

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Гидротехническое и энергетическое  
строительство, водный транспорт и гидравлика»

# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА. ГИДРОСТАТИКА

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности  
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение  
и охрана водных ресурсов»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию  
в области строительства и архитектуры*

Минск  
БНТУ  
2021

УДК 532  
ББК 22.253я7  
М55

А в т о р ы:

*И. В. Качанов, В. А. Ключников,  
И. М. Шаталов, М. К. Щербакова*

Р е ц е н з е н т ы:

начальник производства «Минскводопровод»  
УП «Минскводоканал» *А. И. Голосок*;  
зав. кафедрой «ЭГиТ» Белорусского государственного  
технологического университета, канд. техн. наук,  
доцент *А. С. Дмитриченко*

М55      **Механика** жидкости и газа. Гидростатика : учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов» / И. В. Качанов [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – 63 с.  
ISBN 978-985-583-288-2.

Учебно-методическое пособие содержит основные сведения, понятия, определения, уравнения и расчетные инженерные формулы раздела «Гидростатика» дисциплины «Механика жидкости и газа» в объеме курса лекций, предусмотренных учебным планом специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», и может быть использовано в учебном процессе для студентов высших учебных заведений для других строительных специальностей (промышленного и гражданского строительства, строительства автомобильных дорог, мостов и тоннелей и т. д.). Предлагаемое пособие также может представлять практический интерес для инженерно-технических специалистов любых строительных организаций и ведомств.

УДК 532  
ББК 22.253я7

ISBN 978-985-583-288-2

© Белорусский национальный  
технический университет, 2021

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии излагаются теоретические основы механики жидкости и газа (технической механики жидкости или гидравлики), описаны физические свойства, законы равновесия и движения жидкостей, особенности гидравлических сопротивлений, рассматриваются вопросы моделирования гидравлических явлений.

Значительное место в учебном пособии уделено изложению разделов, представляющих особый интерес для специалистов по водоснабжению и водоотведению. Эти разделы посвящены гидравлике трубопроводов и водопроводных сетей, безнапорных канализационных трубопроводов, илопроводов, искусственных и естественных открытых русел, водосливов, водомерных лотков, сопряжения бьефов, гасителей энергии, перепадов, быстротоков и других сооружений, свободного и стесненного осаждения твердых частиц в жидкости, движения воды в грунтах.

Учебное пособие написано в соответствии с учебной программой дисциплины для специальности 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов».

В учебном пособии таблицы и справочные данные приводятся в сокращенном, необходимом только для понимания сути вопроса виде. Ряд разделов пособия может быть также использован студентами других строительных специальностей, а также сотрудниками соответствующих проектных организаций.

# 1. ВВЕДЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА И СВЯЗЬ ЕЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ

Гидромеханика изучает законы равновесия и движения жидкости. Гидромеханика исходит из основных принципов физики и механики. При описании основных законов равновесия и движения жидкости гидромеханика использует достаточно непростой математический аппарат и современные цифровые компьютерные технологии, причем полученные выводы она согласует с экспериментальными исследованиями, которые одновременно дополняют и подтверждают эти выводы.

Гидромеханика в настоящее время условно можно разделить на две части:

- 1) науку, изучающую законы равновесия и движения жидкости строго теоретическими (физико-математическими) методами, называемую теоретической гидромеханикой или механикой жидкости и газа;
- 2) науку, изучающую те же законы, но прикладными или экспериментальными методами (физико-техническими), называемую прикладной гидромеханикой или гидравликой. Прикладная гидромеханика (гидравлика) также параллельно рассматривает применение вышеуказанных законов в инженерной практике и технике.

Следует отметить, что иногда механику жидкости и газа называют гидрогазодинамикой.

Гидромеханика делится на три основных раздела:

- 1) гидростатику;
- 2) кинематику жидкости;
- 3) гидродинамику.

**Гидростатика** изучает только законы равновесия жидкости и их практическое применение.

**Кинематика жидкости** изучает основные виды и формы движения жидкости, а также кинематические характеристики движения в потоках жидкости и их изменение во времени и пространстве.

**Гидродинамика** в свою очередь изучает законы движения жидкости и их использование в инженерной практике и технике.

Зачастую в технической и учебной литературе кинематику жидкости и гидродинамику объединяют в один раздел, именуемый «Гидродинамика».

Отличительной чертой современной гидромеханикой является широкое применение методов теоретического и экспериментального изучения движения жидкости в лабораторных и натуральных условиях совместно с применением передовых компьютерных технологий, включающих компьютерное моделирование и численное решение основных уравнений гидродинамики.

В заключение следует отметить, что гидромеханика, рассматривая законы равновесия и движения жидкости, опирается на такие науки, как высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов и т. д. В свою очередь, гидромеханика служит базой для гидравлических расчетов в таких дисциплинах, как «Насосы и насосные станции», «Водоснабжение», «Канализация», «Санитарно-техническое оборудование зданий», «Гидрология и гидротехнические сооружения», а также в курсовом и дипломном проектировании.

## **2. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Методически и исторически сложилось так, что основой современной механики жидкости и газа явилась гидравлика.

Слово «гидравлика» греческого происхождения – *hydor* (вода) и *aulos* (труба), что значит – течение воды по трубам. В настоящее время вопросы, изучаемые в гидравлике, охватывают движение воды не только в трубах, но и в открытых руслах (каналах, реках), в различных водопроводных, водоотводных (канализационных) и гидротехнических сооружениях, движение грунтовых вод, а также движение других жидкостей (нефть, масла, различные растворы и т. п.) в трубопроводах и сооружениях.

Развитие *гидравлики*, а также механики жидкости и газа (технической механики) как науки тесно связано с использованием человеком такого элемента природы, как вода. Вода с древних времен использовалась не только для питьевого водоснабжения, но и для орошения полей и приведения в движение простейших механизмов. Реки и каналы служили водными путями для судов и лодок, естественными и искусственными преградами, защищавшими от нападения врагов. Следы древних цивилизаций обнаруживаются на берегах рек Тигра

и Евфрата в Месопотамии, Инда в Индии, Нила в Египте, Хуанхе в Китае, в Закавказье и Средней Азии. В этих местах еще за 4000–1000 лет до нашей эры строились оросительные системы на полях, плотины и мельницы на реках. В Риме за 6 веков до нашей эры был построен водопровод, остатки которого сохранились и поныне. На территории СССР во многих местах были построены оросительные системы, водопроводы и водяные мельницы. Например, более тысячи лет назад в Средней Азии была построена Шахрудская оросительная система, действующая и в настоящее время. В России в XVII в. была построена Вышневолоцкая водная система, которая через реки Волхов, Ильмень, Мсту, Цну, Тверцу и Волгу с помощью каналов и шлюзов соединила Балтийское море с Каспийским. Эти примеры свидетельствуют о том, что человечество обладало достаточно высокой для того времени техникой и определенными знаниями в практической гидравлике для решения соответствующих задач.

Первой известной нам научной работой в области гидравлики явилось сочинение Архимеда «О плавающих телах», написанное за 250 лет до нашей эры. В дальнейшем в течение многих веков господства феодального общества не появлялись результаты каких-либо значительных гидравлических исследований, хотя практически водное строительство продолжало развиваться.

Новое развитие гидравлика получила в эпоху Возрождения. В конце XV в. Леонардо да Винчи написал работу «О движении и изменении воды», но увидела свет она лишь в XIX в. В 1585 г. голландский ученый С. Стевин опубликовал книгу «Начала гидростатики», затем появилась работа Г. Галилея «О телах, находящихся в воде, и о тех, которые в ней движутся» (1612 г.), а также были проведены исследования Э. Торичелли об истечении жидкости из отверстий (1643 г.), Б. Паскаля о передаче внешнего давления в жидкости (1650 г.), И. Ньютона о законах внутреннего трения в жидкости (1686 г.).

Дальнейшее развитие науки о равновесии и движении жидкости привело к созданию родственной, смежной с гидравликой науки – *теоретической гидромеханики или механики жидкости и газа*. В отличие от гидравлики, рассматривающей задачи механики жидкости, для решения которых используются экспериментальные данные, теоретическая гидромеханика (МЖГ) решает задачи равновесия и движения жидкости методами теоретической механики с помощью математического анализа. В развитии теоретической гидро-

механики огромную роль сыграли члены Петербургской Академии наук М. В. Ломоносов, Д. Бернулли и Л. Эйлер.

Д. Бернулли в 1738 г. опубликовал капитальный труд о движении жидкости. Уравнение Д. Бернулли является и в настоящее время основой гидравлических расчетов многих случаев движения жидкости. Л. Эйлер в 1755 г. вывел основные дифференциальные уравнения равновесия и движения жидкости и ввел понятие условной идеальной (невязкой) жидкости, что позволило получить математическое решение законов гидромеханики. М. В. Ломоносов в 1760 г. опубликовал диссертацию «Рассуждения о твердости и жидкости тела», где им изложен положенный в основу гидравлики закон сохранения массы и энергии.

Наряду с развитием теоретической гидромеханики успешно развивалась и экспериментальная гидравлика. Следует отметить работы французских ученых А. Шези, А. Базена, А. Дарси по изучению сопротивлений при движении жидкости в каналах и трубах. В России в 1836 г. был опубликован первый учебник по гидравлике, написанный профессором П. П. Мельниковым, он же создал первую учебную гидравлическую лабораторию в Петербургском институте путей сообщения.

К этому времени наметился определенный разрыв между теоретическими и экспериментальными исследованиями механики жидкости. Попытки их сближения нашли отражения в работах Д. И. Менделеева, который первым в 1880 г. указал возможность существования двух режимов движения жидкости с различными законами сопротивления. Развивая работы Д. И. Менделеева, английский физик О. Рейнольдс исследовал эти два режима экспериментально и разработал теорию подобия для изучения движения жидкости. Значительные теоретические исследования были проведены и другими русскими учеными. Так, И. С. Громека дал глубокий анализ различных видов движения жидкости, разработал основы теории винтовых движений. Н. П. Петров теоретически обосновал гипотезу Ньютона о внутреннем трении в жидкости и разработал гидродинамическую теорию смазки. Б. А. Бахметев получил решение дифференциальных уравнений движения воды в открытых руслах. Н. Е. Жуковский создал теорию гидравлического удара, получившую мировую известность.

Из зарубежных исследований этого периода следует также назвать работы ученых Ф. Форхгеймера в области гидравлических

сопротивлений и теории фильтрации, Г. Вебера в области гидродинамического подобия, Л. Прандтля в области гидравлических сопротивлений и в создании полуэмпирических теорий турбулентности.

Существенный вклад в достижения в области водного хозяйства внесла советская гидравлическая наука. Выдающийся советский гидравлик академик Н. Н. Павловский создал метод электрогидродинамических аналогий для изучения фильтрации под гидравлическими сооружениями, предложил практические решения ряда других задач фильтрации, а также равномерного и неравномерного движения воды в открытых руслах, издал первый в СССР «Гидравлический справочник» и монографию по основам гидравлики.

Среди работ в области расчетов движения жидкости в открытых руслах необходимо отметить также исследования таких советских ученых, как И. И. Агроскин, Ю. Н. Даденков, И. И. Леви, В. М. Маковеев, Р. Р. Чугаев.

Вопросы неустановившегося движения воды в открытых руслах отражены в работах С. А. Христиановича, В. А. Архангельского, Н. М. Бернадского, В. А. Большакова, О. Ф. Васильева, Н. А. Картевишвили и др.

Такие исследователи, как М. Д. Чертоусов, Г. И. Сухомел, Н. Н. Беляшевский, Б. Т. Емцов, Д. И. Кумин, М. Ф. Складнев, В. В. Смыслов, Н. П. Розанов, А. А. Угинчус, И. А. Шеренков, занимались задачами, возникающими при рассмотрении условий протекания воды через различные сооружения.

В области гидравлики трубопроводов широко известны работы А. Д. Альтшуля, Г. А. Мурина, Н. Ф. Федорова, Ф. А. Шевелева.

Дальнейшее развитие знаний в области турбулентности отражено в работах А. Н. Колмогорова, М. А. Великанова, Г. А. Гуржиенко, Е. В. Еременко, Л. Г. Лойцянского, А. С. Моница, А. М. Яглома, И. Л. Розовского.

Обобщение результатов различных исследований нашло свое отражение в учебниках и справочниках по гидравлике И. И. Агроскина, А. И. Богомолова, К. А. Михайлова, П. Г. Киселева, Н. Н. Павловского, Б. О. Ботука, Р. Р. Чугаева и др.

Развитие и успехи гидравлики в решении многих задач инженерной практики, создание новых гидравлических методов расчета с одной стороны и развитие теоретической гидромеханики в связи с применением ЭВМ и новых методов расчетов с другой привели к новому



шагу сближения этих наук. В настоящее время можно считать, что современная гидравлика представляет собой техническую механику жидкости, опирающуюся на теоретическую гидромеханику и поставленные на высоком уровне экспериментальные исследования. Поэтому курс современной гидравлики, которую называют механикой жидкости и газа, включает в себя все сведения из гидромеханики, которые необходимы инженеру в его практической деятельности.

### 3. ЖИДКОСТЬ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

**Жидкость** – физическое тело, обладающее свойством текучести. **Текучесть** – это легкоподвижность частиц жидкости, обуславливаемая неспособностью ее воспринимать касательные напряжения в состоянии покоя. Благодаря этому свойству она не имеет постоянной формы, а принимает форму сосуда, в котором находится.

Жидкость в МЖГ рассматривается как сплошная среда (континуум), т. е. среда, масса которой непрерывно распределена по объему без пустот и переуплотнений. Поэтому при изучении законов МЖГ любая бесконечно малая частица жидкости рассматривается как физическое твердое тело, состоящее из большого количества молекул, т. е. в МЖГ часто используется принцип условного «отверждения» жидкости.

Жидкости в «Механике жидкости и газа» делятся на следующие виды:

- капельные (малосжимаемые или условно несжимаемые) и газообразные (сжимаемые);
- ньютоновские и неньютоновские (бингемовские);
- однофазные и многофазные;
- идеальные (невязкие) и реальные (вязкие).

В реальной практике **капельные жидкости** (воды, нефть, смазочные масла, спирт и др.) называют просто «жидкостью», а **газообразные жидкости** (воздух, кислород, водород, азот и т. д.) – просто «газ». Следует отметить, что многие гидравлические закономерности для жидкостей и газов являются аналогичными.

**Ньютоновские жидкости** – это жидкости, текущие под действием собственного веса.

**Неньютоновские (бингемовские) жидкости** – это жидкости, движение которых начинается только после того, как касательные

напряжения достигнут некоторого предельного минимального значения (так называемое начальное напряжение сдвига); при меньших напряжениях эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации. В этих жидкостях касательное напряжение определяют по формуле Бингема:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dn},$$

где  $\tau_0$  – начальное напряжение сдвига, Па;

$\mu$  – динамический коэффициент вязкости, зависящий от рода жидкости, Па·с;

$\frac{du}{dn}$  – градиент скорости, представляющий собой изменение скорости на единицу расстояния между смежными слоями жидкости в направлении, перпендикулярном движению, 1/с.

Касательные напряжения в неньютоновских жидкостях проявляются еще в покоящихся жидкостях, но при стремлении этих жидкостей прийти в движение.

В технике и инженерной практике зачастую приходится сталкиваться с нарушением сплошности (непрерывности) жидкости. В таких случаях можно выделить границы раздела, отделяющие одну непрерывную среду (фазу) от другой, причем при переходе через такие границы свойства жидкости меняются скачкообразно.

Жидкости, состоящие из нескольких фаз, называются **многофазными (или полифазными)**. Простейшим случаем многофазной жидкости является двухфазная жидкость, например, газированная вода.

Для примера можно назвать следующие многофазные системы:

- газ – твердые частицы (пневмотранспорт);
- газ – капли жидкости (распылители);
- жидкость – пузырьки пара (испарители);
- жидкость – твердые частицы (гидротранспорт).

В МЖГ для облегчения решения некоторых задач используется понятие **идеальной жидкости** (или совершенной жидкости).

Под **идеальной жидкостью** понимают воображаемую жидкость, обладающую абсолютной подвижностью (т. е. лишенную вязкости), абсолютно несжимаемую, не расширяющуюся с изменением темпе-

ратуры, абсолютно неспособную сопротивляться разрыву. Выводы и уравнения, полученные для идеальной жидкости, как правило, приходится корректировать на поправочные коэффициенты.

**Реальная жидкость** – это жидкость, обладающая свойством вязкости, сжимаемостью и расширением, т. е. это жидкость, реально существующая в природе.

К основным физическим свойствам жидкости, которые наиболее часто используются в гидравлических расчетах, относятся плотность, удельный вес, вязкость, температурное расширение, объемное сжатие и т. д.

**Плотность.** *Плотностью жидкости*  $\rho$  называется ее масса, заключенная в единице объема:

$$\rho = \frac{M}{W},$$

где  $M$  – масса жидкости в объеме  $W$ .

Единица измерения  $\rho$  в СИ:  $\text{кг/м}^3$ .

Ниже приводятся значения плотностей некоторых жидкостей.

Таблица 1

Некоторые значения плотности жидкости при различных температурах

Жидкость		$\rho, \text{кг/м}^3$
Вода	(при $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ )	999,9
	(при $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$ )	1000
	(при $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )	998,2
	(при $t = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ )	992,2
	(при $t = 99 \text{ }^\circ\text{C}$ )	959,1
Вода морская (при $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )		1002–1029
Нефть (при $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )		850–950
Ртуть (при $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )		13547
Масло для гидравлических систем		до 850

В практических приложениях о массе жидкости судят по ее весу. Вес жидкости, приходящийся на единицу объема, называется **удельным весом жидкости**:

$$\gamma = \frac{G}{W},$$

где  $G$  – вес жидкости, Н;

$W$  – объем жидкости, м<sup>3</sup>.

Единица измерения в СИ: Н/м<sup>3</sup>.

Плотность и удельный вес жидкости изменяются с изменением давления и температуры. Эта зависимость существенно различна для жидкостей и газов. Численные значения  $\rho$  и  $\gamma$  можно найти в справочной и технической литературе в зависимости от величины температуры  $t$  и давления  $p$ .

В отличие от капельных жидкостей газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газа от давления и температуры устанавливается уравнением состояния.

Наиболее простыми свойствами обладает идеальный (совершенный) газ, у которого отсутствует взаимодействие между его молекулами.

Для совершенного газа справедливо уравнение Клапейрона, позволяющее определить плотность газа  $\rho$  при известных давлении и температуре:

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где  $p$  – абсолютное давление, Па;

$R$  – удельная газовая постоянная, различная для разных газов, но не зависящая от температуры и давления (для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг·К)), Дж/(кг·К);

$T$  – абсолютная температура, К.

Поведение реальных газов в условиях, далеких от сжижения, незначительно отличается от поведения идеальных газов, и для них в широких пределах можно использовать уравнения состояния совершенных газов.

Например, плотность воздуха при  $R = 287$  Дж/(кг·К) в нормальных условиях ( $t = 20$  °С;  $p = 101325$  Па) будет равна:

$$\rho_0 = \frac{101325}{287(273 + 20)} = 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность воздуха при других условиях определяется по формуле:

$$\rho_0 = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

Для изотермического процесса ( $T = \text{const}$ ) из предыдущей формулы получаем:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const};$$

для адиабатического процесса:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const};$$

для политропного процесса:

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const},$$

где  $k$  и  $n$  – соответственно показатели адиабаты и политропы.

Так как объем газа в большой мере зависит от температуры и давления, выводы, полученные при изучении капельных жидкостей, можно распространить на газы лишь в том случае, когда в пределах рассматриваемого явления изменения давления и температуры незначительны. Значительные разности давлений, вызывающие существенное изменение плотности газов, могут возникнуть при их давлении с большими скоростями. Практически газ можно принимать несжимаемым при скоростях движения, не превышающих 100 м/с.

**Сжимаемость.** Сжимаемость капельных жидкостей под действием давления характеризуется *коэффициентом объемного сжатия*  $\beta_p$ , который выражает собой относительное изменение объема жидкости при увеличении давления на единицу, т. е.

$$\beta_p = -\frac{\Delta W}{W_0} \frac{1}{\Delta p},$$

где  $\Delta W$  – изменение объема жидкости, м<sup>3</sup>;

$W_0$  – первоначальный объем жидкости, м<sup>3</sup>;

$\Delta p$  – изменение давления, Па.

Единица измерения  $\beta_p$  в СИ: м<sup>2</sup>/Н (Па<sup>-1</sup>).

Знак «–» в формуле обусловлен тем, что при увеличении давления на  $\Delta p$  первоначальный объем  $W_0$  уменьшается на  $\Delta W$ .

Величина, обратная  $\beta_p$ , называется модулем объемной упругости жидкости  $E_{ж}$ , Па,

$$E_{ж} = \frac{1}{\beta_p}.$$

На величину коэффициента объемного сжатия для капельных жидкостей практически не влияет изменение температуры (табл. 2) и давления.

Таблица 2

Средние значения  $\beta_p$  и  $E_{ж}$  для воды

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30
$\beta_p \cdot 10^{10}, \text{Па}^{-1}$	5,12	4,93	4,74	4,66
$E_{ж} \cdot 10^{-8}, \text{Па}$	19,52	20,30	21,30	21,48

В среднем для воды можно принять, что с увеличением давления на  $1 \cdot 10^6$  Па объем воды уменьшается на  $1/21000$  своей первоначальной величины, для других капельных жидкостей величина  $\beta_p$  примерно того же порядка.

*Таким образом, при обычных температурах и давлениях сжимаемостью капельной жидкости можно пренебречь и рассматривать ее как несжимаемую.* Однако при расчете гидравлического удара и в случаях, когда жидкость находится под большим давлением (например, нефть, залегающая в толщах горных пород, вода в нижних слоях морей и океанов), необходимо учитывать влияние давления на объем капельной жидкости.

**Температурное расширение.** Температурное расширение капельных жидкостей характеризуется *коэффициентом темпера-*

**турного расширения**  $\beta_t$ , выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на  $1^\circ\text{C}$ :

$$\beta_t = \frac{\Delta W}{W_0} \frac{1}{\Delta t},$$

где  $\Delta W$  – увеличение объема жидкости,  $\text{м}^3$ ;  
 $W_0$  – первоначальный объем жидкости,  $\text{м}^3$ ;  
 $\Delta t$  – повышение температуры жидкости,  $^\circ\text{C}$ .  
Единица измерения в СИ:  $1/^\circ\text{C}$ .

Для воды коэффициент температурного расширения  $\beta_t$  с увеличением температуры и давления возрастает.

Так, при  $t = 0^\circ\text{C}$  и  $p = 0,1$  МПа,  $\beta_t = 14 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ , а при  $t = 100^\circ\text{C}$  и  $p = 10$  МПа,  $\beta_t = 700 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ . При атмосферном давлении и температуре  $t = (10-20)^\circ\text{C}$  для нефти  $\beta_t = (600-800) \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ , для ртути  $\beta_t = 1300 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ .

Из приведенных примеров следует, что коэффициент  $\beta_t$  капельных жидкостей незначителен и в условиях инженерной практики увеличением объема жидкости при росте температуре можно пренебречь.

**Растворимость газов в жидкостях.** Количество растворенного газа в единице объема жидкости зависит от давления и рода жидкости. Для определения относительного объема газа, растворенного в жидкости до ее полного насыщения, можно воспользоваться зависимостью:

$$\frac{W_\Gamma}{W_\text{ж}} = k \frac{p_2}{p_1},$$

где  $W_\Gamma$  – объем растворенного газа при нормальных условиях ( $0^\circ\text{C}$ ,  $p = p_\text{ат}$ ),  $\text{м}^3$ ;

$W_\text{ж}$  – объем жидкости,  $\text{м}^3$ ;

$k$  – коэффициент растворимости;

$p_1$  и  $p_2$  – начальное и конечное давления газов, Па.

Коэффициент  $k$  воздуха при  $t = 20^\circ\text{C}$  имеет следующие значения:

– для воды – 0,016;

– для керосина – 0,127;

– трансформаторного масла – 0,083;

– для индустриального масла – 0,076.

При понижении давления в жидкости выделяется растворенный в ней газ. Этот процесс происходит интенсивнее, чем растворение газа в жидкости.

**Сопrotивление растягивающим усилиям.** Между частицами жидкости вследствие межмолекулярного взаимодействия имеются силы сцепления. Они обуславливают поверхностное натяжение на свободной поверхности жидкости и при сцеплении ее с твердым телом (смачивание). Внутри жидкости силы сцепления не проявляются (они действуют на каждую молекулу во всех направлениях, и их действие взаимно уравнивается). Благодаря поверхностному натяжению капельная жидкость стремится принять такую форму, при которой ее поверхность была бы минимальна. Наибольшие объемы жидкости приобретают форму капли (отсюда и название – капельные). При отсутствии внешних сил, когда действуют только силы сцепления между частицами (например, в условиях невесомости), жидкость приобретает форму шара.

В опытах со специально подготовленной водой (тщательно очищенной и дегазированной) были получены кратковременные напряжения растяжения до 28 МПа. Однако обычные жидкости, содержащие взвешенные твердые частицы и мельчайшие пузырьки газов, практически не сопротивляются растягивающим силам. Например, для обычной воды растягивающие напряжения равны всего 0,35 МПа, что примерно в  $10^7$  раз меньше, чем для мягкой стали. Поэтому в большинстве случаев при решении практических задач в МЖГ принято считать, что напряжение растяжения в капельных жидкостях невозможны.

**Вязкость.** *Вязкостью* называется свойство жидкости оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) ее частиц. Это свойство противоположно текучести: более вязкие жидкости (например, глицерин, смазочные масла, мазут и др.) обладают меньшей текучестью, и наоборот. Вязкость жидкости обуславливается наличием сил сопротивления сдвигу, называемых силами внутреннего трения. Они возникают в реальной жидкости только при ее движении.

На рисунке представлена эпюра скорости при движении вязкой жидкости вдоль неподвижной твердой стенки. Слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенке, как бы «прилипает» к ней и имеет скорость, равную нулю. По мере удаления от стенки и соответствующего уменьшения тормозящего влияния ее скорость отдельных слоев



жидкости увеличивается. Согласно гипотезе Ньютона, подтвержденной многочисленными опытами Н. П. Петрова, продольная сила внутреннего трения  $T$ , возникающая между двумя слоями вязкой жидкости,двигающейся прямолинейно, определяется равенством:

$$T = \pm \mu S \frac{du}{dn},$$

где  $\mu$  – коэффициент пропорциональности, называемый динамическим коэффициентом вязкости, Па·с;

$S$  – площадь соприкосновения слоев, м<sup>2</sup>;

$\frac{du}{dn}$  – градиент скорости, 1/с.

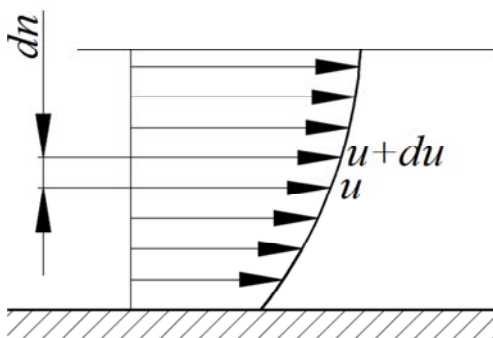


Рис. 1. Профиль скоростей при течении вязкой жидкости вдоль стенки

Из предыдущего выражения следует, что

$$\tau = \frac{T}{S} = \pm \mu \frac{du}{dn},$$

где  $\tau$  – сила трения, приходящаяся на единицу площади  $S$  (касательное напряжение), Па.

Из этого выражения следует, что коэффициент  $\mu$  имеет физический смысл, т. е.  $\mu = \tau$  при  $\frac{du}{dn} = 1$ .

Знак «плюс» или «минус» в двух предыдущих выражениях выбирается в зависимости от знака градиента скорости так, чтобы  $T$  и  $\tau$  были положительными.

Кроме динамического коэффициента вязкости  $\mu$  в практических расчетах используется и *кинематический коэффициент вязкости*  $\nu$ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

единица измерения которого:

$$\nu = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

С изменением температуры жидкости изменяется ее вязкость. Так, для капельных жидкостей характерно уменьшение вязкости с повышением температуры. Для газов, в том числе и воздуха, повышение температуры приводит к увеличению вязкости.

Таблица 3

Значения коэффициентов вязкости некоторых жидкостей

Жидкость	$t, ^\circ\text{C}$	$\mu \cdot 10^{-3}, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\nu \cdot 10^{-6}, \text{м}^2/\text{с}$
Вода пресная	20	1,01	1,01
	50	0,54	0,55
Бензин	15	0,65	0,93
Керосин	15	2,17	2,70
Нефть легкая	18	17,8	25,0
Мазут	18	3870,0	2000,0

С ростом давления вязкость жидкости возрастает. Так, например, вязкость минеральных масел при повышении давления от 0 до 150 МПа увеличивается в 17 раз, до 400 МПа – в сотни раз. При давлениях порядка 1500–2000 МПа масла затвердевают. Вода при давлении 840 МПа ( $t = 20 ^\circ\text{C}$ ) также превращается в твердое тело.

Однако при изменении давления до 5 МПа ( $50 \text{ кгс/см}^2$ ) увеличение вязкости жидкости по сравнению с вязкостью ее при атмосферном давлении незначительно, и им при расчетах пренебрегают.

В инженерной практике, в научно-технических исследованиях и технике вязкость жидкости измеряется с помощью специальных приборов, называемых вискозиметрами, например, вискозиметры Энглера, Хоплера, Оствальда-Пинкевича и т. д. В технике наиболее широкое применение получил вискозиметр Энглера. Более подробно конструкции вискозиметров и методы измерения вязкости жидкости рассматриваются при проведении лабораторных и практических занятий по дисциплине МЖГ.

#### 4. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖИДКОСТЬ

Жидкость находится в абсолютном (по отношению к Земле) или в относительном покое, если ее частицы не перемещаются по отношению друг к другу. При этом на жидкость действуют силы, имеющую различную природу.

Силы, действующие на жидкость, условно делят на два основных вида:

1) *внутренние силы* – силы межмолекулярного взаимодействия частиц жидкости (действие этих сил в дальнейшем не рассматривается);

2) *внешние силы* – силы, действующие на массу (или объем) жидкости и на ее поверхность со стороны окружающей среды.

Действие внешних сил является определяющим при изучении законов равновесия и движения жидкости.

Внешние силы, действующие на покоящийся объем жидкости, в свою очередь, могут быть разделены на две группы.

1. **Массовые (или объемные) силы**, величина которых пропорциональна массе или объему жидкости. Эти силы действуют на все частицы выделенного объема жидкости. Примером массовых сил являются сила тяжести  $G$ , сила инерции  $F_{ин}$ , центробежная сила  $F_{ц}$  и др.

2. **Поверхностные силы**, величина которых пропорциональна площади внешней поверхности выделенного объема жидкости. Причем поверхностные силы действуют в каждой точке внешней поверхности выделенного объема жидкости. Примером поверхностных

сил являются силы бокового гидростатического давления  $P$ , силы атмосферного давления на поверхность жидкости  $P_{\text{атм}}$ , силы поверхностного натяжения жидкости  $P_{\sigma}$ , силы трения  $T$  или  $F_{\text{тр}}$  и т. д.

В заключении следует отметить, что жидкость представляет собой напряженную деформируемую среду, внутри которой действуют нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения. Напряженное состояние жидкости в механике и математике хорошо описывается тензором напряжений:

$$T_{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{vmatrix}.$$

В тензоре напряжений величины  $\tau_{xx} = \sigma_x$ ;  $\tau_{yy} = \sigma_y$ ;  $\tau_{zz} = \sigma_z$  называют нормальными напряжениями, а величины  $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ ;  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ;  $\tau_{zy} = \tau_{yx}$  называют касательными напряжениями. Возникновение в жидкости касательных напряжений  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  и  $\tau_z$  вызвано одновременным влиянием двух факторов: движением жидкости и ее вязкостью. В связи с этим можно сделать вывод, что жидкость будет находиться в состоянии покоя лишь в том случае, когда внутри нее отсутствует действие касательных напряжений  $\tau$  (т. е.  $\tau = 0$  или  $\tau \rightarrow 0$ ). В покоящейся жидкости действуют только нормальные напряжения  $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$ ;  $\sigma_z$ , которые обозначаются символами  $p_x$ ;  $p_y$ ;  $p_z$  и называются *гидростатическим давлением*.

## 5. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим некоторый объем жидкости, находящейся в покое (рис. 2). Произвольной плоскостью  $A-A$  мысленно разрежем его на две части. Часть объема  $I$  отбросим так, чтобы объем  $II$  остался в состоянии покоя. Действие отброшенной части объема  $I$  заменим сосредоточенной силой  $P$ .

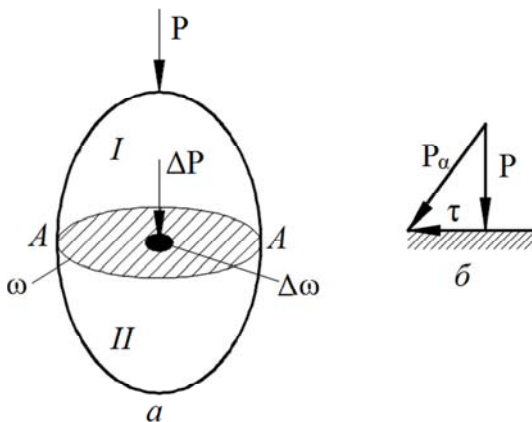


Рис. 2. Схема покоящегося объема жидкости

Сила  $P$ , действующая на общую площадь  $\omega$  в плоскости  $A-A$ , называется **суммарной силой гидростатического давления** или просто **силой гидростатического давления**.

Если на секущей плоскости выделить элементарную площадку  $\Delta\omega$ , то на нее будет действовать часть суммарной силы  $P - \Delta P$ . Давление, определяемое выражением

$$\bar{p} = \frac{\Delta P}{\Delta\omega},$$

называется **средним гидростатическим давлением**.

Обобщая, можно утверждать, что часть силы  $P$ , приходящаяся на единицу площади  $\omega$ , называется **средним гидростатическим давлением** или **средним гидростатическим напряжением**, величину которого можно определить, используя выражение

$$\bar{p} = \frac{P}{\omega}.$$

В инженерной практике часто необходимо знать (или определить) величину давления  $p$  в любой точке жидкости. В этом случае **давление** в любой точке жидкости будет равно пределу отношения силы давления к площадке действия, если площадь ее стремится к нулю:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}. \quad (1)$$

Таким образом, гидростатическое давление  $p$  внутри жидкости представляет собой напряжение сжатия в любой точке жидкости.

Гидростатическое давление обладает следующими **тремя основными свойствами**:

1. *Гидростатическое давление направлено нормально к поверхности, на которую оно действует, и создает только сжимающее напряжение.* Действительно, в жидкости практически не возникают растягивающие напряжения, а если она находится в покое, то в ней нет касательных напряжений. Не может давление действовать и на площадку под углом, отличающимся от  $90^\circ$ , так как в этом случае его можно было бы разложить на нормальное и касательное (рис. 2, б). Касательные напряжения могут возникать только при движении жидкости, поэтому в рассматриваемом случае давление может быть только нормальным к площадке и создавать только сжимающие напряжения.

2. *В любой точке жидкости гидростатическое давление одинаково по всем направлениям.* Для доказательства этого свойства выделим в рассматриваемом объеме жидкости призму с основанием в виде треугольника  $ABC$  (рис. 3, а) и заменим действие объема жидкости вне призмы на ее боковые грани соответствующими силами. Так как призма находится в равновесии, то многоугольник (в данном случае треугольник) этих сил будет замкнут (рис. 3, б). Треугольник сил подобен треугольнику  $ABC$  и из закона подобия следует, что

$$\frac{P_{AB}}{AB} = \frac{P_{BC}}{BC} = \frac{P_{CA}}{CA}.$$

Разделим все члены этого равенства на длину призмы  $\Delta l$ :

$$\frac{P_{AB}}{AB \cdot \Delta l} = \frac{P_{BC}}{BC \cdot \Delta l} = \frac{P_{CA}}{CA \cdot \Delta l}.$$

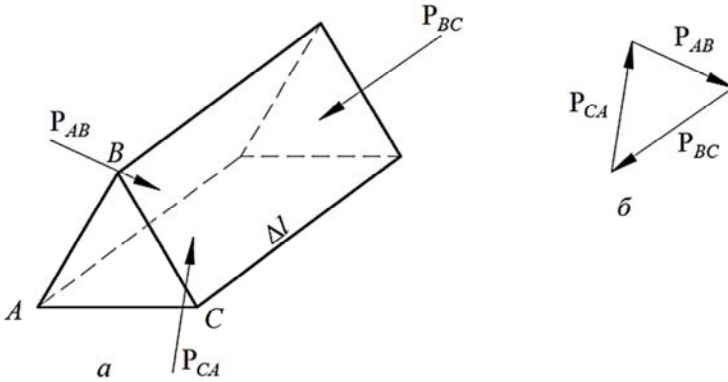


Рис. 3. Схема к доказательству второго свойства гидростатического давления

Произведения в знаменателях этого выражения представляют площади соответствующих граней призмы. Если размеры  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $\Delta l$  будут стремиться к нулю, то в соответствии с выражением (1) получим:

$$p_{AB} = p_{BC} = p_{CA} = p.$$

Так как ориентация граней призмы была принята произвольно, то следует считать доказанным положение о равенстве в одной точке по всем направлениям.

3. С учетом изложенного выше гидростатическое давление в точке зависит только от ее положения в пространстве, т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

## 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ Л. ЭЙЛЕРА)

Выделим в покоящейся жидкости элементарный прямоугольный параллелепипед (рис. 4). Оси прямоугольных координат расположим параллельно его ребрам. В центре тяжести каждой грани параллелепипеда приложим силу гидростатического давления, заменяющую действие на нее окружающей массы жидкости. Эти силы, согласно первому свойству гидростатического давления, будут направлены по нормали внутрь параллелепипеда. Каждая из рассматриваемых сил равна произведению гидростатического давления в центре тяжести данной грани параллелепипеда на ее площадь.

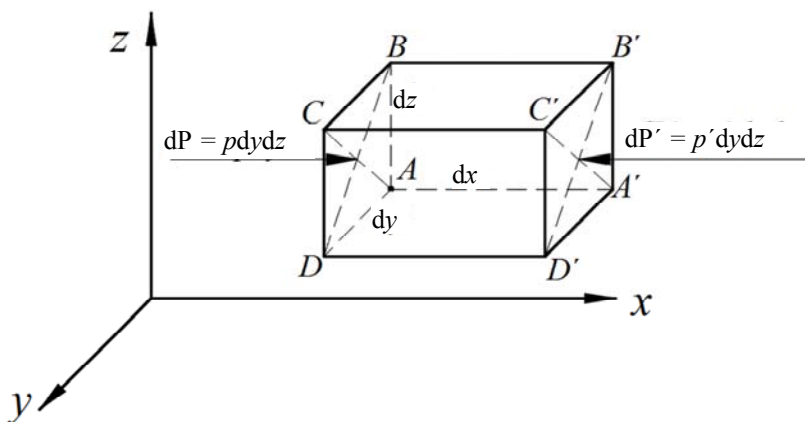


Рис. 4. Схема к выводу уравнений равновесия жидкости

Полагая, что прямоугольный параллелепипед – это твердое тело, составляем три уравнения проекций действующих сил:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum F_z = 0$ . Уравнение моментов исключаются.

Составим уравнение проекций сил на ось  $Ox$ , т. е. уравнение  $\sum F_x = 0$ .

**Проекции поверхностных сил.** По числу граней параллелепипеда имеем шесть проекций. В уравнение  $\sum F_x = 0$  войдут только две силы  $dP$  и  $dP'$  (рис. 4).



Сила  $dP$  давления на грань  $ABCD$ :

$$dP = p dydz,$$

где  $p$  – среднее гидростатическое давление на грани  $ABCD$ .

Сила  $dP'$  давления на грань  $A'B'C'D'$ :

$$dP' = p' dydz,$$

где  $p'$  – среднее гидростатическое давление на грани  $A'B'C'D'$  ( $p' \neq p$ ).

Определим  $p'$ . Так как  $p = f(x, y, z)$ , то при переходе от одной грани к другой давление должно изменяться в зависимости только от одной координаты. Действительно, при переходе от любой точки грани  $ABCD$  к сходственной ей точке грани  $A'B'C'D'$  (например, от точки  $A$  к точке  $A'$ , от  $B$  к  $B'$  и т. д.) для каждой такой пары сходственных точек изменяется только одна координата  $x$ , а потому изменение среднего гидростатического давления  $p$  зависит только от изменения одного аргумента  $x$ .

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

$$dP' = p' dydz = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz.$$

Сила  $dP'$  войдет в уравнение проекции со знаком «минус».

**Проекция объемных сил.** Проекция объемной силы  $dG$  (на схеме условно не показана) равна произведению массы жидкости на соответствующую проекцию ускорения объемной силы:

$$dG_x = \rho dx dy dz X,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$dx dy dz$  – объем выделенного элемента жидкости;

$X$  – проекция ускорения силы  $dG$  на ось  $Ox$ .

Суммируя указанные проекции поверхностных и объемных сил, получаем уравнение  $\sum F_x = 0$ :

$$\sum F_x = p dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + p dx dy dz X = 0.$$

После приведения подобных членов и деления на произведение  $dx dy dz$  (объем параллелепипеда  $dW$ ) получим уравнение проекций сил, отнесенных к единице объема на ось  $Ox$ :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0.$$

Аналогично получим и два других уравнения относительно осей  $Oy$  и  $Oz$ :  $\sum F_y = 0$  и  $\sum F_z = 0$ . Итак, при равновесии жидкости имеем три дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y = 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{cases}$$

Эта система называется **системой дифференциальных уравнений равновесия жидкости Эйлера** и относится как к несжимаемой, так и к сжимаемой жидкости.

Каждое уравнение характеризует изменение давления при изменении одной из координат. Для установления закономерности изменения давления при изменении нескольких координат следует рассмотреть уравнения Эйлера совместно для соответствующих координатных осей. Умножим 1-е уравнение на  $dx$ , 2-е – на  $dy$ , 3-е – на  $dz$  и почленно просуммируем эти уравнения. В результате получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz).$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал давления  $dp$ :

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *основным дифференциальным уравнением гидростатики*. Выражение в скобках правой части этого уравнения также может быть представлено в виде полного дифференциала некоторой потенциальной функции  $\Pi$ , частные производные которой равны:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Z.$$

Тогда

$$dp = \rho d\Pi. \quad (3)$$

В результате интегрированием уравнения (3) получим:

$$p = \rho\Pi + C.$$

В частных случаях в зависимости от конкретных значений проекций ускорений массовых сил  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  определяются соответствующие значения потенциальной функции  $\Pi$ , постоянной интегрирования  $C$  и давления  $p$ .

Из выражения (2) можно получить уравнение для поверхности равного давления (поверхности уровня). При  $\rho = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$   $dp = 0$ , тогда

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (4)$$

Поверхность равного давления, в пределах которой  $p = p_{\text{ат}}$  (где  $p_{\text{ат}}$  – атмосферное давление), называется **пъезометрической плоскостью**.

## 7. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ

### 7.1. Основное уравнение гидростатики

В данном случае объемной или массовой силой является сила тяжести  $G$  и полное ускорение объемных сил равно ускорению свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Направим координатную ось  $Oz$  вертикально вверх, тогда из основного дифференциального уравнения гидростатики (2) после подстановки  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$  получим:

$$dp = -\rho g dz$$

или

$$\frac{dp}{\rho g} = -dz,$$

после интегрирования для несжимаемой жидкости:

$$\frac{p}{\rho g} + z = C = \text{const.}$$

Постоянную интегрирования находим из граничных условий. Для свободной поверхности (рис. 5) имеем:

$$p = p_0 \text{ и } z = z_0,$$

где  $p_0$  – давление на свободной поверхности жидкости, обычно  $p_0 = p_{\text{ат}}$ . Следовательно,

$$C = \frac{p_0}{\rho g} + z_0.$$

Отсюда

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = H' = \text{const.} \quad (5)$$



Рис. 5. Схема к выводу основного уравнения гидростатики

Уравнение (5) называется **основным уравнением равновесия жидкости в поле тяготения или основным уравнением гидростатики**. Это уравнение можно записать и так:

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z),$$

учитывая, что величина  $z_0 - z = h$  является глубиной погружения произвольной точки под уровень жидкости, основное уравнение гидростатики можно записать в следующем виде:

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (6)$$

где  $p_0$  – внешнее давление или давление на поверхности жидкости, которое по закону Паскаля передается во все точки жидкости без изменения.

## 7.2. Геометрическое и энергетическое понимание основного уравнения гидростатики

Основное уравнение гидростатики (5), записанное в единицах длины или линейных размерностях, имеет геометрический смысл:

$$\frac{p}{\rho g} + z = H' = \text{const},$$

где  $z$  – геометрическая высота (или напор, м), которая определяется как расстояние от произвольно выбранной плоскости 0–0 (плоскости сравнения 0х на рис. 5) до произвольно выбранной точки внутри жидкости;

$p/\rho g$  – пьезометрическая высота (напор, м), которая определяется высотой поднятия жидкости в простейшем приборе для измерения давления – пьезометре;

$p/\rho g + z = H'$  – потенциальная высота (напор, м), которая определяет собой величину потенциальной энергии жидкости, отнесенной к ее единице веса.

Основное уравнение гидростатики (5) можно легко выразить в единицах работы (или энергии), для этого достаточно умножить уравнение на единицу силы (1 Н), тогда все слагаемые будут выражены в единицах работы или энергии, т. е. Дж.

$$\rho g z + p = p' = \text{const},$$

Понятно, что т. к. жидкость находится в равновесии, она обладает только потенциальной энергией. Следовательно, каждое слагаемое, входящее в основное уравнение гидростатики, представляет собой соответствующий вид потенциальной энергии:

$p/\rho g$ , Дж – удельная потенциальная энергия, определяемая гидростатическим давлением. Это слагаемое можно рассматривать как энергию давления;

$z$ , Дж – удельная потенциальная энергия положения (т. е. данная масса жидкости расположена на высоте  $z$  относительно плоскости сравнения 0–0);

$(p/\rho g + z) = H'$ , Дж – полный запас удельной потенциальной энергии (отнесенной к той массе, вес которой равен 1 Н, т. е. к мас-

$$\text{се } m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9,81} \text{ кг} = 0,103 \text{ кг}).$$

### 7.3. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум

Численная величина давления в зависимости от выбора начала отсчета может быть различной. При отсчете от абсолютного нуля (давление в пустоте), оно называется **абсолютным или полным**

$p_{абс}$  (рис. 6). В технике за начало отсчета часто принимают величину атмосферного или барометрического давления  $p_{ат}$ . Если абсолютное давление больше атмосферного, то разность между ними называют **избыточным или манометрическим давлением** (рис. 6), т. е.

$$P_{изб} = P_{ман} = P_{абс} - P_{ат}. \tag{7}$$

В открытом сосуде с жидкостью, когда давление на свободной поверхности  $p_0 = p_{ат}$ , исходя из уравнений (6) и (7), получим:

$$p_{изб} = \rho gh. \tag{8}$$

Таким образом, избыточное давление в точке жидкости в открытом сосуде зависит от рода жидкости и глубины погружения точки под свободную поверхность.

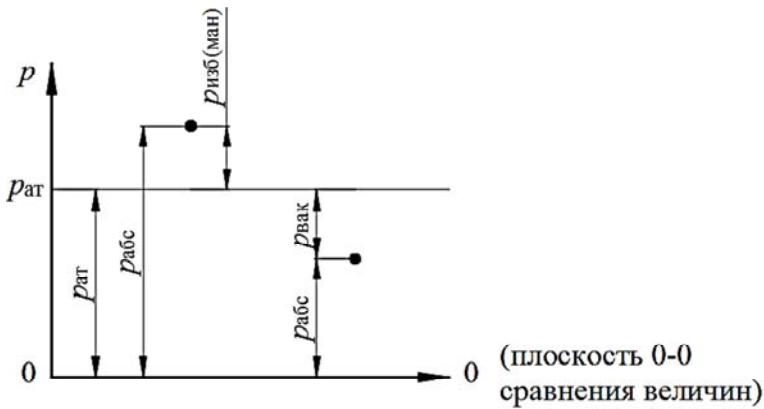


Рис. 6. Схема вертикальной шкалы давлений  $p$  относительно плоскости сравнения величины 0–0

Если абсолютное давление меньше атмосферного, то разность между атмосферным и абсолютным давлением называют вакуумом или вакуумметрическим давлением (рис. 6):

$$P_{вак} = P_{ат} - P_{абс}. \tag{9}$$

Следовательно, **вакуум или вакуумметрическое давление** – это недостаток давления в данной точке до атмосферного, величину которого можно определить, как  $p_{\text{вак}} = -\rho gh$ .

**Единицы измерения давления.** Так как под давлением понимается сила, приходящаяся на единицу площади, то размерность давления будет  $p = \text{ед. силы} / \text{ед. площади}$ .

В технической системе единиц давление измеряется в  $\text{кгс}/\text{м}^2$  и  $\text{кгс}/\text{см}^2$ . Давление, равное  $1 \text{ кгс}/\text{см}^2$ , называется **технической атмосферой** (ат). Атмосферное давление на уровне моря (барометрическое давление), равное 760 мм рт. ст., называется **физической атмосферой** (атм). Однако в инженерной практике часто принимают давление на уровне моря равным  $1 \text{ кгс}/\text{см}^2$ . Абсолютное и избыточное давления, а также вакуум, выраженные в атмосферах, обозначаются соответственно  $p_{\text{ата}}, p_{\text{ати}}, p_{\text{атв}}$ .

В Международной системе единиц (СИ) давление измеряется в  $\text{Н}/\text{м}^2$ . Единица давления, равная  $1 \text{ Н}/\text{м}^2$ , носит название Паскаль (Па), причем  $10^3 \text{ Па} = 1 \text{ кПа}$  (килопаскаль),  $10^6 \text{ Па} = 1 \text{ МПа}$  (мегапаскаль).

$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс}/\text{см}^2 = 10^4 \text{ кгс}/\text{м}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Н}/\text{м}^2 (\text{Па}) = 98,1 \text{ кПа} = 0,0981 \text{ МПа} \approx 0,1 \text{ МПа} = 10 \text{ м вод. ст.} = 735 \text{ мм рт. ст.}$

$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 10,336 \text{ м вод. ст.} = 101396 \text{ Па} = 101,4 \text{ кПа} = 0,1014 \text{ МПа} \approx 0,1 \text{ МПа}$ .

Так как техническое атмосферное давление ( $1 \text{ ат} \approx 0,0981 \text{ МПа} \approx 0,1 \text{ МПа}$ ) и физическое атмосферное давление ( $1 \text{ атм} = 0,1014 \text{ МПа} \approx 0,1 \text{ МПа}$ ) приблизительно равны величине  $p_{\text{ат}} = p_{\text{атм}} \approx 0,1 \text{ МПа}$ , то в инженерных расчетах давление в 1 атмосферу часто принимается равным  $p_{\text{ат}} = 0,1 \text{ МПа} = 10^5 \text{ Па} = 100 \text{ бар}$  (где  $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$ ).

Давление может быть выражено высотой столба жидкости над рассматриваемой точкой. Исходя из основного уравнения гидростатики (1.6) высота столба жидкости:

$$h = \frac{p}{\rho g}, \quad (10)$$

где  $p$  может быть абсолютным, избыточным давлением или вакуумом.



Из (10) следует, что одно и то же давление в зависимости от рода жидкости (плотности  $\rho$ ) создается столбом различной высоты. Так, например, давление  $1,033 \text{ кгс/см}^2$  соответствует столбу жидкости высотой  $h$ , равной: для воды –  $10,33 \text{ м}$ , для бензина (при  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ) –  $13,8 \text{ м}$ , ртути –  $0,760 \text{ м}$ .

#### 7.4. Приборы для измерения давления

Для измерения давления жидкости или газа применяются различные приборы: манометры – для измерения избыточного (или манометрического) давления, вакуумметры – для измерения вакуума, дифференциальные манометры – для измерения разности (перепада) давлений в двух точках (например, в двух сосудах). Эти приборы могут быть жидкостными, механическими (пружинными, поршневыми), электрическими, электрохимическими, лазерными, термическими и комбинированными. Наиболее широкое распространение в технике получили жидкостные и механические приборы.

Жидкостные приборы наиболее точные, но они измеряют давление небольшой величины. Механические приборы измеряют величину большого давления, но с наименьшей точностью. Рассмотрим принцип действия некоторых из них.

Жидкостной манометр (рис. 7) – пьезометр, который представляет собой стеклянную трубку, нижний конец которой соединен с атмосферой. Если давление на свободной поверхности жидкости в закрытом сосуде больше атмосферного, то уровень в пьезометрической трубке поднимется на высоту  $h_p$ , называемую пьезометрической высотой. Ее измерение производится по установленной строго вертикально линейной шкале. Высоту столба жидкости в пьезометре  $h_p$  можно найти из условия равновесия жидкости. Абсолютное давление в точке  $A$  (точка подключения пьезометра к сосуду) со стороны жидкости в пьезометре, исходя из уравнения (6), может быть выражено в следующем виде:

$$p_{\text{абс}}^A = p_{\text{ат}} + \rho g h_p. \quad (11)$$

$$h_p = \frac{p_{\text{абс}}^A - p_{\text{ат}}}{\rho g} = \frac{p_{\text{изб}}^A}{\rho g}. \quad (12)$$

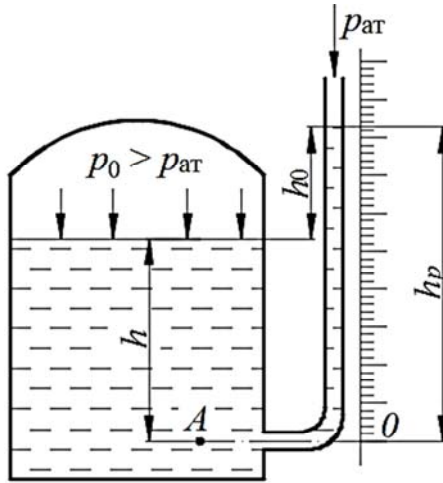


Рис. 7. Пьезометр

Таким образом, по высоте столба жидкости в пьезометре с открытым верхним концом можно определить величину избыточного давления в сосуде на уровне точки подключения.

Для точки  $A$ , находящейся под свободной поверхностью в сосуде на глубине  $h$ ,

$$p_{\text{абс}}^A = p_0 + \rho gh, \quad (13)$$

где  $p_0$  – давление на свободной поверхности в сосуде.

На основании второго свойства гидростатического давления в точке  $A$  давления со стороны жидкости в сосуде и в пьезометре равны. Тогда, приравнявая (11) к (13) и обозначая  $h_p - h = h_0$  (рис. 1.6), получим:

$$h_0 = \frac{p_0 - p_{\text{ат}}}{\rho g} = \frac{p_{0, \text{изб}}}{\rho g}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что разность высот уровней в пьезометре и сосуде характеризует избыточное давление на свободной поверхности жидкости в сосуде.

Если в сосуде абсолютное давление над свободной поверхностью будет равно атмосферному (сосуд открытый), то уровень в пьезометре установится на той же высоте, что и в сосуде, и  $h_p = h$ . Это явление, называемое *законом сообщающихся сосудов*, используется для измерения уровня жидкости в сосудах при помощи уровнемеров или водомерных стекол.

Для измерения небольших давлений (не более 0,15–0,20 ати) применяются *пьезометры*, наполненные водой, для больших давлений, но не свыше 2,0–2,5 ати (0,2–0,25 МПа) – пьезометры, наполненные ртутью, так называемые ртутные манометры.

Для увеличения точности при измерении малых давлений используется *наклонный микроманометр* (рис. 8). По его шкале вместо величины  $h_p$  отсчитывается значительно большая величина  $l = \frac{h_p}{\sin \alpha}$ , что уменьшает относительную ошибку, возможную при изменении малых величин. Угол наклона манометрической трубки  $\alpha$  можно изменять, при этом уменьшение угла наклона способствует увеличению точности измерений.

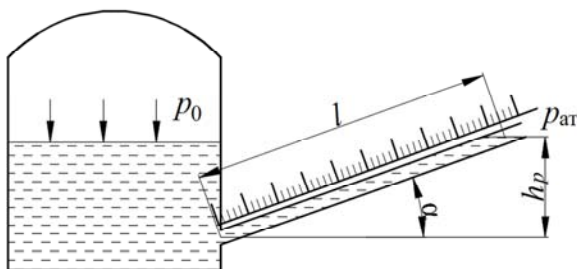


Рис. 8. Микроманометр с наклонной шкалой

Для измерений значительных величин избыточных давлений в жидкостях или газах в практике используются *металлические манометры*. В пружинном манометре (рис. 9) жидкость или газ поступает через штуцер 1 в изогнутую медную или стальную полу трубку-пружинку 2. Под действием избыточного давления трубка-пружинка стремится разогнуться. Движение ее конца при помощи пластинки 3 передается на зубчатку, приводящую в движение стрелку 4, отклонение которой показывает на шкале прибора величину избыточного (манометрического) давления.

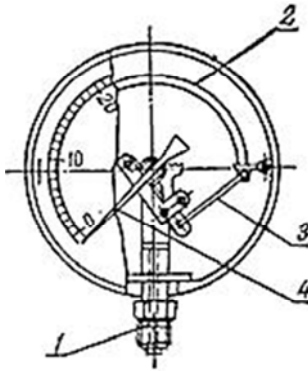


Рис. 9. Пружинный манометр

Для измерения вакуума применяется обратный пьезометр или *вакуумметр* (рис. 10), представляющий собой трубку 1, соединенную с областью вакуума (сосуд 2). Нижний конец трубки опускается в сосуд 3, заполненный жидкостью, свободная поверхность которой находится под атмосферным давлением.

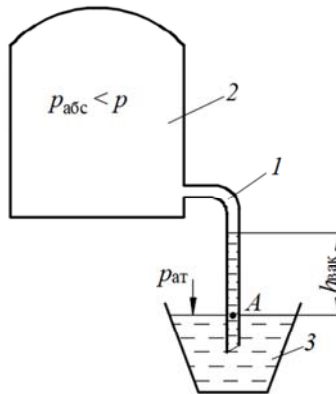


Рис. 10. Вакуумметр

Для точки *A*, находящейся в жидкости в трубке 1 на уровне свободной поверхности в сосуде 3, можно записать, используя основное уравнение гидростатики и второе свойство гидростатического давления, следующее равенство:

$$p_{абс} + \rho g h_{вак} = p_{ат}$$

Откуда следует, что вакуумметрическая высота, т. е. высота поднятия жидкости в вакуумметре (рис. 1.9), составит:

$$h_{\text{вак}} = \frac{P_{\text{ат}} - P_{\text{абс}}}{\rho g} = \frac{P_{\text{вак}}}{\rho g}. \quad (15)$$

Для измерения вакуума применяются и *металлические вакуумметры*, устройство которых аналогично металлическим манометрам. Кроме того, в технике используются *мановакуумметры* – приборы, одна часть шкалы которых показывает манометрическое (избыточное) давление, а другая – вакуум.

Для измерения перепада (разности) давлений в двух точках используются *дифференциальные манометры*, простейшим из которых является *U-образный манометр* (рис. 11). Разность давлений  $\Delta p$  в сосудах *A* и *B* с одной и той же жидкостью (плотностью  $\rho$ ), находящихся на одинаковой высоте (или в двух трубопроводах, а также в двух сечениях одного трубопровода, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии), определяется по разности уровней  $h$  рабочей жидкости (плотностью  $\rho_p$ ) в обоих коленах дифманометра и вычисляется по зависимости:

$$\Delta p = p_B - p_A = (\rho_p - \rho)gh.$$

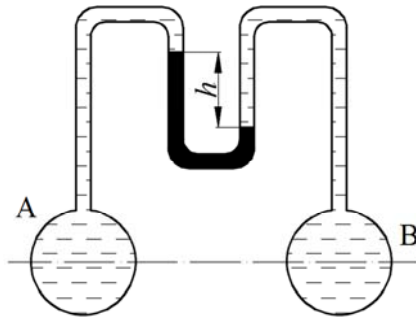


Рис. 11. Дифференциальный U-образный манометр

При больших разностях давлений в качестве рабочей жидкости применяется ртуть, при небольших – масло, спирт и др.

## 7.5. Закон Паскаля и его технические приложения

Из основного уравнения гидростатики (6) видно, что на сколько увеличивается давление на свободной поверхности  $p_0$ , на столько же увеличивается и абсолютное давление в точке жидкости, т. е. *внешнее давление  $p_0$ , приложенное к жидкости в замкнутом сосуде, передается внутри жидкости во все точки без изменения.* В этом и заключается **закон Паскаля**. На его использовании основано действие простейших гидравлических машин: гидравлических прессов, домкратов, подъемников, аккумуляторов, мультипликаторов (повысителей давления) и др.

**Гидравлический пресс** (рис. 12) является одной из наиболее распространенных машин и применяется для обработки материалов давлением. Если к поршню площадью  $\omega$ , двигающемуся в малом цилиндре  $A$ , приложить силу  $P_1$ , то жидкость получит добавочное давление  $p_1 = P_1 / \omega$ . По закону Паскаля это давление распространится во всей жидкости без изменения и передастся на поршень большей площади  $\Omega$ , двигающийся внутри цилиндра  $B$ . Величина усилия, с которым поршень в цилиндре  $B$  будет двигаться вверх, составит:

$$P_2 = p_1 \Omega = P_1 \frac{\Omega}{\omega}. \quad (16)$$

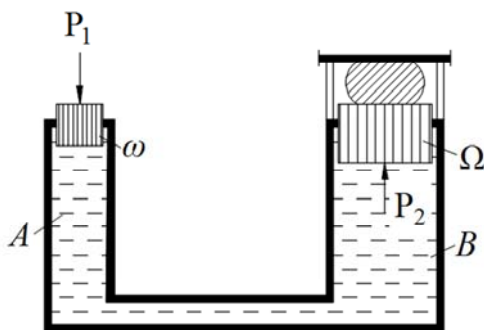


Рис. 12. Гидравлический пресс

Таким образом, сила  $P_2$  во столько раз больше силы  $P_1$ , во сколько раз площадь поршня в цилиндре  $B$  больше площади поршня в цилиндре  $A$ . В действительности вследствие трения в цилиндрах сила  $P_2$  будет несколько меньше, чем получаемая по формуле (16).

Влияние трения учитывается введением в формулу (16) коэффициента полезного действия  $\eta \approx 0,8$ . Давление рабочей жидкости (обычно это масло) в гидравлических прессах создается насосом и составляет 20–30 МПа (200–300 кгс/см<sup>2</sup>). Однако в отдельных случаях, например для синтеза алмазов, оно достигает 450 МПа (4500 кгс/см<sup>2</sup>). Наиболее мощные гидравлические прессы для объемной штамповки развивают усилие 735 МН (примерно 75 000 т).

На принципе гидравлического пресса основано устройство гидравлических домкратов и подъемников, используемых для подъема грузов.

**Гидравлический аккумулятор** (рис. 13) состоит из рабочего цилиндра 1, в котором движется массивный плунжер 2 площадью сечения  $\omega$ . К плунжеру при помощи коромысла 3 подвешены грузы 4. В рабочий цилиндр 1 по трубопроводу 5 подается вода или масло. Под действием давления жидкости плунжер 2 в цилиндре движется вверх. Если обозначим вес плунжера с грузами  $G$ , а высоту поднятия  $h$ , то запас потенциальной энергии аккумулятора составит  $Gh$ . Открытием крана на трубопроводе 6 (при закрытом кране трубопровода 5) сжатая в аккумуляторе жидкость может быть направлена к рабочей машине (например гидравлическому домкрату, подъемнику и т. п.), где за счет запаса потенциальной энергии будет совершена полезная работа.

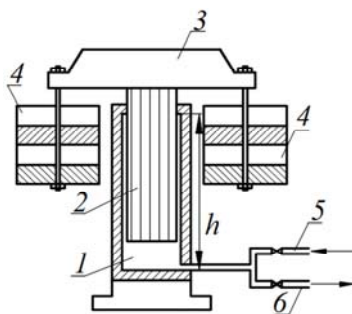


Рис. 13. Гидравлический аккумулятор

Давление жидкости, необходимое для зарядки аккумулятора, должно быть  $p_1 = G / \omega$ , а рабочее давление при разрядке  $p_2 = \eta p_1$ , где  $\eta < 1$  – к. п. д. гидравлического аккумулятора, учитывающий потери давления за счет трения.

## 7.6. Зависимость давления от глубины погружения. Эпюры давления

Применим основное уравнение гидростатики (6) к произвольной точке, погруженной на глубину  $h$  от поверхности жидкости, и к точкам, лежащим на поверхности в закрытом резервуаре (рис. 14, *а*). Эта формула позволяет определить давление в любой точке в зависимости от ее глубины погружения. В открытом резервуаре (рис. 14, *б*) давление на поверхности жидкости равно атмосферному (т. е. манометрическое давление  $p_0 = 0$ ) и

$$p = \rho gh. \quad (17)$$

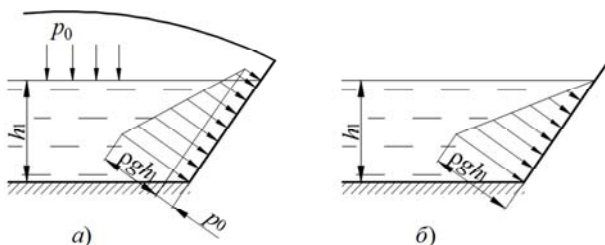


Рис. 14. Эпюры гидростатического давления на плоскость:  
*а* – абсолютное давление; *б* – избыточное давление

Из формул (6) и (17) видно, что давление изменяется по закону прямой линии, а эпюры давления представляют собой трапецию (в закрытом резервуаре с давлением  $p_0$ ) или треугольник (в открытом резервуаре с  $p_0 = 0$ ) (рис. 14, *а*, *б*). Если жидкость производит давление на криволинейную поверхность, то эпюра давления будет криволинейной (рис. 15).

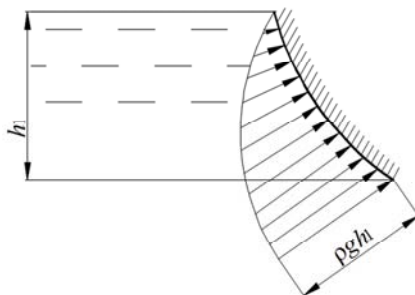


Рис. 15. Эпюра гидростатического давления на криволинейную поверхность



## 8. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ

Если жидкость находится в сосуде, на который кроме силы тяжести действуют и другие массовые силы (например инерции), то такое состояние жидкости называется относительным равновесием. Рассмотрим некоторые случаи:

1. Жидкость находится в открытой цистерне ( $p_0 = p_{\text{ат}}$ ), которая движется горизонтально с ускорением  $j$  (рис. 16). Совместим ось  $x$  с направлением движения цистерны, а начало координат расположим в точке пересечения линии дна с вертикальной осью, проходящей через центр цистерны. На жидкость будут действовать сила тяжести с ускорением свободного падения  $Z = -g$  и сила инерции с ускорением  $X = -j$  (к цистерне приложена сила с ускорением  $j$ , а к жидкости – такая же по величине сила инерции с ускорением  $-j$ ). С учетом этого дифференциальное уравнение свободной поверхности (4) примет вид:

$$-jdx - gdz = 0$$

или

$$-jx - gz = C.$$

При  $x = 0, z = H$

$$C = -gH.$$

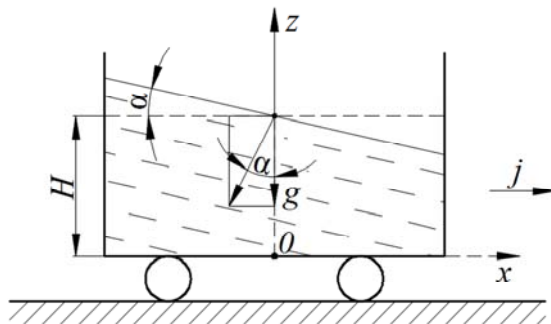


Рис. 16. Схема относительного равновесия при горизонтальном перемещении жидкости (движении)

Тогда

$$z = H - \frac{j}{g}x. \quad (18)$$

Отсюда следует, что так как для всех точек жидкости ускорение  $j$  является постоянным, то свободная поверхность представит собой плоскость с углом наклона  $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{-j}{g}\right)$ .

Основное дифференциальное уравнение гидростатики (6) в этом случае принимает вид:

$$dp = -\rho(jdx + g dz).$$

После интегрирования получим следующую закономерность распределения давления в любой точке цистерны:

$$p = -\rho jx - \rho g z + C.$$

При  $x = 0$ ,  $z = 0$   $C = p = \rho g H$  (т. е.  $C$  равно манометрическому давлению в начале координат) и

$$p = \rho g H - \rho(jx + gz) = \rho[g(H - z) - jx].$$

Анализ этой формулы показывает, что наибольшее давление будет в левой, на уровне дна, точке цистерны, где будут максимальные отрицательные значения  $x$ , а  $z = 0$ .

При замедлении движения (отрицательном ускорении) свободная поверхность будет наклонена в противоположную сторону, а наибольшее давление будет в правой, на уровне дна, точке.

2. Жидкость находится в закрытом резервуаре, который движется по вертикали с ускорением  $a$  (рис. 17). В этом случае проекции ускорений массовых сил будут равны:

$$x = 0; y = 0; z = a - g,$$

а уравнение (6) принимает вид:

$$dp = (a - g) dz.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$p = \rho(a - g)z + C.$$

При  $z = 0$   $p = p_0 = C$ .

С учетом того, что глубина погружения точки от поверхности жидкости в резервуаре  $h = -z$ ,

$$p = p_0 + \rho(g - a)h.$$

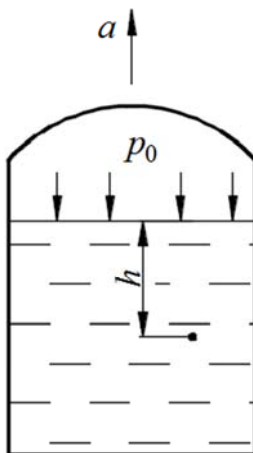


Рис. 17. Схема относительного равновесия при вертикальном перемещении жидкости (движении)

При движении резервуара вниз с ускорением или вверх с замедлением ускорения  $a$  силы инерции, приложенной к жидкости, будут направлены вверх, т. е. они будут уменьшать действие свободного падения  $g$ , и давление жидкости в резервуаре будет меньше, чем в неподвижном резервуаре. При  $a = g$  жидкость станет «невесомой», т. е. давление во всех ее точках будет одинаково ( $p = p_0$ ).

Если резервуар движется вниз с замедлением или вверх с ускорением, величина  $a$  будет отрицательна и

$$p = p_0 + \rho(g + a)h.$$

В этом случае давление в точках жидкости будет больше, чем в неподвижном резервуаре.

3. Жидкость находится в цилиндре, вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью вращения  $\Omega$  (рис. 18). В этом случае перпендикулярно оси  $z$  действует центробежная сила инерции с ускорением  $j = \Omega^2 r$ , проекция которого на ось  $x$ :

$$X = \Omega^2 r \cos(\widehat{r, x}) = \Omega^2 r \frac{x}{r} = \Omega^2 x.$$

Аналогично

$$Y = \Omega^2 y.$$

Вдоль оси  $z$  действует ускорение  $Z = -g$ . С учетом изложенного основное дифференциальное уравнение гидростатики (4) приводит-ся к виду:

$$dp = \rho \left( \frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{\Omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C.$$

При  $x = y = z = 0$   $p = 0$  (при открытом резервуаре) и  $C = 0$ .

С учетом того, что  $x^2 + y^2 = r^2$ ,

$$p = \rho \left( \frac{\Omega^2 r^2}{2} - gz \right). \quad (19)$$

Из уравнения (19) видно, что наибольшее давление будет в точках у боковых стенок цилиндра на уровне его дна.

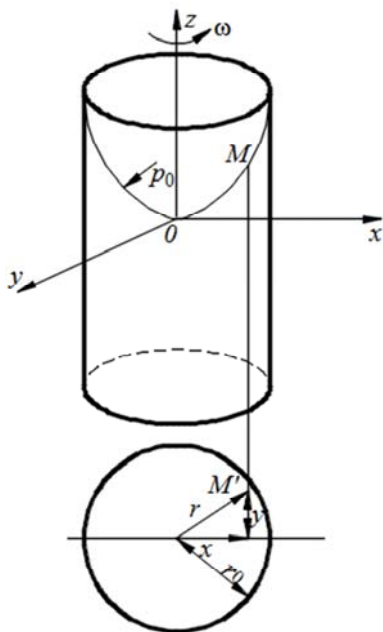


Рис. 18. Схема относительного равновесия при вращательном движении жидкости

Уравнение свободной поверхности можно получить из выражения (19) при  $p = 0$ . Так как  $\rho \neq 0$ , то

$$z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}. \quad (20)$$

Эта поверхность называется **параболоидом вращения**. Максимальный подъем жидкости у стенок:

$$z_{\max} = \frac{\Omega^2 r_0^2}{2g}. \quad (21)$$

## 9. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Силу гидростатического давления жидкости на поверхность иначе называют суммарным гидростатическим давлением жидкости; оно выражается в ньютонах.

**Суммарное давление жидкости.** Расположим начало координат на свободной поверхности жидкости так, чтобы ось  $Ox$  совпала с линией пересечения свободной поверхности и наклонной плоскости, в которой находится площадь  $\omega$  (рис. 19). Плоскость  $xOy$  совмещена с плоскостью рисунка. Суммарное гидростатическое давление на элементарную площадку  $d\omega$  в этом случае будет равно:

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega = (p_0 + \rho gz \sin \alpha) d\omega.$$

Интегрирование этого уравнения по площади дает:

$$P = p_0 \omega + \rho g \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega. \quad (22)$$

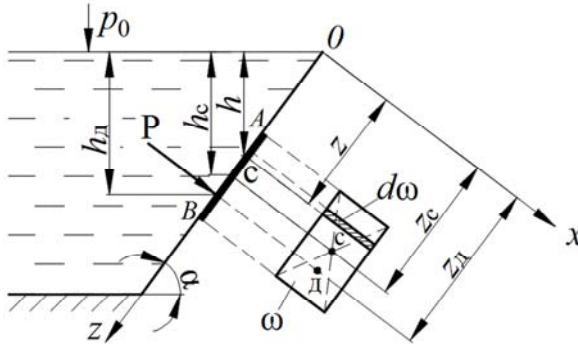


Рис. 19. Схема для определения силы гидростатического давления жидкости на плоскую наклонную поверхность

Интеграл в правой части уравнения представляет собой статический момент плоской фигуры  $\omega$  относительно оси  $Ox$ :

$$S_x = \int_{\omega} z d\omega = z_c \omega.$$

где  $z_c$  – расстояние от оси  $Ox$  до центра тяжести площади  $\omega$  (см. точку  $C$  на рис. 19).

Подставляя  $S_x$  в выражение (22) и учитывая, что  $z_c \sin \alpha = h_c$  (см. рис. 19),

$$P = (p_0 + \rho g h_c) \omega. \quad (23)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой гидростатическое давление в центре тяжести фигуры. Избыточное суммарное давление:

$$P = \rho g h_c \omega = p_c \omega. \quad (24)$$

Избыточное давление и суммарное избыточное давление будем обозначать, как и полное, т. е.  $p$  и  $P$  (без индексов), так как из записи формул ясно, когда вычисляют избыточное суммарное давление. Из формулы (23) следует: суммарное гидростатическое давление на плоскую поверхность равно произведению гидростатического давления в центре тяжести этой поверхности на ее площадь.

Если поверхность расположена горизонтально ( $\alpha = 0$ ), то суммарное избыточное давление:

$$P = \rho g h \omega,$$

где  $\omega$  – горизонтальная площадь (дно резервуара), находящаяся на глубине  $h$ .

Этой закономерностью можно объяснить гидростатический парадокс: при одинаковой площади дна резервуара суммарное давление жидкости на дно зависит не от формы резервуара, а только от глубины его наполнения.

**Центр давления.** Точка приложения равнодействующей силы суммарного давления жидкости к площади, на которую она действует, называется *центром давления*. Момент равнодействующей силы равен сумме моментов сил составляющих:

$$Pz_D = \int_{\omega} z dP, \quad (25)$$

где  $z_D$  – расстояние от точки 0 по направлению оси  $y$  до центра давления (см. рис. 19);

$z$  – переменная координата точек приложения сил  $dP$ .

Запишем выражения для  $P$  и  $dP$ :

$$P = (p_0 + \rho g z_c \sin \alpha) \omega;$$

$$dP = (p_0 + \rho g z \sin \alpha) d\omega.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (25), получим:

$$(p_0 \omega + \rho g z_c \sin \alpha \omega) z_D = p_0 \int_{\omega} z d\omega + z \sin \alpha \int_{\omega} z^2 d\omega. \quad (26)$$

Второй интеграл в уравнении (26) представляет собой момент инерции площади  $\omega$  относительно оси  $Ox$ :

$$\int_{\omega} z^2 d\omega = J_x.$$

С учетом этого формула (26) принимает вид:

$$z_D = \frac{p_0 S_x + \rho g \sin \alpha J_x}{p_0 \omega + \rho g \sin \alpha S_x}. \quad (27)$$

Ордината центра избыточного давления при  $p_0 = 0$ :

$$z_D = \frac{J_x}{S_x}. \quad (28)$$

Как известно,

$$J_x = J_c + z_c^2 \omega, \quad (29)$$

где  $J_c$  – момент инерции фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести данной фигуры;

$z_c$  – расстояние между осями (см. рис. 19).



Формулу (28) запишем в виде:

$$z_D = \frac{J_c + z_c^2 \omega}{z_c \omega},$$

откуда

$$z_D = z_c + \frac{J_c}{S_x}. \quad (30)$$

Следовательно, центр давления расположен ниже центра тяжести плоской фигуры.

В общем случае необходимо находить вторую координату точки  $D$  ( $x_D$ ) в направлении оси  $x$ . Задача решается аналогично рассмотренной.

Для вертикальной прямоугольной стенки  $h_c = h / 2$  и  $\omega = bh$ , где  $h$  – глубина жидкости перед стенкой;  $b$  – ее ширина, поэтому формула (24) принимает вид:

$$P = \frac{\rho g b h^2}{2}. \quad (31)$$

Соответственно имеем:

$$S_x = \frac{b h^2}{2}, \quad J_c = \frac{b h^3}{12}.$$

Подставляя эти величины в формулу (30), получим  $z_D = h_D = 2h / 3$ .

**Графический способ определения суммарного давления жидкости на плоскую поверхность.** Из основного уравнения гидростатики следует, что давление  $p$  по глубине жидкости распределяется линейно. Для избыточного давления  $p = \rho g h$ . Рассмотрим случай двустороннего давления жидкости на наклонную плоскую поверхность (рис. 20).

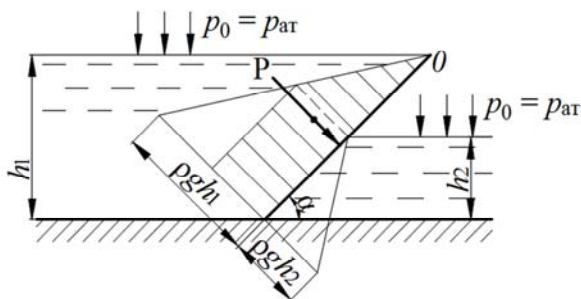


Рис. 20. Эпюры гидростатического давления на плоскую прямоугольную наклонную фигуру

При  $h = 0$  имеем  $p = 0$ , у дна гидростатическое давление слева равно  $\rho gh_1$ , справа –  $\rho gh_2$ . Согласно первому свойству гидростатического давления оно направлено перпендикулярно к площадке, на которую действует. Эпюры давлений изображены в виде треугольников, площади которых выражают суммарное давление на единицу ширины данной поверхности. При двустороннем давлении жидкости на стенку (рис. 20) эпюра давления принимает форму трапеции. Умножив ее площадь на ширину стенки, получим:

$$P = \frac{\rho gb(h_1^2 - h_2^2)}{2 \sin \alpha}.$$

Появление  $\sin \alpha$  в знаменателе объясняется тем, что стенка наклонная. При вертикальном положении стенки ( $\alpha = 90^\circ$ ) имеем:

$$P = \frac{\rho gb(h_1^2 - h_2^2)}{2}.$$

При одностороннем давлении жидкости ( $h_1 = h$ ;  $h_2 = 0$ ) получим формулу (31). Величина  $\rho gh^2/2$  или  $\rho gh^2/2 \sin \alpha$  – суммарное давление жидкости на единицу ширины вертикальной стенки. Следовательно, построив эпюру давлений и найдя ее площадь, а затем перемножив ее на ширину стенки, получим суммарное давление жидкости. Равнодействующая силы  $P$  должна проходить через центр тяжести трапеции и перпендикулярно к площади стенки.

В заключении следует отметить, что сила гидростатического давления равна объему эпюры гидростатического давления.

## 10. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

При определении силы давления жидкости на криволинейные поверхности заранее неизвестна точка приложения этой силы, а следовательно, и ее направление, так, в каждой точке направление силы будет нормально к поверхности в этой точке. Поэтому при определении силы давления предварительно определяют ее три составляющие, параллельные координатным осям.

Рассмотрим произвольную криволинейную поверхность бесконечно малой толщины, на которую с двух сторон давит жидкость (рис. 21).

Сила давления на бесконечно малую площадку  $d\omega$ :

$$dP = p d\omega = \rho g \left( \frac{p_0}{\rho g} + h \right) d\omega = \rho g h' d\omega, \quad (32)$$

где  $h' = \frac{p_0}{\rho g} + h$  – глубина погружения точки в центре бесконечно малой площадки, отсчитываемая от пьезометрической плоскости.

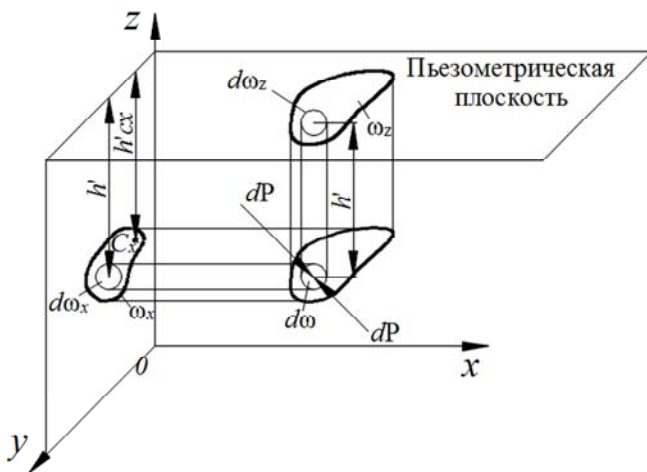


Рис. 21. Схема для определения силы гидростатического давления на криволинейную поверхность

Составляющие силы  $dP$ , параллельные координатным осям, определяются как произведение этой силы на косинус угла между направлением силы и соответствующей осью:

$$dP_x = pd\omega \cos(dP, x);$$

$$dP_y = pd\omega \cos(dP, y);$$

$$dP_z = pd\omega \cos(dP, z).$$

Нетрудно убедиться, что произведение бесконечно малой площади  $d\omega$  на соответствующий косинус угла между силой и координатной осью является проекцией этой площади на плоскость, перпендикулярную соответствующей оси, т. е.

$$d\omega \cos(dP, x) = d\omega_x; \quad d\omega \cos(dP, y) = d\omega_y; \quad d\omega \cos(dP, z) = d\omega_z.$$

Откуда

$$dP_x = pd\omega_x.$$

Интегрируя это выражение, получим составляющую всей силы давления, параллельную оси  $x$ :

$$P_x = \int_{\omega_x} pd\omega_x = \rho g \int_{\omega_x} h' d\omega_x = \rho g h'_{c_x} \omega_x, \quad (33)$$

и по аналогии

$$P_y = \rho g h'_{c_y} \omega_y, \quad (34)$$

где  $\omega_x$  и  $\omega_y$  – проекции площади криволинейной поверхности на вертикальные плоскости, перпендикулярные осям  $x$  и  $y$ ;

$h'_{c_x}$  и  $h'_{c_y}$  – глубины погружения центров тяжести этих проекций от пьезометрической плоскости.

Сравнивая выражения (33) и (34) с (24), приходим к выводу, что проекции на горизонтальные оси силы давления жидкости на криволинейную поверхность равны силам давления на проекции этой поверхности на вертикальные плоскости, соответственно перпендикулярные этим осям.

Рассмотрим теперь вертикальную составляющую силы давления:

$$P_z = \int_{\omega_z} p d\omega_z = \rho g \int_{\omega_z} h' d\omega_z.$$

Выражение  $h' d\omega_z$  представляет собой элементарный объем  $dW'$  вертикального столба жидкости, опирающегося на бесконечно малую площадку  $d\omega$  и ограниченного сверху пьезометрической плоскостью:

$$h' d\omega_z = dW'.$$

Интеграл этого выражения является объемом  $W'$  всего столба жидкости, опирающегося на криволинейную поверхность и ограниченного сверху пьезометрической плоскостью. Такой столб жидкости называется телом давления  $W'$ :

$$W' = \int_{\omega_z} h' d\omega_z = \int_{\omega_z} dW'.$$

Тогда

$$P_z = \rho g W'. \quad (35)$$

Вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе тяжести тела давления.

Равнодействующая составляющих сил давления определяется по формуле:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (36)$$

Так как толщина криволинейной поверхности была принята нами бесконечно малой, то глубина  $h'$  будет одинакова для обеих

сторон поверхности. Следовательно, и силы  $dP$ , действующие на бесконечно малую площадку, будут одинаковы с обеих сторон площадки. Силы  $P$  на всю криволинейную поверхность будут одинаковы с обеих сторон поверхности, но противоположны по направлению. Таким образом, не имеет значения, с какой стороны поверхности находится жидкость, а важно положение поверхности в системе координат.

Если на свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному (манометрическое давление  $p_0 = 0$ ), то формула для составляющих силы давления приводятся к виду:

$$P_x = \rho g h_{c_x} \omega_x; \quad (37)$$

$$P_y = \rho g h_{c_y} \omega_y; \quad (38)$$

$$P_z = \rho g W. \quad (39)$$

В этом случае глубины погружения центра тяжести проекций площади  $h_{c_x}$  и  $h_{c_y}$  измеряются от свободной поверхности. Также свободной поверхностью ограничивается сверху тело давления.

На практике криволинейные поверхности часто являются цилиндрическими. Это поверхности водопроводных и водоотводных труб, круглых резервуаров, сегментных затворов и т. д. В этом случае (рис. 22), располагая систему координат так, чтобы ось  $y$  была параллельна образующей цилиндрической поверхности, получим формулу равнодействующей силы давления:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \quad (40)$$

где составляющие  $P_x$  и  $P_z$  определяются по приведенным выше формулам.

Для практических расчетов важно получить навыки в определении тела давления. На рис. 23 приводятся некоторые характерные случаи. В случаях, показанных на рис. 23, *а* и 23, *б*, тела давления одинаковы по величине, но в первом из них вертикальная составляющая направлена вверх (знак « $\leftarrow$ »), а во втором – вниз (знак « $\rightarrow$ »).

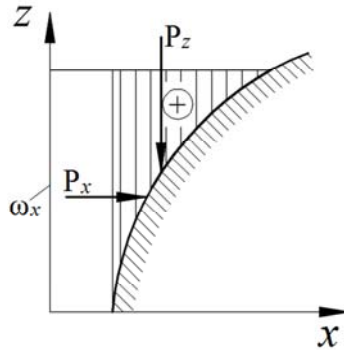


Рис. 22. Схема для определения положительного объема тела давления

Тело давления, заполняемое жидкостью (рис. 23, б), называется *действительным*, в отличие от *фиктивного тела давления*, которое заполняется жидкостью условно (рис. 23, а). Фиктивное тело давления иногда называют *телом выпора*.

Если на часть криволинейной поверхности (*ab*) жидкость давит сверху вниз, а на другую часть (*bc*) – снизу вверх (рис. 23, в), то тело давления определяется как сумма тел давления на каждую часть криволинейной поверхности с соответствующими знаками.

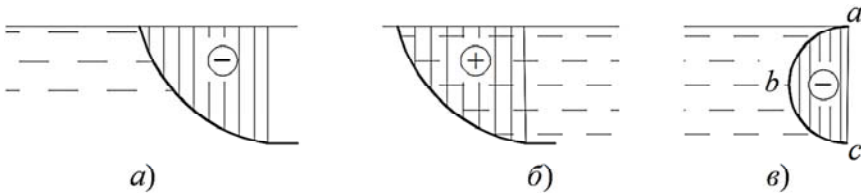


Рис. 23. Схемы по определению различных объемов тела давления  $W$ :  
 а – отрицательный  $W$ ; б – положительный  $W$ ; в – отрицательный  $W$

Направление равнодействующей силы давления характеризуется углом наклона ее к горизонту:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_x}. \quad (41)$$

Равнодействующая  $P$  всегда проходит через центр тяжести криволинейной поверхности.

Если образующая цилиндрической поверхности в основании цилиндра описывает окружность, то равнодействующая  $P$  пройдет через центр окружности, так как она нормальна к касательной в точке приложения и, следовательно, должна совпадать с направлением радиуса. На рис. 1.23 показана схема определения составляющих и равнодействующей силы давления, а также ее направление на криволинейную поверхность сегментного затвора.

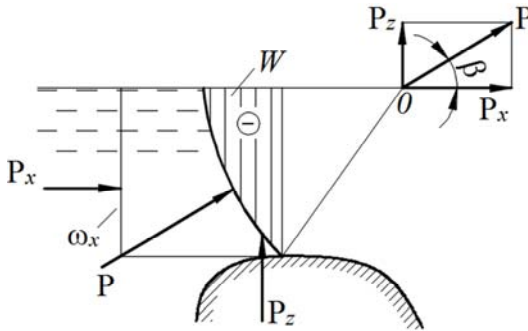


Рис. 24. Схема определения составляющих и равнодействующей силы давления

Рассмотрим также определение допускаемого давления жидкости в круглой трубе (рис. 25). При давлении по оси трубы  $p_0$  давление в любой другой точке сечения трубы будет равно:

$$p = p_0 + \rho g z, \quad (42)$$

где  $z$  – расстояние по вертикали от оси трубы до рассматриваемой точки (если точка расположена ниже оси, то значение  $z$  будет положительным, а если выше, то отрицательным).

Обычно в напорных трубах  $p_0$  значительно больше, чем величина  $\rho g z$ , поэтому с достаточной степенью точности можно считать  $p = p_0$ .

Мысленно разделив трубу диаметральной плоскостью  $l-l$ , определим силу, действующую на одну половину трубы длиной  $l$ :

$$P = p_0 \omega_x = p_0 D l.$$



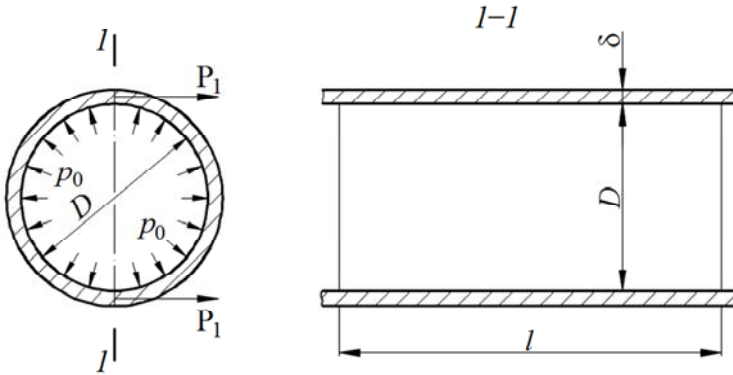


Рис. 25. Схема для определения допускаемого давления в круглой трубе

Эта сила уравнивается двумя силами, приложенными к стенкам трубы в местах условного разреза:

$$P_1 = \sigma \delta l,$$

где  $\sigma$  – растягивающее напряжение в стенках трубы;  
 $\delta$  – толщина стенки трубы.

Таким образом,

$$P = 2P_1$$

и

$$p_0 D = 2\sigma \delta.$$

Если напряжение в стенке трубы  $\sigma$  будет равно допускаемому  $[\sigma]$ , то допускаемое давление в трубе:

$$[p_0] = 2[\sigma] \frac{\delta}{D}. \quad (43)$$

Из этой формулы можно также определить необходимую толщину стенки трубы  $\delta$  при заданном давлении  $p_0$ .

## 11. ПЛАВАНИЕ ТЕЛ. ЗАКОН АРХИМЕДА. ОСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим силы давления жидкости на погруженное в нее произвольной формы тело (рис. 26). Горизонтальные и вертикальные силы, действующие на тело, в общем случае определяются как силы, действующие на криволинейные поверхности.

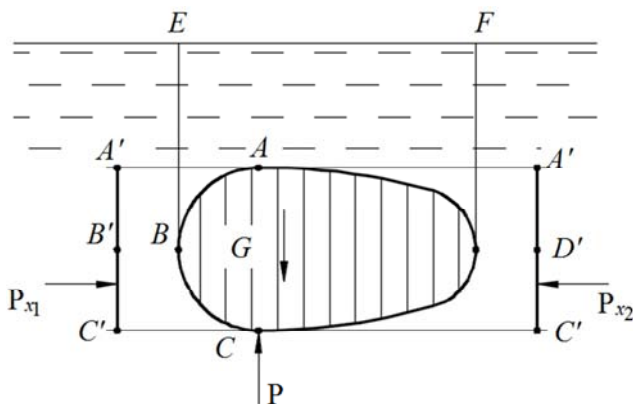


Рис. 26. Схема для определения силы давления жидкости на погруженное в нее тело произвольной формы

Горизонтальные силы, действующие на тело слева  $P_{x1}$  и справа  $P_{x2}$ , определим как силы, действующие на вертикальные проекции криволинейных поверхностей  $ABC$  и  $ADC$ .

Так как площади этих проекций  $A'B'C'$  и  $A'D'C'$  равны между собой, а их центры тяжести погружены на одинаковую глубину, то и  $P_{x1} = P_{x2}$ . Если бы это равенство не соблюдалось, то тело вышло бы из состояния покоя и начало бы двигаться.

Вертикальные силы давления на криволинейные поверхности  $BAD$  и  $BCD$  определяются по величине как силы тяжести тел давления, опирающиеся на эти поверхности. Эти силы давят на тело сверху и снизу и будут иметь противоположные знаки. Результирующая сила:

$$P = \rho g (W_{BADEF} - W_{BCDEF}) = -\rho g W_{ABCD}. \quad (43)$$

Таким образом, на погруженное в жидкость тело действует вертикально направленная вверх сила, равная силе тяжести жидкости в объеме погруженной части тела. Это положение называется **законом Архимеда**.

Если сила тяжести тела  $G > P$ , тело тонет.

Если  $G = P$ , тело находится в покое на той глубине, на которую оно погружено.

Если  $G < P$  (рис. 27), тело всплывает.

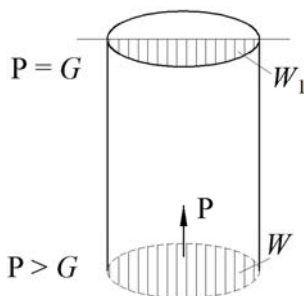


Рис. 27. Общая схема плавания тел

Когда часть тела начнет подниматься над поверхностью воды, объем вытесненной телом воды будет уменьшаться от  $W$  до  $W_1$  и, следовательно, будет уменьшаться сила  $P$ . Всплытие прекратится, когда сила  $P$  станет равной силе тяжести тела  $G$ .

Сила тяжести жидкости в объеме погруженной в нее части тела называется водоизмещением, а центр тяжести этого объема  $D$  (рис. 28, а) – центром водоизмещения. Понятие водоизмещения особо важно для судов, понтонов и других плавающих средств. Линия пересечения свободной поверхности жидкости с боковой поверхностью судна  $A-A$  называется **ватерлинией**, а плоскость внутри судна, ограниченная ватерлинией, называется **плоскостью плавания**. Вертикальная ось  $\theta-\theta$ , проходящая через центр водоизмещения, называется **осью плавания**, а расстояние между центрами тяжести и водоизмещением – **эксцентриситетом  $e$** .

Судно или понтон при качке могут наклоняться на один или другой бок (рис. 28, б, в). Способность его восстанавливать первоначальное положение называется **остойчивостью**. Рассмотрим условия остойчивости. При крене судна центр его тяжести не изменит

своего положения, а центр водоизмещения  $D$  переместится в положение  $D'$ . Линия действия выталкивающей силы  $P$ , проходящей через точку  $D'$ , пересекает ось плавания в точке  $M$ , называемой **метацентром**. Расстояние от метацентра до центра водоизмещения  $D$  называется **метацентрическим радиусом**  $r_M$ .

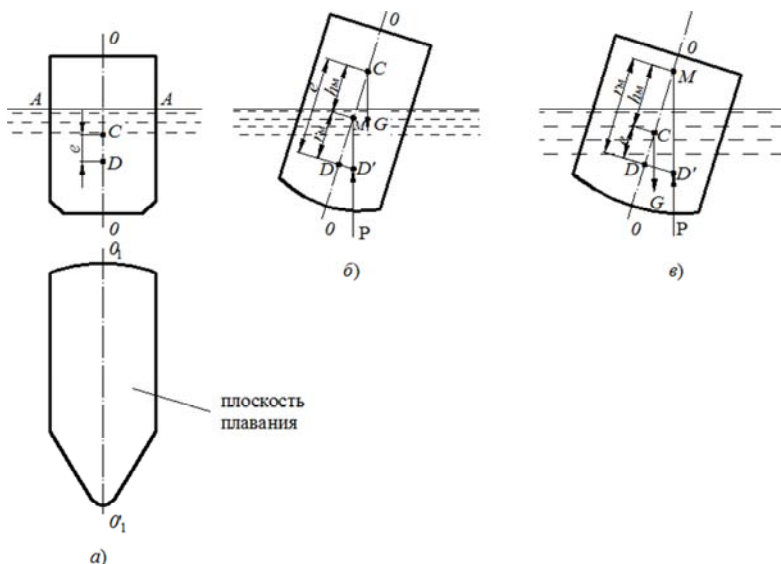


Рис. 28. Схема устойчивого и неустойчивого плавания тел:  
 а – вертикаль плавания; б – неустойчивое плавание при крене плавающего тела;  
 в – устойчивое плавание при крене плавающего тела

Выталкивающая сила  $P$  и сила тяжести  $G$  образуют пару сил, действующую на судно. При положении метацентра ниже центра тяжести (рис. 28, б) эта пара сил стремится опрокинуть судно, а при метацентре выше центра тяжести (рис. 28, в) судно стремится восстановить первоначальное положение. В первом случае плавание является неустойчивым, а во втором – устойчивым. Нетрудно убедиться, что при устойчивом плавании метацентрический радиус  $r_M$  больше эксцентриситета  $e$ , а при неустойчивом  $e > r_M$ . Разность между этими величинами называется метацентрической высотой:

$$h_M = r_M - e. \quad (44)$$

Из теории устойчивости известно, что *метацентрический радиус* может быть с достаточной степенью точности определен по формуле:

$$r_{\text{м}} = \frac{J_0}{W}, \quad (45)$$

где  $J_0$  – момент инерции плоскости плавания относительно продольной оси  $\theta_1$ – $\theta_1$ ;

$W$  – водоизмещение.

С учетом этого

$$h_{\text{м}} = \frac{J_0}{W} - e. \quad (46)$$

При устойчивом плавании метацентрическая высота  $h_{\text{м}}$  положительна, а при неустойчивом – отрицательна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гиргидов, А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика) / А. Д. Гиргидов. – СПб.: Издательство политехнического университета, 2007. – 596 с.
2. Ухин, Б. В. Гидравлика / Б. В. Ухин. – Москва: ИД «Форум», ИНФРА-М, 2010. – 464 с.
3. Механика жидкости и газа. Лабораторный практикум: учебное пособие / Н. Е. Бонч-Осмоловская [и др.]; под общ. ред. И. В. Качанова, В. Н. Юхновца. – 4-е изд., перераб. и доп. – Мн.: БНТУ, 2007. – 295 с.
4. Константинов, Ю. М. Гидравлика / Ю. М. Константинов. – Киев: Вища школа, 1981. – 360 с.
5. Киселев, П. Г. Гидравлика. Основы механики жидкости / П. Г. Киселев. – М.: Энергия, 1980. – 360 с.
6. Альтшуль, А. Д. Гидравлика и аэродинамика / А. Д. Альтшуль, П. Г. Киселев. – Москва: Стройиздат, 1975. – 328 с.
7. Богомолов, А. И. Гидравлика / А. И. Богомолов, К. А. Михайлов. – Москва: Стройиздат, 1972. – 648 с.
8. Сборник задач по гидравлике / В. А. Большаков [и др.]; под ред. В. А. Большакова. – Киев: Вища школа, 1979. – 337 с.
9. Справочник по гидравлическим расчетам / П. Г. Киселев [и др.]; под ред. П. Г. Киселева. – М.: Энергия, 1972 – 312 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Введение. Определение механики жидкости и газа и связь ее с другими дисциплинами .....	4
2. Краткая история развития механики жидкости и газа .....	5
3. Жидкость. Основные свойства жидкости .....	9
4. Равновесие жидкости. Силы, действующие на жидкость .....	19
5. Гидростатическое давление и его свойства .....	21
6. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Л. Эйлера) .....	24
7. Равновесие жидкости в поле земного тяготения.....	28
7.1. Основное уравнение гидростатики.....	28
7.2. Геометрическое и энергетическое понимание основного уравнения гидростатики.....	29
7.3. Абсолютное и избыточное давление. Вакуум .....	30
7.4. Приборы для измерения давления.....	33
7.5. Закон Паскаля и его технические приложения .....	38
7.6. Зависимость давления от глубины погружения.	
Эпюры давления .....	40
8. Относительное равновесие жидкости .....	41
9. Сила давления жидкости на плоские поверхности .....	46
10. Сила давления жидкости на криволинейные поверхности.....	51
11. Плавание тел. Закон Архимеда. Остойчивость .....	58
Литература .....	62

Учебное издание

**КАЧАНОВ** Игорь Владимирович  
**КЛЮЧНИКОВ** Владимир Анатольевич  
**ШАТАЛОВ** Игорь Михайлович и др.

## **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА. ГИДРОСТАТИКА**

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности  
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение  
и охрана водных ресурсов»

Редактор *А. С. Мокрушиников*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 17.02.2021. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,91. Тираж 100. Заказ 774.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.