

К ВОПРОСУ ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТРАНСФОРМАТОРА

Канд. техн. наук ГЕЙЗЕР А. А.

Приазовский государственный технический университет (г. Мариуполь, Украина)

Трансформатор – важный элемент аппаратного оборудования энергетики, широко используемый в производстве, науке и технике. В системах автоматизации технологических процессов, при создании систем автоматического регулирования и управления зачастую необходимо формировать положительные и отрицательные обратные связи. Поэтому актуален вопрос об амплитудно-фазовых соотношениях между напряжениями и токами трансформатора. Уже много лет [1–5, 7, 9] обсуждается проблема выбора основных уравнений трансформатора. Объясняется это несоответствием положений классической теории трансформатора данным эксперимента и практики. Согласно классической теории, основные уравнения трансформатора имеют вид [6]:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{E}_1; \quad \underline{E}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_{10} - \underline{I}_2 n_2 / n_1,$$

где $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ – напряжения на входе и выходе трансформатора; $\underline{E}_1, \underline{E}_2$ – ЭДС первичной и вторичной обмоток; $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ – силы токов, текущих по этим обмоткам; \underline{I}_{10} – ток трансформатора в режиме холостого хода; $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ – полные комплексные сопротивления обмоток при числе витков соответственно n_1 и n_2 .

Из приведенных уравнений и построенной на их основе векторной диаграммы [9] видно, что входное \underline{U}_1 и выходное \underline{U}_2 напряжения находятся в противофазах. Наличие противофазы между указанными напряжениями следует также из уравнений, выражающих мгновенные значения этих напряжений через индуктивности и взаимоиндуктивности обмоток трансформатора [6]:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1;$$

$$u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} - r_2 i_2,$$

где L_1, L_2 – индуктивности первичной и вторичной обмоток; M – взаимная индуктивность обмоток; r_1, r_2 – активные сопротивления обмоток.

В настоящее время нет единой точки зрения на теорию работы трансформатора в курсах электрических машин, физики, ТЭЭ и общей электротехники. На страницах журнала «Электричество» и других электротехнических и специальных изданий ведется дискуссия [1–5, 7, 9] по проблеме согласованного изложения теории трансформатора, предмет которой объ-

ясняется несоответствием положений классической теории трансформатора данным эксперимента и практики.

Так, при изложении теории трансформатора в курсах общей физики [10, 11] указывается, что упомянутые выше напряжения находятся в противофазе, о чем свидетельствует формула

$$\varepsilon_2 = -\frac{n_2}{n_1} \varepsilon_1,$$

где ε_2 – ЭДС на вторичной обмотке трансформатора; ε_1 – то же на первичной обмотке; n_2 – число витков вторичной обмотки; n_1 – то же первичной обмотки.

В [11] утверждается, что знак минус говорит о том, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Результаты же экспериментов свидетельствуют, что между указанными напряжениями нет противофазы [7, 9]. Для устранения такого противоречия предлагается альтернативная форма записи основных уравнений трансформатора [9]:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{E}_1; \quad \underline{E}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_2 n_2 / n_1.$$

Для получения такой формы записи необходимо исключить знак минус в формуле закона электромагнитной индукции. В связи с этим предлагаются различные теории, обосновывающие такую замену и т. п. [8, 9, 12, 13].

Попытаемся разработать теорию работы трансформатора, используя трактовку явления электромагнитной индукции [14, 15], так как принцип работы трансформатора основан на этом явлении.

Простейший трансформатор (рис. 1), служащий для повышения или понижения напряжения переменного тока, состоит из двух обмоток – первичной и вторичной, имеющих соответственно n_1 и n_2 витков и укрепленных на замкнутом железном сердечнике. Как правило, первичная обмотка подключена к источнику тока с ЭДС ε_1 , и в ней возникает переменный ток \underline{I}_1 , создающий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток Φ_1 . Будем рассматривать трансформатор, у которого магнитный поток полностью локализован в железном сердечнике и, следовательно, целиком пронизывает витки первичной и вторичной обмоток. Изменение этого потока вызывает появление во вторичной обмотке ЭДС взаимной индукции, а в первичной – ЭДС самоиндукции. Если вторичная обмотка, обладающая сопротивлением r_2 , соединена с нагрузкой, имеющей сопротивление R_2 , то в ней появится ток \underline{I}_2 , который создаст поток Φ_2 . Так как причиной появления потока Φ_2 служит поток Φ_1 , оба потока на основании правила Ленца направлены встречно. Будем считать, что поток Φ_1 имеет положительное направление, а поток Φ_2 – отрицательное. Изменяющийся поток Φ_2 создаст в первичной и вторичной обмотках соответствующие электродвижущие силы. На рис. 1 показана картина условно-положительных направлений для токов, некоторых основных ЭДС и напряжений трансформатора, составленная в соответствии с физической природой

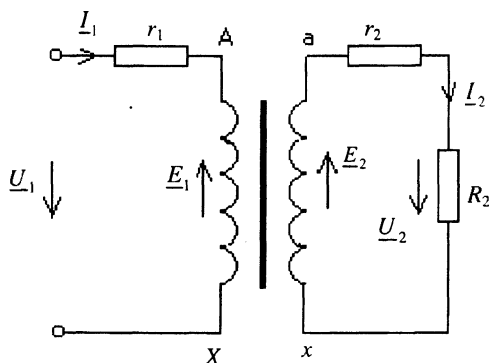


Рис. 1. Схема трансформатора

аппарата, а не в силу абстрактно-логических рассуждений [9]. Используя нашу трактовку закона электромагнитной индукции и второго закона Кирхгофа для замкнутых цепей, можно записать следующие уравнения:

- для первичной обмотки

$$i_1 r_1 = \frac{A_{\text{ст}}}{q} - \left[\frac{d(n_1 \Phi_1)}{dt} - \frac{d(n_1 \Phi_2)}{dt} \right], \quad (1)$$

где r_1 – сопротивление первичной обмотки трансформатора; $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил, сосредоточенных в источнике ЭДС, по перемещению заряда q по цепи первичной обмотки трансформатора;

- для вторичной обмотки

$$i_2 R_2 + i_2 r_2 = \frac{A_{\text{ст}2}}{q_2} - \frac{d(n_2 \Phi_2)}{dt}, \quad (2)$$

где $A_{\text{ст}2}$ – работа сторонних сил по перемещению заряда q_2 по цепи вторичной обмотки трансформатора.

Поясним, как составлялись уравнения (1) и (2). На основании второго закона Кирхгофа для цепи первичной обмотки запишем следующее уравнение:

$$i_1 r_1 = \varepsilon_{\text{и}} + \varepsilon_{\text{инд}}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_{\text{и}}$ – ЭДС источника тока; $\varepsilon_{\text{инд}}$ – ЭДС индукции, наводимая на первичной обмотке.

Согласно определению, ЭДС источника равна отношению работы сторонних сил в источнике $A_{\text{ст.и}}$ к величине переносимого заряда q , т. е.:

$$\varepsilon_{\text{и}} = \frac{A_{\text{ст.и}}}{q}. \quad (4)$$

ЭДС индукции, наводимая на первичной обмотке, согласно нашей трактовке этого явления [14, 15], определяется по формуле

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{A_{\text{стI}}}{q} - \left[\frac{d(n_1\Phi_1)}{dt} - \frac{d(n_1\Phi_2)}{dt} \right], \quad (5)$$

где $A_{\text{стI}}$ – работа сторонних сил по перемещению заряда q по первичной обмотке трансформатора.

Поскольку работа сторонних сил источника $A_{\text{ст}}$ равна сумме работ по перемещению заряда в источнике и по первичной обмотке, в правой части выражения (3) стоит знак плюс между составляющими $\varepsilon_{\text{и}}$ и $\varepsilon_{\text{инд}}$. Объединив (4) и (5) в выражение (3) и учтя, что $\frac{A_{\text{ст}}}{q} = \frac{A_{\text{ст.и}}}{q} + \frac{A_{\text{стI}}}{q}$, приходим к выражению (1). Аналогичным образом с учетом второго закона Кирхгофа и нашей трактовки закона электромагнитной индукции составляется уравнение (2).

В связи с тем, что величина $\frac{A_{\text{ст}}}{q}$ в первом уравнении равна ЭДС источника ε_1 , подключенного к первичной обмотке, а такая же величина во втором уравнении равна ЭДС, наводимой потоком Φ_1 во вторичной обмотке, и равна $n_2 \frac{d\Phi_1}{dt}$, с учетом знаков потоков Φ_1 и Φ_2 , а также приняв во внимание, что обмотки намотаны в одну сторону и числа витков n_1 и n_2 являются величинами постоянными и не меняются со временем, уравнения (1) и (2) примут вид:

$$i_1 r_1 = \varepsilon_1 - n_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + n_1 \frac{d\Phi_2}{dt}; \quad (6)$$

$$i_2 R_2 + i_2 r_2 = n_2 \frac{d\Phi_1}{dt} - n_2 \frac{d\Phi_2}{dt}. \quad (7)$$

Рассмотрим режим холостого хода работы трансформатора. В этом случае сопротивление нагрузки R_2 стремится к бесконечности, а ток I_2 – к нулю. Равенство тока I_2 нулю свидетельствует о том, что поток Φ_2 не создается, а напряжение на сопротивлении R_2 равно ЭДС на вторичной обмотке. В этом случае уравнения (6) и (7) принимают вид:

$$i_{10} r_1 = \varepsilon_1 - n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}; \quad (8)$$

$$\varepsilon_2 = n_2 \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (9)$$

где i_{10} – ток в первичной обмотке в режиме холостого хода.

Падение напряжения $i_{10}r_1$ на сопротивлении r_1 при быстропеременных полях в режиме холостого хода мало по сравнению с ЭДС ε_1 и ЭДС, наводимой потоком Φ_1 на первичной обмотке, поэтому, приняв $i_{10}r_1 = 0$, из (8) следует

$$\varepsilon_1 = n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (10)$$

Выразив из уравнения (10) величину производной от потока Φ_1 , т. е. $\frac{d\Phi_1}{dt}$, и подставив ее значение в (9), получим

$$\varepsilon_2 = \frac{n_2}{n_1} \varepsilon_1. \quad (11)$$

Следовательно, ЭДС ε_1 находится в одной фазе с ЭДС ε_2 .

Из выражения (11) может быть получен коэффициент трансформации трансформатора по напряжению $k_{тр}$

$$k_{тр} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (12)$$

который равен отношению витков вторичной и первичной обмоток.

Обратимся к более распространенному режиму работы трансформатора, когда тот нагружен и в цепи вторичной обмотки протекает ток. При этом будем считать, что среда, в которой создаются магнитные потоки, линейна, что справедливо, например, для воздушного трансформатора либо трансформатора с сердечником при его условной линеаризации. Если к первичной обмотке трансформатора подвести напряжение ε_1 , а вторичную обмотку соединить с нагрузкой, то в первичной и вторичной обмотках появятся токи I_1 и I_2 , а в его магнитопроводе – магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 . При увеличении тока нагрузки I_2 поток Φ_2 увеличивается, а суммарный магнитный поток, состоящий из встречно направленных потоков Φ_1 и Φ_2 , – уменьшается. Вследствие этого индуктированные суммарным потоком электродвижущие силы, что видно из (6) и (7), в первичной и вторичной обмотках уменьшаются. Снижение ЭДС в первичной обмотке вызывает рост величины тока первичной обмотки I_1 и потока Φ_1 , а также суммарного магнитного потока Φ_1 , Φ_2 . Уменьшение ЭДС во вторичной обмотке уменьшает величину тока I_2 и потока Φ_2 и поэтому приводит к увеличению суммарного магнитного потока.

Таким образом, изменения суммарного магнитного потока, вызванные увеличением тока I_2 , взаимно компенсируются, в результате чего он практически неизменен.

Совершенно очевидно, что и при постепенном уменьшении тока I_2 от некоторого значения до нуля суммарный поток останется неизменным. Отсюда следует, что суммарный поток равен потоку Φ_0 при холостом ходе трансформатора, т. е.

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_0. \quad (13)$$

Для создания таких потоков требуются намагничивающие силы

$$I_1 n_1 - I_2 n_2 = I_{10} n_1. \quad (14)$$

Помня, что токи являются синусоидальными величинами, переменными во времени, получаем формулу

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_2 n_2 / n_1, \quad (15)$$

представляющую уравнение токов нагруженного трансформатора.

Рассмотрим математические зависимости, характеризующие работу трансформатора под нагрузкой. Для этого найдем составляющую $n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$ в (6), так как формулы (6) и (7) описывают именно работу трансформатора под нагрузкой. Сначала определим величину $\frac{d\Phi_1}{dt}$. Согласно определению магнитного потока

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{S_1 dB_1}{dt}, \quad (16)$$

где S_1 – поперечное сечение первичной обмотки; B_1 – индукция магнитного поля, создаваемая этой обмоткой.

Индукция магнитного поля, которая создается катушкой, выполненной в виде соленоида, может быть найдена по формуле

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{n_1}{l_1} I_1, \quad (17)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; l_1 – высота первичной обмотки.

Взяв производную от (17), получим

$$\frac{dB_1}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_1}{l_1} \frac{di_1}{dt}. \quad (18)$$

Следовательно, выражение для $\frac{d\Phi_1}{dt}$ будет иметь вид

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_1}{l_1} S_1 \frac{di_1}{dt}, \quad (19)$$

а $n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$ определится по формуле

$$n_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_1^2}{l_1} S_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (20)$$

Коэффициент L_1 (20) является индуктивностью первичной обмотки трансформатора и определяется из следующего выражения:

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{n_1^2}{l_1} S_1. \quad (21)$$

Найдем величину составляющей $n_1 \frac{d\Phi_2}{dt}$, входящей в (6). Проведя выкладки, аналогичные тем, которые мы проделали при определении составляющей $n_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$, получим

$$n_1 \frac{d\Phi_2}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_1 n_2}{l_2} S_2 \frac{di_2}{dt} = L_{21} \frac{di_2}{dt}, \quad (22)$$

где l_2 – высота вторичной обмотки; S_2 – поперечное сечение вторичной обмотки трансформатора; L_{21} – коэффициент взаимной индукции первичной и вторичной обмоток трансформатора.

Аналогичным образом определим составляющие $n_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$ и $n_2 \frac{d\Phi_1}{dt}$, входящие в (7). Они будут иметь значения, соответствующие формулам:

$$n_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_2^2}{l_2} S_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad (23)$$

$$n_2 \frac{d\Phi_1}{dt} = \mu_0 \mu \frac{n_1 n_2}{l_1} S_1 \frac{di_1}{dt} = L_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (24)$$

где L_2 – индуктивность вторичной обмотки трансформатора; L_{12} – коэффициент взаимной индукции вторичной и первичной обмоток трансформатора.

С учетом выражений (20)–(24), (6) и (7) будут иметь вид:

$$i_1 r_1 = \varepsilon_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{21} \frac{di_2}{dt}; \quad (25)$$

$$i_2 R_2 + i_2 r_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (26)$$

Используя терминологию, принятую при изложении теории трансформатора, и учитывая, что токи и напряжения являются синусоидальными величинами, переменными во времени, члены, входящие в (25) и (26), имеют следующие значения: ЭДС $\underline{\varepsilon}_1$ – создает подведенное к первичной обмотке напряжение \underline{U}_1 ; $L_1 \frac{di_1}{dt}$ – соответствует ЭДС, наводимой током \underline{I}_1 , на первичной обмотке \underline{E}_1 ; $L_{21} \frac{di_2}{dt}$ – ЭДС, наводимая током \underline{I}_2 , на первичной обмотке \underline{E}_{21} ; $i_1 r_1$ – падение напряжения на сопротивлении первичной обмотки \underline{U}_{r1} ; $i_2 R_2$ – напряжение, создаваемое вторичной обмоткой, на нагрузочном сопротивлении \underline{U}_2 ; $L_{12} \frac{di_1}{dt}$ – ЭДС, наводимая током \underline{I}_1 , на вторичной обмотке \underline{E}_2 ; $L_2 \frac{di_2}{dt}$ – ЭДС, наводимая током \underline{I}_2 , на вторичной обмотке \underline{E}_{22} ; $i_2 r_2$ – падение напряжения на сопротивлении вторичной обмотки \underline{U}_{r2} .
 С учетом введенных обозначений, (25) и (26) примут вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{E}_{21} + \underline{U}_{r1}; \quad (27)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_2 - \underline{E}_{22} - \underline{U}_{r2}. \quad (28)$$

Выражения (27) и (28) с учетом (15) представляют основные уравнения трансформатора, полученные на основании закона электромагнитной индукции. Из построенной на их основе векторной диаграммы (рис. 2), в соответствии со схемой (рис. 1), видно: между напряжениями \underline{U}_1 и \underline{U}_2 нет противофазы, что и подтверждается результатами эксперимента [7, 9].

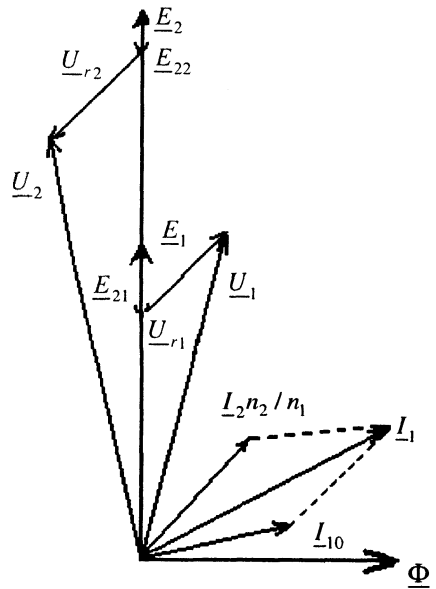


Рис. 2

ВЫВОДЫ

1. Применение предложенной автором формулировки закона электромагнитной индукции не требует привлечения каких-либо дополнительных положений для записи основных уравнений трансформатора.
2. Совпадение теоретического и экспериментального результатов для трансформатора, полученное в данной работе, свидетельствует о правильности записи нашей трактовки закона электромагнитной индукции и построенных на этом законе уравнений трансформатора.
3. Результаты следует учитывать при разработке систем автоматического регулирования и управления, формировании различных обратных связей и пр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е т у ш и л А. В. О системном подходе в преподавании электротехнических дисциплин // Электричество. – 1996. – № 5. – С. 43–47.
2. Н е т у ш и л А. В. Зачем столько минусов в векторных диаграммах и схеме замещения трансформатора? // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1983. – № 9. – С. 47–51.
3. Б у л г а к о в Н. Н. Об устранении несогласованностей в изложении теории трансформатора // Электричество. – 1984. – № 1. – С. 64.
4. Л и Ц з ы л я н, Ч э н ь В э й. О выборе условных положительных направлений электрических величин при анализе схем трансформаторов // Электричество. – 1995. – № 5. – С. 64–65.
5. И в а н о в Л. Л. К методике изложения некоторых вопросов курса электротехники: Сб. науч.-метод. статей // Электротехника. – М.: Высш. шк., 1973. – Вып. 1. – С. 47–51.
6. К о с т е н к о М. П., П и о т р о в с к и й Л. М. Электрические машины: В 2-х ч. – Ч. 1. Машины постоянного тока. Трансформаторы. – Л.: Энергия, 1972. – 544 с.
7. К и т а е в А. В. Точку в споре о формах записи уравнений трансформатора должен поставить эксперимент // Электричество. – 1997. – № 7. – С. 67–70.
8. Ф а т т а х о в К. М. Использование некоторых выражений закона электромагнитной индукции в теории электрических машин // Электричество. – 1995. – № 10. – С. 56–59.
9. К и т а е в А. В. Причины спора по описанию поведения трансформатора // Технічна електродинаміка. – 1998. – № 3. – С. 74–76.
10. С и в у х и н Д. В. Общий курс физики. – Т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977. – 688 с.
11. Т р о ф и м о в а Т. И. Курс физики: Учеб. для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 542 с.
12. К а р н и Ш. Теория цепей: Анализ и синтез. – М.: Связь, 1973. – 368 с.
13. С е ш у С., Б а л а б а н я н Н. Анализ линейных цепей. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 552 с.
14. Г е й з е р А. А. Использование некоторых выражений закона электромагнитной индукции // Электричество. – 1996. – № 10. – С. 73–76.
15. Г е й з е р А. А. Генераторы колебаний для электропитания магнитно-импульсных устройств. – Мариуполь: Рената, 1998. – 224 с.

Представлена кафедрой физики

Поступила 30.05.2002