\cdot\left[\hat{M}(P_5)-22{,}5\right]-\lambda_2=0;\\
\hat{M}(P_3)-\hat{M}(P_4)-\hat{M}(P_5)=0;\\
\hat{M}(P_1)-\hat{M}(P_2)-\hat{M}(P_3)=0.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Решая систему (15), получим значения оптимальных оценок и по формуле (8) определим систематические погрешности измерений (табл. 2).

Таблица 2

	1	2	3	4	5
$M(\overline{P}_i)$, МВт	89,3	45,2	42,0	20,6	22,5
$\hat{M}(P_i)$, МВт	88,65	45,85	42,80	20,45	22,35
$\Delta_i^{\text{сист}}$, МВт	–0,65	0,65	0,8	–0,15	–0,15

В случае, если систематические погрешности невязок уравнений связи подчиняются равномерному закону распределения, имеет место множество равноценных вариантов локализации. В связи с этим возникает необходимость анализа фактически имеющих место законов распределения систематических погрешностей. Определить их непосредственно – затруднительно. Однако для взаимосвязанных переменных существует возможность косвенно оценить распределение систематических погрешностей измерений на основе анализа математических ожиданий невязок уравнений связи, используя свойство их пределов при отсутствии систематических ошибок:

$$
\lim_{T\to\infty} M(\delta_j)=0, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{16}
$$

Альтернативой или дополнением к изложенным выше способам локализации систематических погрешностей переменных может быть использование прогнозируемых трендов этих погрешностей. Например, для индукционных электрических счетчиков характерен постепенный переход систематических погрешностей из положительной зоны в отрицательную. В случае линейных монотонно убывающих трендов систематические погрешности измерений можно записать в виде

$$
\Delta_i^{\text{сист}}=a_i-b_i(t-t_{i0}), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{17}
$$

где a_i, b_i – параметры тренда; t_{i0} – момент времени установки или поверки i-го счетчика.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть связаны с анализом возможного влияния сезонных и климатических факторов, а также уровня измеряемых величин на параметры трендов систематических погрешностей.

ВЫВОД

Разработаны методы локализации и учета систематических погрешностей измерений при проведении статистического оценивания измеряемых переменных в системах электро-, тепло- и газоснабжения, гарантирующие получение эффективных и точных оценок переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В. А. Адаптивное оценивание состояния объекта энергоснабжения // Материалы 47-й науч.-техн. конф. БПИ. Ч. 1. – Мн., 1992. – С. 170.
2. Анищенко В. А., Горош А. В. Неточные математические модели контроля достоверности измерений в системах электроснабжения // Материалы междунар. 53-й науч.-техн. конф. профессоров, преподавателей, научных работников и аспирантов Белорусской государственной политехнической академии: В 4-х ч. – Мн., 1999. – Ч. 1. – С. 13.
3. Анищенко В. А. Методика учета систематических погрешностей при систематическом оценивании измерительной информации // Материалы междунар. науч.-техн. конф. БГПА: рефераты докладов. Т. 1. – Мн., 2001. – С. 78.
4. Анищенко В. А. Точность оценки состояния энергетического объекта // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1982. – № 5. – С. 151–153.
5. Анищенко В. А. Самонастраивающийся метод оценивания взаимосвязанных переменных состояния энергетического объекта // Изв. РАН. Энергетика и транспорт. – 1993. – № 2. – С. 63–68.
6. Повышение используемой в АСУ ТП ТЭС информации путем коррекции результатов измерения / В. А. Анищенко, В. И. Щербич, Т. Н. Казакевич и др. // Теплоэнергетика. – 1982. – № 7. – С. 31–33.
7. Анищенко В. А. Оценивание состояния энергетического объекта с предварительной идентификацией грубых и систематических ошибок измерений // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1994. – № 7–8. – С. 29–34.

Представлена кафедрой
электроснабжения

Поступила 30.05.2002

УДК 621.316.925

РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ–КУТТА 4-го ПОРЯДКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Канд. техн. наук, доц. НОВАШ И. В.

Белорусский национальный технический университет

Задачи расчета электромагнитных переходных процессов в электроэнергетических объектах, электротехнических устройствах с сосредоточенными параметрами сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ), не приводимых к нормальной форме Коши: