

ЛИТЕРАТУРА

1. Matsumoto K., Sakaguchi T., Uemura K. Verification of switching operation with temporal logic // IEEE Trans. Power Appar. and System. – 1971. – V. PAS-90. – № 6. – P. 2718–2723.
2. А н и щ е н к о В. А. Информационное обеспечение задач контроля достоверности и повышения точности измерений на электростанциях и подстанциях // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1997. – № 7–8. – С. 11–14.
3. А н и щ е н к о В. А. Выявление ошибок сигнализации положения коммутирующей аппаратуры при помощи ЭВМ // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1982. – № 9. – С. 24–28.
4. А н и щ е н к о В. А. Совместный контроль достоверности сигнализации положения коммутационной аппаратуры и измерений аналоговых переменных // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1994. – № 1–2. – С. 9–13.
5. А н и щ е н к о В. А., Суле И то па М а л и к. Комбинированный контроль достоверности сигнализации положения коммутационной аппаратуры и измерений аналоговых переменных // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1995. – № 3–4. – С. 52–56.
6. В о й т о в О. Н., В о р о н и н В. Н., Г а м м А. З. Автоматизированная система оперативно-диспетчерского управления электроэнергетическими системами / Под ред. М. Н. Розанова, В. А. Семенова. – Новосибирск: Наука, 1986. – 208 с.
7. А р б а ч а у с к е н е Н. А., Г р и г а л ю н а с А. К., К а м и н с к а с В. А. Динамическое оценивание режимных и сетевых параметров электроэнергетических систем // Алгоритмы обработки данных в энергетике. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982. – С. 61–69.
8. А н и щ е н к о В. А., К а з а н с к а я Т. Н. Достоверизация учета электроэнергии при изменении главной схемы электрических соединений электростанции // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1993. – № 3–4. – С. 11–14.

Представлена кафедрой
электроснабжения

Поступила 21.09.1999

УДК 621.3.066.06

ТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ШИНЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЗАТУХАЮЩЕМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ СИЛЫ ТОКА

**Инженеры ГЕРАСИМОВИЧ Д. А., НОСАЙРАТ ФАИЗ,
канд. физ.-мат. наук, доц. МЕЛЕШКО И. Н.**

Белорусская государственная политехническая академия

Переходные режимы в электрических цепях сопровождаются возникновением свободного затухающего тока. Закон изменения этого тока обусловлен параметрами цепи переходного процесса. Данный ток может быть затухающим аperiодическим или колебательным. Электромагнитные параметры токоведущей части, как правило, столь незначительны, что не оказывают заметного влияния на закон изменения свободного тока. В силу этого свободный ток по отношению к проводникам можно рассматривать как некоторый вынужденный, обусловленный параметрами внешней цепи. Исследования, посвященные анализу электромагнитных полей шинопроводов при наличии затухающей составляющей тока, практически отсутствуют. Можно отметить лишь работу [1], в которой проведено исследование

распределения свободного и вынужденного затухающих по экспоненте токов в проводнике круглого сечения.

Здесь рассматривается решение краевой задачи токораспределения в прямоугольной шине при аperiodическом и колебательном токах, затухающих по экспоненциальному закону*. Формально принимается, что ток протекает в интервале времени $(-\infty, +\infty)$ (рис. 1а). Тогда распределение поля по сечению проводника можно рассматривать как некоторое стационарное принужденного режима. При такой постановке задачи применим итерационный метод решения, рассмотренный в [2, 3] для случая синусоидального тока.

а

б

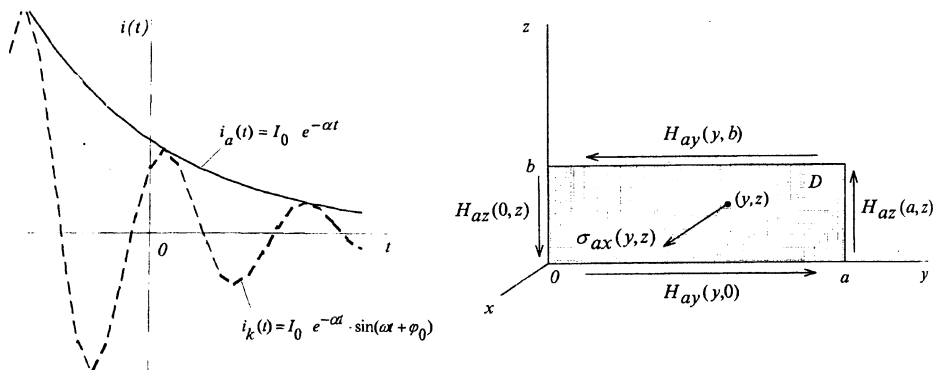


Рис. 1

Приведем выражения для расчета поля в случае аperiodического тока. Для этого рассмотрим протяженный вдоль оси Ox проводник прямоугольного профиля с током, затухающим во времени по закону

$i_a(t) = I_0 e^{-t/T_a} = I_0 e^{-\alpha t}$ (рис. 1). Здесь $T_a = 1/\alpha$ — постоянная времени затухания аperiodического тока.

Разрешая исходные уравнения электромагнитного поля в прямоугольной системе координат относительно составляющих вектора напряженности магнитного поля $H_y(y, z, t)$ и $H_z(y, z, t)$, можно прийти к следующим уравнениям [2]:

$$\frac{\partial^2 H_y(y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y(y, z, t)}{\partial z^2} = \gamma \mu \frac{\partial H_y(y, z, t)}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z(y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z(y, z, t)}{\partial z^2} = \gamma \mu \frac{\partial H_z(y, z, t)}{\partial t}, \quad (2)$$

где γ — удельная электрическая проводимость материала шины;

μ — абсолютная магнитная проницаемость материала шины.

Уравнения (1)–(2) описывают магнитное поле в проводнике в переходном процессе. Так как ток считается протекающим в интервале вре-

* Исследование проводилось под руководством докт. техн. наук, проф. А. Н. Герасимовича.

мени $(-\infty, +\infty)$, поле является стационарным, а величины векторов поля изменяются во времени по тому же закону, что и полный ток. Для $H_y(y, z, t)$ и $H_z(y, z, t)$ можно записать:

$$H_y(y, z, t) = H_{ay}(y, z)e^{-\alpha t}; \quad H_z(y, z, t) = H_{az}(y, z)e^{-\alpha t}, \quad (3)$$

где $H_{ay}(y, z)$ и $H_{az}(y, z)$ определяют стационарное распределение магнитного поля от аperiодического тока.

Подставив (3) в (1)–(2), приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 H_{ay}(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{az}(y, z)}{\partial z^2} = -\alpha\gamma\mu H_{ay}(y, z); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 H_{az}(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{ay}(y, z)}{\partial z^2} = -\alpha\gamma\mu H_{az}(y, z). \quad (5)$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений в [2] коэффициентом в правой части, который в рассматриваемом случае равен $-\alpha\gamma\mu$ (а не $j\omega\gamma\mu$) и является отрицательной вещественной величиной, а сами функции $H_{ay}(y, z)$ и $H_{az}(y, z)$ являются вещественными, а не комплексными.

Граничными условиями к уравнениям (4)–(5) будут касательные к поверхности проводника составляющие вектора напряженности магнитного поля: $H_{ay}(y, 0)$, $H_{ay}(y, b)$, $H_{az}(0, z)$, $H_{az}(a, z)$ (рис. 16). Решение такой краевой задачи находится как результат наложения решений для отдельных пространственных гармоник граничных условий [2, 3]. Выражения для определения $H_{ay}(y, z)$ и $H_{az}(y, z)$ имеют вид [2]:

$$H_{ay}(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{ay}^k(0)\text{sh}(p_{ky}[b-z]) + H_{ay}^k(b)\text{sh}(p_{ky}z) \right) \frac{\cos(k\omega_y y)}{\text{sh}(p_{ky}b)}; \quad (6)$$

$$H_{az}(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{az}^k(0)\text{sh}(p_{kz}[a-y]) + H_{az}^k(a)\text{sh}(p_{kz}y) \right) \frac{\cos(k\omega_z z)}{\text{sh}(p_{kz}a)}, \quad (7)$$

где $H_{ay}^k(0)$, $H_{ay}^k(b)$, $H_{az}^k(0)$, $H_{az}^k(a)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье граничных условий, определяемые в соответствии с [3];

$$\omega_y = \pi/a; \quad \omega_z = \pi/b;$$

$$p_{ky} = \sqrt{-\alpha\gamma\mu + (k\omega_y)^2}; \quad p_{kz} = \sqrt{-\alpha\gamma\mu + (k\omega_z)^2}.$$

В выражениях (6)–(7) отдельные корни p_{ky} и p_{kz} могут оказаться нулевыми. Этим корням соответствует выполнение следующих равенств для некоторых k -х пространственных гармоник:

$$k = \frac{1}{\omega_y} \sqrt{\alpha\gamma\mu} = \frac{a}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu}, \quad k = \frac{1}{\omega_z} \sqrt{\alpha\gamma\mu} = \frac{b}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu}, \quad (8a)$$

где k должны быть целыми числами.

При выполнении условий (8a), т. е. только для нулевых корней, выражения для k -х составляющих в (6) и (7) принимают вид:

$$H_{ay}^k(y, z) = \left(H_{ay}^k(0)(b-z) + H_{ay}^k(b)z \right) \frac{\cos(k\omega_y y)}{b};$$

$$H_{az}^k(y, z) = \left(H_{az}^k(0)(a-y) + H_{az}^k(a)y \right) \frac{\cos(k\omega_z z)}{a}.$$

Для всех пространственных гармоник, порядок которых меньше величин k , определяемых по (8a), т. е. для $k < \frac{a}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu}$ и $k < \frac{b}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu}$, корни p_{ky} и p_{kz} становятся мнимыми, а гиперболические функции в (6) и (7) переходят в соответствующие тригонометрические. Это может вызвать равенство нулю знаменателей $\text{sh}(p_{kz} a) = j \sin(m\pi) = 0$ и $\text{sh}(p_{ky} b) = j \sin(m\pi) = 0$ в (6), (7) (величина m должна быть целой). Указанному случаю из выражений для корней и (8a) будут соответствовать равенства:

$$m = \frac{b}{\pi a} \sqrt{\alpha\gamma\mu a^2 - (k\pi)^2} \quad \left(k < \frac{a}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu} \right);$$

$$m = \frac{a}{\pi b} \sqrt{\alpha\gamma\mu b^2 - (k\pi)^2} \quad \left(k < \frac{b}{\pi} \sqrt{\alpha\gamma\mu} \right).$$
(86)

Таким образом, равенства (8a, б) определяют некоторые критические условия для рассматриваемых дифференциальных уравнений. В реальных случаях вероятность выполнения этих равенств (целые величины m и k) при принятых значениях геометрических размеров, электромагнитных свойств материалов и постоянной времени цепи крайне мала. Однако если условие (86) наступает, то должно предусматриваться изменение величины постоянной времени.

Выражения для составляющих вектора напряженности магнитного поля, за исключением отмеченных критических случаев, позволяют найти распределение плотности тока в сечении проводника [2]

$$\sigma_{ax}(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{az}^k(a) \text{ch}(p_{kz} y) - H_{az}^k(0) \text{ch}(p_{kz} [a-y]) \right) \frac{p_{kz} \cos(k\omega_z z)}{\text{sh}(p_{kz} a)}$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{ay}^k(b) \operatorname{ch}(p_{ky} z) - H_{ay}^k(0) \operatorname{ch}(p_{ky} [b-z]) \right) \frac{p_{ky} \cos(k\omega_y y)}{\operatorname{sh}(p_{ky} b)}. \quad (9)$$

Граничные условия $H_{ay}(y, 0)$, $H_{ay}(y, b)$, $H_{az}(0, z)$, $H_{az}(a, z)$ в соответствии с [2] определяются через распределение плотности тока:

$$H_{ay}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{00}^{ba} \frac{\sigma_{ax}(y_0, z_0)(z_0 - z)}{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} dy_0 dz_0 \quad (y \in [0, a]; z \in [0, b]); \quad (10)$$

$$H_{az}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{00}^{ba} \frac{\sigma_{ax}(y_0, z_0)(y - y_0)}{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} dy_0 dz_0 \quad (y \in [0, a]; z \in [0, b]). \quad (11)$$

Распределение $\sigma_{ax}(y, z)$ можно найти итерационным методом, рассмотренным в [2, 3]. В соответствии с ним первоначально принимается некоторое нулевое распределение плотности тока. Затем находятся граничные условия, согласно (10), (11). Граничные условия раскладываются в ряд, по (9) находится новое приближение для $\sigma_{ax}(y, z)$, и итерационный цикл повторяется. Критерием окончания итераций является неизменность граничных условий на смежных итерациях. Этот алгоритм достаточно просто распространить и на случай пакета прямоугольных шин. Он также применим и для проводников круглого сечения.

От найденных величин $H_{ay}(y, z)$, $H_{az}(y, z)$ и $\sigma_{ax}(y, z)$ легко перейти к их мгновенным значениям. Значения $H_y(y, z, t)$ и $H_z(y, z, t)$ определяются при подстановке (6) и (7) в (3). Распределение плотности тока в любой момент времени

$$\sigma_x(y, z, t) = \sigma_{ax}(y, z) e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Итерационный метод расчета поля применим и при колебательном затухающем токе $i_k(t) = I_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ (рис. 1а). В этом случае распределение поля характеризуется комплексными амплитудами напряженностей магнитного поля и плотности тока $\dot{H}_{may}(y, z)$, $\dot{H}_{maz}(y, z)$ и $\dot{\sigma}_{max}(y, z)$, определяемыми в соответствии (6), (7) и (9). Выражения для корней p_{ky} и p_{kz} при этом имеют вид:

$$p_{ky} = \sqrt{\mu(-\alpha + j\omega) + (k\omega_y)^2}; \quad p_{kz} = \sqrt{\mu(-\alpha + j\omega) + (k\omega_z)^2}. \quad (13)$$

Граничные условия также являются комплексными и определяются в соответствии с (10), (11). Переход от комплексных амплитуд к мгновенным значениям осуществляется по выражениям:

$$\begin{aligned}
 H_y(y, z, t) &= \left| \dot{H}_{max}(y, z) \right| e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{Hy}); \\
 H_z(y, z, t) &= \left| \dot{H}_{max}(y, z) \right| e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{Hz}); \\
 \sigma_x(y, z, t) &= \left| \dot{\sigma}_{max}(y, z) \right| e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_{\sigma}),
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

где φ_{Hy} , φ_{Hz} , φ_{σ} — фазы соответствующих комплексных амплитуд по отношению к фазе полного тока.

Случай колебательного затухающего тока является наиболее общим. Аперриодический и синусоидальный законы изменения получаются из него как предельные случаи при $\omega = 0$ и $\alpha = 0$ соответственно.

Распределения поля от аперриодического и колебательного затухающих токов, а также синусоидального тока, определяемые по (6), (7), (9) — (11), являются вынужденными составляющими решения уравнений поля в переходном процессе. В реальном переходном процессе, кроме того в момент нарушения режима, возникают свободные составляющие векторов поля. По истечении некоторого промежутка времени t эти свободные составляющие можно считать практически затухшими. Такой случай имеет место, если свободные составляющие затухают достаточно быстро. Тогда, начиная с момента времени t , процесс в шине можно считать установившимся, и поле в ней можно характеризовать рассмотренными выше стационарными распределениями от токов переходного процесса.

Для рассмотренных случаев проведены исследования поля на основе программы, разработанной в [3]. На рис. 2 приведены распределения

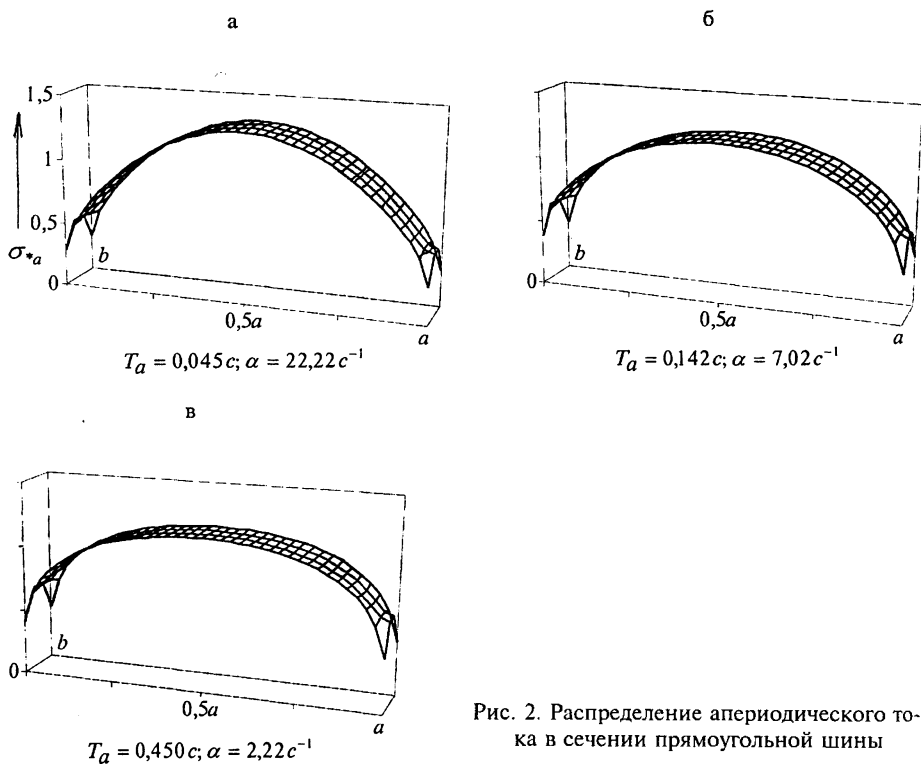


Рис. 2. Распределение аперриодического тока в сечении прямоугольной шины

плотности тока в шине при аperiодическом токе для различных постоянных времени T_a . В исследованиях принята алюминиевая шина с размерами $a \times b = 100 \times 10 \text{ мм}^2$. Плотность тока приведена к средней плотности тока в шине для момента времени $t = 0$ ($\sigma_{*a}(y, z) = \sigma_{ax}(y, z)ab / I_0$). В рассматриваемых случаях, в отличие от случая синусоидального тока, плотности тока вытесняются в центральную часть сечения (к оси проводника), причем чем меньше постоянная времени затухания, тем сильнее это вытеснение (рис. 2а). Такое явление принято называть «обратным» скин-эффектом [1]. Осевая концентрация плотности тока в прямоугольных шинах связана с переходом гиперболических функций для нулевых гармоник граничных условий (а именно эти гармоники играют определяющую роль) в соответствующие тригонометрические. Последние возрастают от поверхности к центру сечения проводника.

Явление осевой концентрации плотности тока при аperiодическом токе было известно и ранее [4], и применительно к уединенному круглому проводнику оно исследовано в [1]. Объяснение явления «обратного» скин-эффекта возможно на основе анализа как распределения плотности тока, так и энергетических характеристик поля. Однако исследования энергетических характеристик в [1] не было проведено. На рис. 3 приведены распределения плотности тока и вектора потока электромагнитной мощности по толщине уединенного круглого алюминиевого проводника. При расчете этих характеристик была применена программа расчета стационарного поля в круглых проводниках [5]. Величины плотности тока приведены к средней, а вектора потока мощности S_* — к его значению на поверхности проводника для момента времени $t = 0$. Как исследования в [1], так и наши показывают, что осевая концентрация плотности тока тем более выражена, чем больше радиус проводника (рис. 3б) или чем меньше постоянная времени затухания

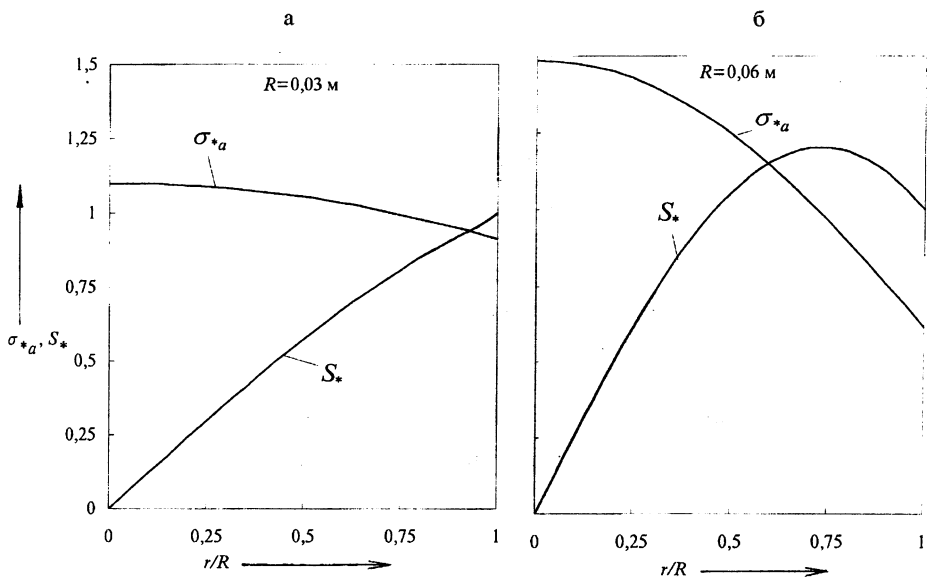


Рис. 3. Распределения плотности тока и вектора потока мощности в круглом проводнике при аperiодическом токе: $T_a = 0,045 \text{ с}$

аперриодического тока. Мощность S_* для случая рис. 3а монотонно убывает при проникновении поля с поверхности вглубь. Для проводников больших размеров вблизи поверхности S_* наоборот возрастает и лишь затем убывает. Можно показать, что как электромагнитная мощность, проникающая в проводник из внешнего пространства (S_* при $r = R$), так и мощность накопленной в проводнике энергии магнитного поля рассеиваются в виде джоулевых потерь. В случае выраженной осевой концентрации тока (рис. 3б) вблизи поверхности мощность магнитного поля оказывается больше мощности потерь. Превышение мощности магнитного поля над мощностью потерь идет на увеличение вектора потока мощности, и он начинает возрастать от поверхности проводника к оси, достигая максимума в точке, где равны мощности магнитного поля и потерь. При дальнейшем приближении к оси проводника мощность потерь доминирует над мощностью магнитного поля. Подобное поведение вектора потока мощности характерно и для прямоугольных шин.

Характер распределения поля в случае колебательного затухающего тока определяется как соотношением между ω и α , так и размерами шины по отношению к эквивалентной глубине проникновения плоской волны с частотой ω [3]. На рис. 4 приведены распределения амплитуд

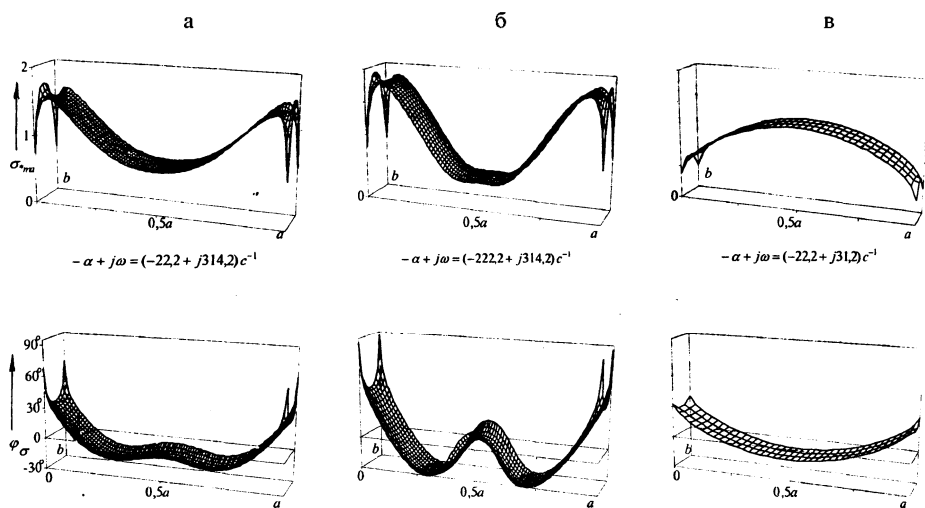


Рис. 4. Распределения амплитуд и фаз колебательного затухающего тока в сечении прямоугольной шины

σ_{*ma} и фаз φ_σ плотности тока по сечению принятой в расчетах алюминиевой шины для различных величин $(-\alpha + j\omega)$. Широкая грань шины (размер a) для случаев рис. 4а,б составляет порядка восьми глубин проникновения плоской волны, а для случая рис. 4в — порядка двух глубин проникновения. При малой величине α по отношению к ω (рис. 4а) распределение плотности тока практически такое же, как и при синусоидальном токе. Увеличение α (рис. 4б) приводит к еще большим неравномерностям в распределении амплитуды и фазы плотности тока.

При снижении частоты ω (рис. 4в) (и, следовательно, уменьшении размеров шины по отношению к эквивалентной глубине проникновения) фактор затухания α доминирует, и амплитуды плотности тока становятся максимальными в центральной части сечения проводника при более равномерном распределении фаз.

Решения, полученные в [2, 3] и в этой работе, позволяют в дальнейшем перейти к исследованию переходных процессов в проводниках.

ВЫВОД

Разработанный ранее итерационный метод решения краевой задачи расчета токораспределения распространен на случаи апериодического и колебательного затухающих токов в проводнике. Получены вынужденные решения уравнений переходного процесса, которые могут быть использованы для дальнейшего анализа. Исследования поля от апериодического тока показали, что проводникам прямоугольного профиля, как и круглым, присущи «обратный» скин-эффект и осевая концентрация плотности тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л и б и н З. О некоторых случаях обыкновенного и «обратного» skin-effect'a // Журнал прикладной физики. — 1927. — Т. IV. — Вып. 3. — С. 45—65.
2. Г е р а с и м о в и ч А. Н., Г е р а с и м о в и ч Д. А. Решение краевой задачи токораспределения в шинопроводе прямоугольного профиля итерационным методом // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). — 1996. — № 3—4. — С. 3—8.
3. Г е р а с и м о в и ч А. Н., Г е р а с и м о в и ч Д. А. Электромагнитное поле токопровода прямоугольного профиля // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). — 1996. — № 5—6. — С. 18—23.
4. Т а м м И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
5. Г е р а с и м о в и ч А. Н., Г е р а с и м о в и ч Д. А. Распределение тока в проводниках круглого сечения с учетом явлений поверхностного эффекта и эффекта близости // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). — 1996. — № 9—10. — С. 20—25.

Представлена кафедрой
электрических станций

Поступила 21.09.1999