

уровня измеряемых величин на параметры трендов систематических погрешностей.

## ВЫВОД

Разработаны методы локализации и учета систематических погрешностей измерений при проведении статистического оценивания измеряемых переменных в системах электро-, тепло- и газоснабжения, гарантирующие получение эффективных и точных оценок переменных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В. А. Адаптивное оценивание состояния объекта энергоснабжения // Материалы 47-й науч.-техн. конф. БПИ. Ч. 1. – Мн., 1992. – С. 170.
2. Анищенко В. А., Горош А. В. Неточные математические модели контроля достоверности измерений в системах электроснабжения // Материалы междунар. 53-й науч.-техн. конф. профессоров, преподавателей, научных работников и аспирантов Белорусской государственной политехнической академии: В 4-х ч. – Мн., 1999. – Ч. 1. – С. 13.
3. Анищенко В. А. Методика учета систематических погрешностей при систематическом оценивании измерительной информации // Материалы междунар. науч.-техн. конф. БГПА: рефераты докладов. Т. 1. – Мн., 2001. – С. 78.
4. Анищенко В. А. Точность оценки состояния энергетического объекта // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1982. – № 5. – С. 151–153.
5. Анищенко В. А. Самонастраивающийся метод оценивания взаимосвязанных переменных состояния энергетического объекта // Изв. РАН. Энергетика и транспорт. – 1993. – № 2. – С. 63–68.
6. Повышение используемой в АСУ ТП ТЭС информации путем коррекции результатов измерения / В. А. Анищенко, В. И. Щербич, Т. Н. Казакевич и др. // Теплоэнергетика. – 1982. – № 7. – С. 31–33.
7. Анищенко В. А. Оценивание состояния энергетического объекта с предварительной идентификацией грубых и систематических ошибок измерений // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1994. – № 7–8. – С. 29–34.

Представлена кафедрой  
электроснабжения

Поступила 30.05.2002

УДК 621.316.925

## РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ–КУТТА 4-го ПОРЯДКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Канд. техн. наук, доц. **НОВАШ И. В.**

*Белорусский национальный технический университет*

Задачи расчета электромагнитных переходных процессов в электро-энергетических объектах, электротехнических устройствах с сосредоточенными параметрами сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ), не приводимых к нормальной форме Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В правых частях ДУ, кроме интегрируемых переменных (ИП) и независимых функций времени (возмущений), содержатся переменные, связанные с ИП математическими зависимостями, в том числе и нелинейными. Эти зависимости образуют систему алгебраических, трансцендентных уравнений:

$$\varphi_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = P_j(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

В состав системы (2) входят характеристики ферромагнитных, полупроводниковых элементов, нелинейных активных сопротивлений, электрической дуги и т. п.

При численном интегрировании ДУ (1) методом Рунге–Кутта 4-го порядка (РК4) на каждом шаге четыре раза решается система (2), в случае нелинейности – методом итераций.

Для решения «жестких» ДУ [1] применяются неявные методы, сводящиеся к «алгебраизации» ДУ путем замены производных отношениями приращений соответствующих переменных и отнесением производных и правых частей ДУ к моменту времени  $t + h$ . Алгебраизованные уравнения включаются в состав (2) и решаются совместно с ними. Для ДУ в форме Коши возможны алгебраизация всех ДУ системы (1), в том числе не обладающих свойством жесткости, и решение системы алгебраических уравнений (САУ) с использованием матричных методов. Это практикуется в компьютерных вычислительных системах типа MATLAB и др.

Прямое использование этих систем для решения электротехнических задач возможно при отсутствии в алгебраических уравнениях нелинейных зависимостей. Однако и в этом случае при наличии в исследуемом устройстве более 20...30 накопителей энергии (число ДУ) и такого же, а обычно в несколько раз большего количества алгебраических уравнений длительность вычислительного процесса может превысить приемлемые значения вследствие резкого возрастания времени, требуемого для однократного решения САУ. Расчет переходного режима длительностью 1...2 с устройства, работающего на промышленной частоте, при наличии в токах и напряжениях свободных составляющих с частотами в 10...20 раз кратными 50 Гц, требует до  $10^5 \dots 10^6$  решений САУ.

Алгебраизация только тех ДУ, которые придают системе (1) свойство жесткости, приводит к существенному уменьшению порядка САУ и снижению длительности вычислительного процесса.

В [2] рассмотрены алгоритмы решения жесткой системы ДУ с ограниченным количеством жестких уравнений методами Эйлера и Рунге–Кутта 2-го порядка. В настоящей статье рассматриваются особенности решения такой системы методом Рунге–Кутта 4-го порядка.

Алгебраизация  $l$ -го жесткого ДУ системы (1) на  $k$ -м такте алгоритма РК4 ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) приводит к алгебраическому уравнению

$$\frac{\bar{y}_l(t+h'_k)}{h_k} - \frac{Y_{lk}}{h_k} = f_l[\bar{y}_1(t+h'_k), \dots, \bar{y}_l(t+h'_k), \dots, \bar{y}_n(t+h'_k), \dots, x_1(t+h'_k), \dots, x_m(t+h'_k)], \quad (3)$$

где  $h_k = h, 0,5h, 0,5h, h$ ;  $h'_k = 0, 0,5h, 0,5h, h$ ;  $Y_{l1} = y_l(t-h)$ ;  $Y_{l2,3,4} = y_l(t)$ .

Искомыми переменными в этом уравнении наряду с  $x_1, \dots, x_m$  являются  $\bar{y}_l(t+h'_k)$  и аналогичные переменные других алгебраизированных ДУ. Они вычисляются в результате совместного решения уравнений (2), (3) при известных значениях  $y_i(t+h'_k)$  ( $i \neq l$ ) и  $Y_{lk}$  на каждом такте алгоритма РК4.

В качестве примера рассматривается алгоритм расчета однофазного замыкания на землю в сети с компенсированной нейтралью (рис. 1). Однофазное замыкание воспроизводится снижением сопротивления изоляции в фазе  $A$  линии.

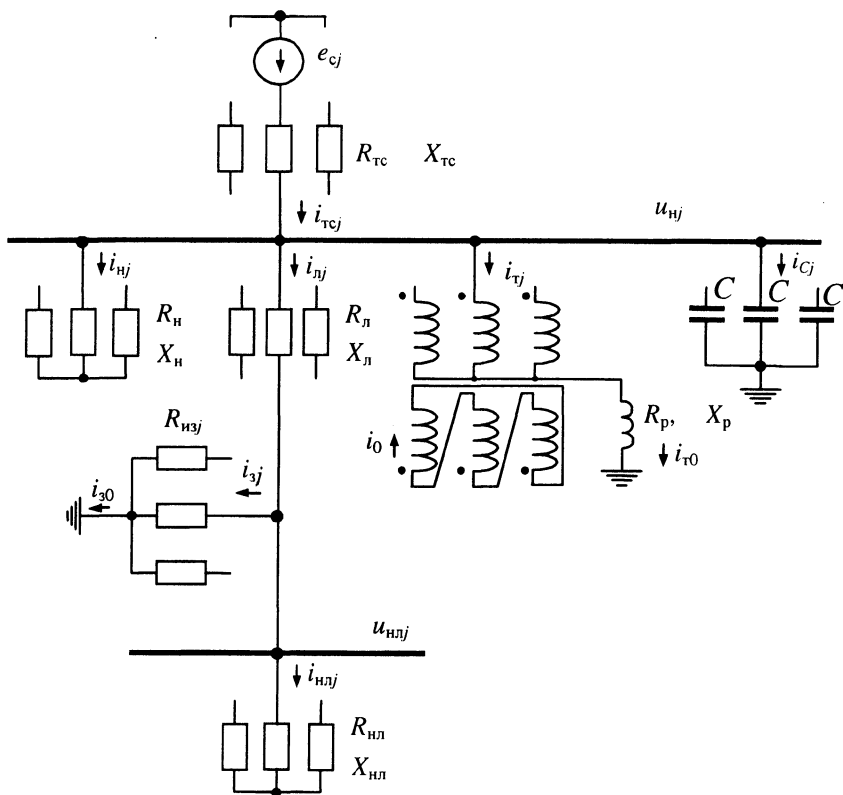


Рис. 1

Дифференциальные уравнения схемы рис. 1 после несложных преобразований приводятся к следующему виду:

$$C \frac{du_{ni}}{dt} = i_{тci} - i_{ni} - i_{ли} - i_{т}, \quad i = A, B;$$

$$C \frac{du_0}{dt} = -i_{л0} - i_p;$$

$$L_{тс} \frac{di_{тсi}}{dt} = e_{ci} - R_{тс} i_{тсi} - u_{ни} + \frac{1}{3} u_0;$$

$$L_n \frac{di_{ни}}{dt} = u_{ни} - R_n i_{ни} - \frac{1}{3} u_0; \quad (4)$$

$$\frac{dy_{8,9}}{dt} = u_{ни} - R_n i_{ли} - R_{нл} i_{нл} - \frac{1}{3} u_0 + \frac{1}{3} R_n i_{л0};$$

$$L_n \frac{di_{nj}}{dt} = u_{nj} - R_n i_{nj} - R_{нзj} i_{зj}, \quad j = A, B, C,$$

где  $y_{8,9} = L_n i_{ли} + L_{нл} i_{нл} - \frac{1}{3} L_n i_{л0}$ ;  $u_0 = u_{нА} + u_{нВ} + u_{нС}$ .

Математическая модель трансформатора, к нейтрали которого присоединен компенсирующий реактор [3], сводится в предположении отсутствия намагничивающих токов и вторичной нагрузки к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_{10}}{dt} = \frac{1}{3} u_0 - (R_t + 3R_p) i_t,$$

где  $y_{10} = (L_t + 3L_p) i_t$ , откуда  $i_t = y_{10} / (L_t + 3L_p)$ ;  $i_p = 3i_t$ .

Алгебраические уравнения для  $y_8, y_9$  и уравнения баланса токов в узлах схемы рис. 1 образуют замкнутую систему относительно переменных  $i_{зj}, i_{нлj}$ , легко разрешимую в общем виде при известных в начале каждого шага величинах  $i_{лj}$ , являющихся интегрируемыми переменными последних трех дифференциальных уравнений. Однако в случаях малой длины линии при решении этих уравнений явным методом РК4 проявляются свойства жесткости, выражающиеся в нарушении устойчивости вычислительного процесса (неограниченное возрастание результатов решения).

Алгебраизация указанных дифференциальных уравнений, согласно (3), приводит к алгебраическим уравнениям:

$$\left(R_n + \frac{L_n}{h_k}\right) i_{лj}(t + h'_k) + R_{нзj} i_{зj}(t + h'_k) = u_{нj}(t + h'_k) + \frac{L_n}{h_k} I_{лjk}, \quad (5)$$

$$j = A, B, C; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Эти уравнения совместно с уравнениями для  $y_8, y_9$  и уравнениями баланса токов в узлах схемы рис. 1 образуют замкнутую систему 9-го порядка относительно переменных  $i_{лj}, i_{нлj}, i_{зj}$ . Четырехкратное решение этой системы на каждом шаге численного интегрирования с использованием биб-

лиотечной подпрограммы значительно увеличивает длительность решения оставшихся ДУ. При малых значениях емкости жесткость может проявляться в результатах решения первых трех дифференциальных уравнений (4). Их алгебраизация приводит к еще большему увеличению порядка системы алгебраических уравнений и длительности счета.

В [1] отмечается, что неявный метод Эйлера для решения жестких уравнений является более устойчивым по сравнению с неявным методом РК4. Алгебраизация жестких ДУ по Эйлеру приводит к одним и тем же уравнениям вида (3) на каждом такте. Однако при решении остальных ДУ явным методом РК4 алгебраизация жестких уравнений по Эйлеру не приводит к заметному ускорению вычислительного процесса.

Для иллюстрации высказанных положений использовалась компьютерная программа, воспроизводящая математическую модель схемы рис. 1 по уравнениям (4) с алгебраизацией последних трех ДУ (5). Результаты расчета выводились на экран дисплея в виде осциллограмм в темпе вычислительного процесса. На рис. 2 приведены осциллограммы токов и напряжений линии длиной 0,2 км при заданном значении емкостного тока замыкания на землю 20 А. Свободные составляющие переходного режима,

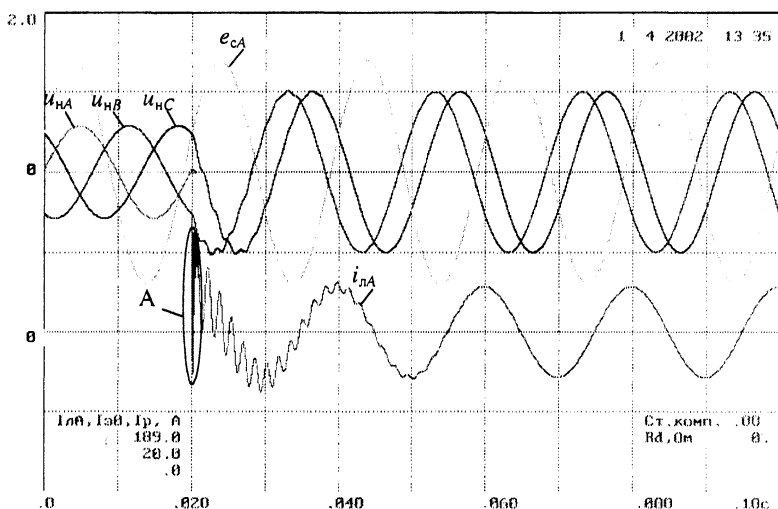


Рис. 2

обусловленные емкостью  $C$  и индуктивностью системы, существуют после возникновения замыкания на землю в течение одного-двух периодов промышленной частоты. Применение относительно больших шагов интегрирования ДУ при их решении неявными методами предполагает устранение из результатов решения наиболее быстро затухающих свободных составляющих переходных процессов. Фактически это выражается в их повышенных погрешностях, возрастающих с уменьшением шага. Переходный процесс в течение первой четверти периода после возникновения замыкания (область  $A$ , рис. 2) представлен на рис. 3. Высокочастотные составляющие, обусловленные емкостью  $C$  и индуктивностью линии, затухают в течение 1...2 мс. Для их достоверного определения уравнения системы должны решаться явными методами с соответствующим уменьшенным

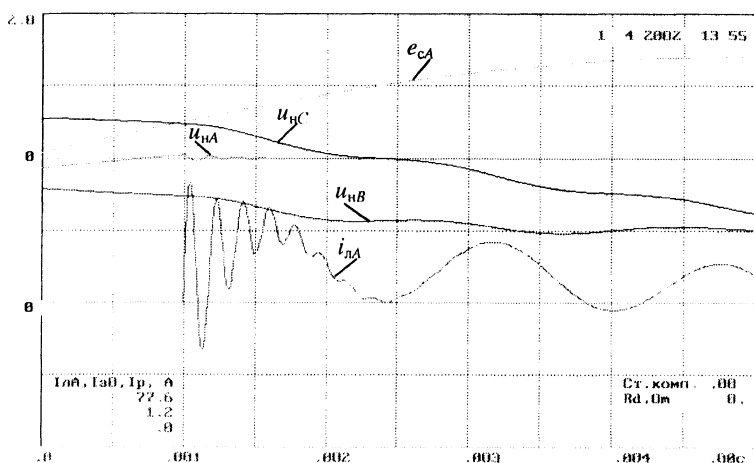


Рис. 3

шагом. Описанный алгоритм обеспечивает устойчивость вычислительного процесса с шагом порядка  $10^{-5} \dots 10^{-4}$  с при значениях емкости  $C$ , соответствующих емкостным токам замыкания на землю 10...20 А, минимальным величинам переходного сопротивления в поврежденной фазе до 2...3 Ом и длине линии 1...5 км. Длительность вычислительного процесса при расчете режима протяженностью 0,2...0,5 с на ПЭВМ с процессором 165 МГц не превышает 10...20 с.

### ВЫВОДЫ

1. При решении жестких систем ДУ методом Рунге–Кутта 4-го порядка целесообразно использовать неявный метод для решения только тех ДУ, в результате решения которых проявляется неустойчивость.
2. Следует учитывать различие алгебраизированных уравнений на каждом такте в течение шага.
3. Компьютерная программа может быть использована при расчете аварийных режимов, в частности однофазных замыканий на землю в сети с компенсированной нейтралью.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Пер. с англ.; Под ред. А. А. Абрамова. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. Новаш И. В. Об использовании неявных методов численного решения дифференциальных уравнений в расчетах электромагнитных переходных процессов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1994. – № 1–2. – С. 44–48.
3. Новаш И. В. Математическая модель трехфазного трехстержневого трансформатора на базе второй теории рассеяния // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1986. – № 5. – С. 36–39.