УДК 621.372.061

ОПЕРАТОР ХЕВИСАЙДА И ВРЕМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Докт. техн. наук, проф. БОНДАРЕНКО А. В.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Канд. техн. наук, доц. МОЖАР В. И.

Белорусская государственная политехническая академия

В настоящее время в научно-исследовательской и учебно-методической литературе не нашел еще достаточного освещения операторный метод анализа, идентификации и синтеза технических систем различной природы (электротехнических, механических, акустических, гидравлических, термодинамических и др.) с использованием оператора Хевисайда. Это, по-видимому, обусловлено рядом обстоятельств, среди которых можно отметить следующие: ряд теорем и приемов расчета недостаточно разработаны, известные публикации по данной тематике распылены по научным журналам и малодоступным источникам, основное внимание в силу разных причин уделялось исчислению на базе преобразований Лапласа и некоторые другие. Однако в настоящее время оператор Хевисайда находит все более широкое применение [1, 2]. Этому способствует и прямая логическая процедура получения решения дифференциальных уравнений без перехода в частотную область комплексного переменного $s = \sigma + j\omega$, и исключение необходимости анализа вопросов сходимости несобственных интегралов Лапласа для произвольных воздействий, и, наконец, прямое отсутствие или чрезмерная трудность получения и обоснования существования изображений в случае нелинейных зависимостей.

Настоящая работа, ориентированная главным образом на учебно-методические аспекты использования оператора Хевисайда, посвящена дальнейшему развитию этих идей.

Рассмотрим общий случай дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида (параметрическая система)

$$\begin{gathered} a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}u(t) + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t) + \ldots + a_0(t)u(t) = \\ = b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}i(t) + b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}i(t) + \ldots + b_0(t)i(t); \\ n \gtrless m, \end{gathered} \qquad (1)$$

где $u(t)$ — реакция цепи (системы); $i(t)$ — функция возбуждения.

Очень часто так называемая «современная» теория систем заменяется (1) системой уравнений первого порядка Коши, что не меняет сути дальнейшего изложенния. Оставляя в стороне вопросы эквивалентности, преимущества и теневых сторон, а также методики такого перехода, введем формально оператор дифференцирования $p = \frac{d(\bullet)}{dt}$ и ему инверсный — интегрирования $p^{-1}(\bullet)=\int\limits_{-\infty}^{t}(\bullet)dt$ с требованием обратимости по отношению к p, т. е. $p^{-1}p(\bullet)=pp^{-1}(\bullet)=1(\bullet)$. На первом этапе сделаем некоторые допущения, например, будем рассматривать временные процессы, начинающиеся при $t\geq 0$ и нулевых начальных условиях. При этом для (1) получим:

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)p^i u(t)=D(t,p)u(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)p^j i(t)=N(t,p)i(t);$$
$$D(t,p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(t)p^i(\bullet);\qquad N(t,p)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)p^j(\bullet). \tag{2}$$

В дальнейшем предполагаем выполнение следующих аксиом коммутативности и дистрибутивности относительно процедур сложения и умножения операций:

$$k\left(p^m+p^n\right)u(t)=kp^m u(t)+kp^n u(t);$$

$$p^m p^n u(t)=p^n p^m u(t)=p^{m+n}u(t);$$

$$p^m\left(p^n+p^q\right)u(t)=p^{m+n}u(t)+p^{m+q}u(t),$$

где k, m, n, q — постоянные величины.

Из (2) несложно получить следующее соотношение (символическая запись):

$$u(t)=\frac{N(t,p)}{D(t,p)}i(t)=H(t,p)i(t). \tag{3}$$

В (3) $H(t,p)$ является оператором Хевисайда, связывающим между собой переменные $u(t)$, $i(t)$. Форма представления (3) легко распространяется на матричный случай (когда воздействие и реакция являются векторными величинами), случай функционалов, систем Коши и других описаний технических структур, причем с учетом принятых аксиом для важного частного случая нулевого приближения, т. е. медленного изменения коэффициентов по сравнению с быстротой протекания переходных процессов последовательность воздействия операторов $N(t,\ p)$ и $D(t,\ p)$ — несущественна

$$H(t,p)\approx H_0(t,p)=\frac{N(t,p)}{D(t,p)}. \tag{3а}$$

В общем случае операторы нестационарных систем не коммутируют.

Рассмотрим несколько теорем и свойств $H_0(t,p)$, позволяющих непосредственно определять реакцию $u(t)$ без обращения к преобразованиям Лапласа [3].

Теорема 1. Для воздействия вида $e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t)$, где $M(t)$ – некоторый полином или функция от t с постоянными коэффициентами; $\varepsilon \geq 0$, $\delta_1(t)$ – функция Хевисайда (единичная ступенчатая функция) – справедливо соотношение

$$e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t) = \frac{A\delta_0(t)}{p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}}, \tag{4}$$

где $\delta_0(t)$ – импульс Дирака (единичная импульсная функция);

$$A = e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\Bigg|_{t=0}.$$

Для доказательства рассмотрим операции, следующие из (4)

$$\left[p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}\right]e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t) = p\left\{e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t)\right\}+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t) =$$

$$= -\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t) + Ap\delta_1(t) + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\delta_1(t) = A\delta_0(t),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1.1. При $\varepsilon = 1$ и $M(t) = \alpha$ (постоянный коэффициент) получим

$$e^{-\frac{\alpha}{p}}\delta_1(t) = e^{-\alpha t}\delta_1(t) = \frac{A\delta_0(t)}{p+\alpha}; \quad A = 1;$$

при $M(t) = -\alpha$ $e^{\alpha t}\delta_1(t) = \dfrac{A\delta_0(t)}{p-\alpha}$; случай $\alpha = 0$ отвечает определению сингулярных функций $\delta_1(t) = \delta_0(t)/p$.

Следствие 2.1. Из (4) для $\varepsilon = 2$ и $M(t) = \pm\alpha$ придем к соотношениям

$$e^{\mp\frac{\alpha}{p^2}}\delta_1(t) = e^{\mp\frac{\alpha}{2}t^2}\delta_1(t) = \frac{p\delta_0(t)}{p^2 \pm \alpha}A; \quad A = 1.$$

Заметим, что преобразование Лапласа для $\alpha < 0$ вообще не существует, а вопрос устойчивости с учетом свойств данного звена системы должен решаться при рассмотрении устойчивости системы в целом.

Следствие 3.1. Из следствия 1.1 несложно получить ряд известных результатов операционного исчисления. Действительно,

$$e^{-\alpha t}\delta_1(t) + e^{\alpha t}\delta_1(t) = \left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{p-\alpha}\right)\delta_0(t) = \frac{2p\delta_0(t)}{p^2-\alpha^2},$$

т. е.

$$\operatorname{ch}\alpha t \cdot \delta_1(t) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}\delta_0(t), \text{ а при } \alpha = j\gamma\,;$$

$$\cos\gamma t\,\delta_1(t) = \frac{p\delta_0(t)}{p^2+\gamma^2}\;;$$

$$\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)\delta_1(t) = \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right)\delta_0(t) = \frac{2\alpha}{p^2-\alpha^2}\delta_0(t),$$

т. е.

$$\operatorname{sh}\alpha t \cdot \delta_1(t) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\delta_0(t),$$

а при $\alpha = j\gamma$

$$\sin\gamma t \cdot \delta_1(t) = \frac{\gamma}{p^2+\gamma^2}\delta_0(t).$$

На основании очевидного соотношения (последовательное интегрирование импульса Дирака) $\frac{\delta_0(t)}{p^{m+1}} = \frac{t^m}{m!}\delta_1(t)$ легко найти ряд других важных соотношений для элементарных функций:

$$\frac{\delta_0(t)}{(p+\alpha)^{m+1}} = \frac{t^m}{m!}e^{-\alpha t}\delta_1(t)\;;\quad \frac{\alpha}{(p+\beta)^2+\alpha^2}\delta_0(t) = e^{-\beta t}\sin\alpha t \cdot \delta_1(t);$$

$$\frac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\alpha^2}\delta_0(t) = e^{-\beta t}\cos\alpha t \cdot \delta_1(t)$$

и т. п., т. е. легко могут быть составлены таблицы необходимых соотношений по примеру операционного исчисления [3].

Следствие 4.1. При $\varepsilon = 1$ и $M(t)$ общего вида $e^{-\frac{M(t)}{p}}\delta_1(t) = A\frac{\delta_0(t)}{p+M(t)}$, откуда видно, что

$$\left(e^{-\frac{M(t)}{p}} + e^{\frac{M(t)}{p}}\right)\delta_1(t) = A\frac{2p}{p^2-M^2(t)}\delta_0(t)\;;\; \operatorname{ch}\left(\frac{M(t)}{p}\right)\delta_1(t) = \frac{A\delta_0(t)}{p^2-M^2(t)}.$$

Случай $M(t) = \alpha$ приводит к данным следствия 3.1 и т. д.

Теорема 2. Для воздействия вида $e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)$ справедливо соотношение

$$H_0(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} = e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} H_0(t, p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}) i(t)\delta_1(t)$$

или

$$e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} H_0(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} = H_0(t, p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}) i(t)\delta_1(t). \qquad (5)$$

Для доказательства утверждений теоремы 2 рассмотрим правую часть уравнения (2) при данном воздействии и выполнении операций дифференцирования

$$N(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)p^j \left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} =$$

$$= e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} \sum_{j=0}^{m} b_j(t)(p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}})^j i(t)\delta_1(t) = e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} N(t, p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}) i(t)\delta_1(t). \qquad (6)$$

С учетом (3) и (3а) получим $H_0(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} =$

$$= \frac{1}{D(t,p)} N(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} = \frac{1}{D(t,p)} e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} N(t, p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}) i(t)\delta_1(t).$$

Изменим последовательность воздействия операторов $N(t,p)$ и $D(t,p)$, тогда

$$H_0(t,p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\} = N(t,p)\frac{\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} i(t)\delta_1(t)\right\}}{D\left(t,\ p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}\right)} =$$

$$= e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} H_0(t, p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}) i(t)\delta_1(t).$$

Из данной теоремы «смещения» в p-области можно получить ряд интересных частных случаев.

Следствие 1.2. $H_0(t,p) = k_0$ — постоянная величина. Из (5) вытекает тождество.

При

$$H_0(t,p)=\frac{1}{p};\quad e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}\frac{1}{p}\left\{e^{\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}}i(t)\delta_1(t)\right\}=\frac{1}{p+\frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}}\{i(t)\delta_1(t)\},$$

что, в частности, при подстановке $\varepsilon=1$ и $M(t)=\alpha$ приведет к $e^{-\alpha t}\frac{1}{p}\left\{e^{\alpha t}i(t)\delta_1(t)\right\}=\frac{1}{p+\alpha}\{i(t)\delta_1(t)\}$ и далее, полагая замену $i(t)\delta_1(t)\to\delta_0(t)$, получим $e^{-\alpha t}\delta_1(t)=\frac{\delta_0(t)}{p+\alpha}$ – результат следствия 1.1.

Следствие 2.2. Для независящего от времени оператора Хевисайда второго порядка $H_0(t,p)=\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$; $M(t)=\alpha,\beta$; $\varepsilon=1$ – из (6) вытекает, что

$$u(t)=e^{-\alpha t}\frac{1}{p}\left[e^{(\alpha-\beta)t}\left(\frac{e^{\beta t}i(t)\delta_1(t)}{p}\right)\right]=$$

$$=\frac{i(t)\delta_1(t)}{(p+\alpha)(p+\beta)}=e^{-\beta t}\frac{1}{p}\left[e^{(\beta-\alpha)t}\left(\frac{e^{\alpha t}i(t)\delta_1(t)}{p}\right)\right]-$$

последовательность операции интегрирования может быть изменена. Далее можно рассмотреть любое число сомножителей, большее 2.

Пусть

$$M(t)=0;\ \alpha=\beta=\alpha_0;\frac{i(t)}{(p+\alpha_0)^2}=e^{-\alpha_0 t}\frac{1}{p^2}\left[e^{\alpha_0 t}i(t)\right]$$

Получили соотношение для кратного корня α_0.

Следствие 3.2. При разложении $H_0(t,p)$ на элементарные дроби с времязависимыми вычетами

$$H_0(t,p)=\frac{N(t,p)}{D(t,p)}=\sum_{i=1}^{m-n}k_i(t)p^i+k_0(t)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{k_{ij}(t)}{(p+\alpha_i(t))^j}\ ,\qquad(7)$$

где первая сумма отсутствует при $m\le n$, а при $m<n$, $k_0(t)=0$;

m_i – кратность корня знаменателя α_i;

$$n=\sum_{i=1}^{N}m_i\ ,$$

N – число различных корней $D(t,p)$; $k_{ij}(t)$ – вычеты для элементарных дробей – легко осуществить переход к левым частям (5) теоремы 2, либо ее частным случаям – следствиям 1.2–3.2.

Следствие 4.2. Из (5) при воздействии в виде импульса Дирака $i(t)=\delta_0(t)$ получим

$$e^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} H_0(t,p)\{A\delta_0(t)\} = Ae^{-\frac{M(t)}{p^{\varepsilon}}} h_0(t) = AH_0\left(t, p + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}\right) i(t), \qquad (8)$$

где $h_0(t)$ — импульсная характеристика системы.

Из (8) видно, что

$$H_0(t,p)\delta_0(t) = H_1(t,p)H_2(t,p)\delta_0(t) = H_1(t,p)i(t),$$

где $i(t) = H_2(t,p)\delta_0(t)$ — произвольное возбуждение системы, в том числе получаемое, например, из следствий 1.1—4.1, т. е. функция воздействия может быть замещена соответствующей импульсной характеристикой $h_0(t)$ из набора этих функций. Переходная характеристика системы $h_1(t)$ определяется для $H_2(t,p) = \frac{1}{p}$; $h_1(t) = h_0(t)/p$.

Приведем ряд иллюстративных примеров.

Пример 1. Для цепи, показанной на рис. 1, определить переходные характеристики по току $h_{1i}(t)$ и напряжению на емкости $h_{1u_c}(t)$, а также начальное напряжение $u_L(0_+)$.

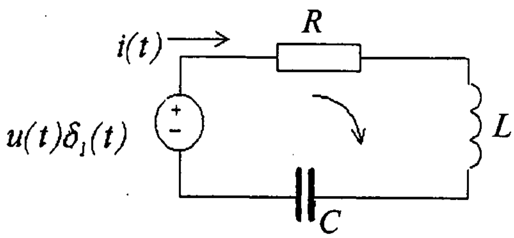

Рис. 1

Из второго закона Кирхгофа при нулевых начальных условиях получим

$$i(t) = \frac{p}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \frac{u(t)}{L}\delta_1(t) = H_0(p)u(t)\delta_1(t).$$

Корни знаменателя при общепринятых обозначениях составляют:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\omega_0)^2}; \quad \alpha = \frac{R}{2L}; \quad (\omega_0)^2 = 1/(LC) \ .$$

Для колебательного режима, например $\alpha < \omega_0$. Пусть введено обозначение:

$$\omega_\alpha = \sqrt{(\omega_0)^2 - \alpha^2}; \quad s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_\alpha .$$

Таким образом, из следствия 3.1:

$$h_{1i}(t)=i(t)\Big|_{u(t)=\delta_1(t)=\frac{\delta_0(t)}{p}}=\frac{1}{L}\frac{1}{(p+\alpha)^2+\omega_\alpha^2}\delta_0(t)=\frac{1}{L\omega_\alpha}e^{-\alpha t}\sin\omega_\alpha t\cdot\delta_1(t);$$

$$u_c(t)=\frac{1}{Cp}i(t);$$

$$h_{1u_c}=u_c(t)\Big|_{u(t)=\frac{\delta_0(t)}{p}}=\frac{1}{CLp}\frac{\delta_0(t)}{(p+\alpha)^2+\omega_\alpha^2}=\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_\alpha^2}\right]\delta_0(t)=$$

$$=\left[1-\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_\alpha}(\omega_\alpha\cos\omega_\alpha t+\alpha\sin\omega_\alpha t)\right]\delta_1(t);\quad u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=\frac{p^2u(t)\delta_1(t)}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}},$$

т. е.
$$u_L(0_+)=u(0_+).$$

Результат полезно сравнить с выводами, представленными в [3].

Пример 2. Примем, что некоторая техническая система описывается уравнением (для свободной составляющей)

$$\frac{d}{dt}u_{св}(t)+\omega\operatorname{tg}(\omega t)u_{св}(t)=0,$$

где

$$M(t)=\omega\operatorname{tg}(\omega t);\quad \omega=\mathrm{const}.$$

Согласно (7), при $i=j=1=m_i$; $\varepsilon=1$ $\quad H_0(t,p)=\dfrac{\delta_0(t)}{p+M(t)}$, откуда

$u_{св}(t)=Ae^{-\frac{M(t)}{p^\varepsilon}}\delta_1(t)=Ae^{\ln\cos(\omega t)}\delta_1(t)=A\cos(\omega t)\delta_1(t)$, где A=1 — интересный случай возникновения колебаний в системе первого порядка.

Пример 3. Гипотетическая цепь с оператором Хевисайда. Согласно (7),

$$H_0(t,p)=\frac{1}{(p+1)(p-t^2)}=\frac{1}{t^2+1}\left(-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p-t^2}\right).$$

Здесь $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-t^2$. Переходная характеристика составит

$$h_1(t)=\frac{1}{t^2+1}\left(-e^{-t}+e^{\frac{t^3}{3}}\right)\delta_1(t).$$

Заметим, что изображение по Лапласу для второго члена не существует.

Примечание: В случае m-кратного корня $\alpha_i(t)$ из (5) и (7) следует

$$e^{-\frac{\alpha_i(t)}{p^\varepsilon}}\frac{1}{p^m}\left\{e^{\frac{\alpha_i(t)}{p^\varepsilon}}i(t)\delta_1(t)\right\}=\frac{i(t)}{\left(p+\dfrac{\alpha_i t}{p^{\varepsilon-1}}\right)^m}\delta_1(t),\tag{9}$$

что при $\varepsilon=1$, $\alpha_i(t)=\alpha_i$ согласуется с результатами следствия 3.1.

На базе операторов Хевисайда можно получить ряд теорем, аналогичных теоремам операционного исчисления (преобразований Лапласа), при этом еще раз подчеркнем, что обратное преобразование Лапласа здесь не используется, а также и вопросы сходимости несобственных интегралов.

Теорема 3. Дифференцирование по p-параметру (оператору). В соответствии с (5), продифференцировав λ раз $(\lambda \geq 0)$ левые и правые части, найдем

$$\frac{d^\lambda}{dp^\lambda} H_0(t, p)\left\{e^{\frac{M(t)}{p^\varepsilon}} i(t)\delta_1(t)\right\} = e^{\frac{M(t)}{p^\varepsilon}} \frac{d^\lambda}{dp^\lambda} H_0\left(t, p + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}\right)\{i(t)\delta_1(t)\}. \qquad (10)$$

Рассмотрим третью группу слагаемых в (7). На основании (4)

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{A\delta_0(t)}{p + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}}\right) = -\frac{A\delta_0(t)}{\left(p + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}\right)^2} = -te^{-\frac{M(t)}{p^\varepsilon}}\delta_1(t).$$

Повторяя данную процедуру λ раз, установим, что

$$\frac{d^\lambda}{dp^\lambda}\left(\frac{\delta_0(t)}{p + \frac{M(t)}{p^{\varepsilon-1}}}\right) = (-1)^\lambda t^\lambda e^{-\frac{M(t)}{p^\varepsilon}}\delta_1(t) -$$

вывод, аналогичный соответствующей теореме дифференцирования в частотной области S. На основе последней формулы несложно установить еще несколько полезных результатов-следствий.

Следствие 1.3. Сформулируем результат для простейшего случая $\frac{M(t)}{p} = \alpha t$, где α — постоянный коэффициент ($\varepsilon = 1$),

$$p^\xi \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\left(\frac{\delta_0(t)}{p+\alpha}\right) = \frac{d^\xi}{dt^\xi}(-1)^\lambda t^\lambda e^{-\alpha t}\delta_1(t);$$

$$\xi \gtrless \lambda.$$

Следствие 2.3.

$$\left(-p\frac{d}{dp}\right)^\lambda \frac{\delta_0(t)}{p+\alpha} = \left(\frac{d}{dt}t\right)^\lambda e^{-\alpha t}\delta_1(t).$$

Следствие 3.3.

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^\lambda e^{-\alpha t}\delta_1(t) = \left(-\frac{d}{dp}p\right)^\lambda \frac{\delta_0(t)}{p+\alpha}.$$

Следствие 4.3. На основании представления (7) при $\frac{1}{p}M_i(t)=\alpha_i t$ и результатов следствий теоремы 3 можно получить, обобщая (10):

$$\frac{d}{dp^{\lambda}}H_0(p)=(-1)^{\lambda}t^{\lambda}\left[\sum_{i=0}^{m-n}k_i p^i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}k_{ij}\left(\sum_{k=0}^{j-1}c_k t^k\right)e^{-\alpha_i t}\right]. \qquad (11)$$

Здесь c_k – некоторые постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, что соответствует $u(t)=u_{\text{вын}}(t)+u_{\text{св}}(t)$.

Теорема 4. Операция дифференцирования во временной области. Ранее в соотношении (2) были приняты нулевые начальные условия. Снимем это ограничение и получим

$$\frac{u(t)}{p}=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt+c_0\delta_1(t)=\int_{0}^{t}u(t)dt+c_0\delta_1(t),$$

где c_0 – начальное значение.

Другими словами

$$\frac{u(t)}{p}\delta_1(t)+c_0\delta_1(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt+c_0\delta_1(t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $pu(t)=i(t)$, откуда

$$u(t)\delta_1(t)=\frac{i(t)}{p}\delta_1(t)+u_0\delta_1(t);\;\; c_0=u_0.$$

Отсюда

$$i(t)\delta_1(t)=pu(t)\delta_1(t)-pu_0\delta_1(t)=pu(t)\delta_1(t)-u_0\delta_0(t).$$

При повторном дифференцировании обеих частей последнего уравнения найдем

$$p[pu(t)\delta_1(t)-u_0\delta_0(t)]-u_0'\delta_0(t)=p^2u(t)\delta_1(t)-pu_0\delta_0(t)-u_0'\delta_0(t)=$$

$$=pi(t)\delta_1(t)-i_0\delta_0(t).$$

Обобщение на случай n-производной приведет к

$$\begin{gathered}p^n u(t)\delta_1(t)-p^{n-1}u_0\delta_0(t)-p^{n-2}u_0'\delta_0(t)-\ldots-u_0^{(n-1)}\delta_0(t)=\\=p^{n-1}i(t)\delta_1(t)-p^{n-2}i_0\delta_0(t)-\ldots-i_0^{(n-2)}\delta_0(t).\end{gathered} \qquad (12)$$

Из соотношения (12) следуют известные схемы замещения L и C элементов с учетом ненулевых начальных условий в операторном методе:

$$u_c(t)\delta_1(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt + u_c(0_-)\delta_1(t) = \frac{i_c(t)}{Cp}\delta_1(t) + u_c(0_-)\delta_1(t);$$

$$Cpu_c(t)\delta_1(t) - Cu_c(0_-)\delta_0(t) = i_c(t)\delta_1(t);$$

$$i_L(t)\delta_1(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt + i_L(0_-)\delta_1(t) = \frac{u_L(t)}{Lp}\delta_1(t) + i_L(0_-)\delta_1(t);$$

$$Lpi_L(t)\delta_1(t) - Li_L(0_-)\delta_0(t) = u_L(t)\delta_1(t).$$

На рис. 2а представлены схемы замещения для постоянных параметров L и C при введении операторных сопротивлений Z_L и Z_c и проводимостей Y_L и Y_c.

Наряду с традиционными R, L и C элементами (линейными, нелинейными и параметрическими) в последний период нашли распространение и элементы высшего порядка, определяемые операторным соотношением $p^\beta u(t) = f\left(p^\alpha i(t)\right)$, где α и β — положительные и отрицательные целые числа [5]. Данные элементы оказались необходимыми при синтезе и реализации некоторых цепей, системном моделировании, устранении тупиковых точек и состояний цепей, выходящих за рамки принятых моделей и в других случаях. В качестве примера рассмотрим линейную частотно-зависимую емкость:

$$p^\beta u(t) = kp^\alpha i(t);\ u(t) = kp^{(\alpha-\beta)}i(t);$$

$$(\alpha-\beta) = \ldots -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ldots;\quad Z_c(j\omega) = -jk\omega^{(\alpha-\beta)}$$

($\alpha - \beta = -1$ — соответствует обычной емкости $C = 1/k$).

Пример 4. Построить схему замещения частотно-зависимой емкости при ненулевых начальных условиях и $(\alpha-\beta) = 3$. Ясно, что

$$i(t)\delta_1(t) = \frac{1}{kp^3}\{u(t)\}\delta_1(t) + \frac{1}{p}i(0_-)\delta_0(t) + \frac{1}{p^2}i'(0_-)\delta_0(t) + \frac{i''(0_-)}{p^3}\delta_0(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j\omega C(\omega)U_m = I_m,\ \text{где}\ \ C(\omega) = \frac{1}{k\omega^4}.$$

Схема замещения показана на рис. 2б. Очевидна и возможность построения схемы замещения в виде последовательного соединения элементов.

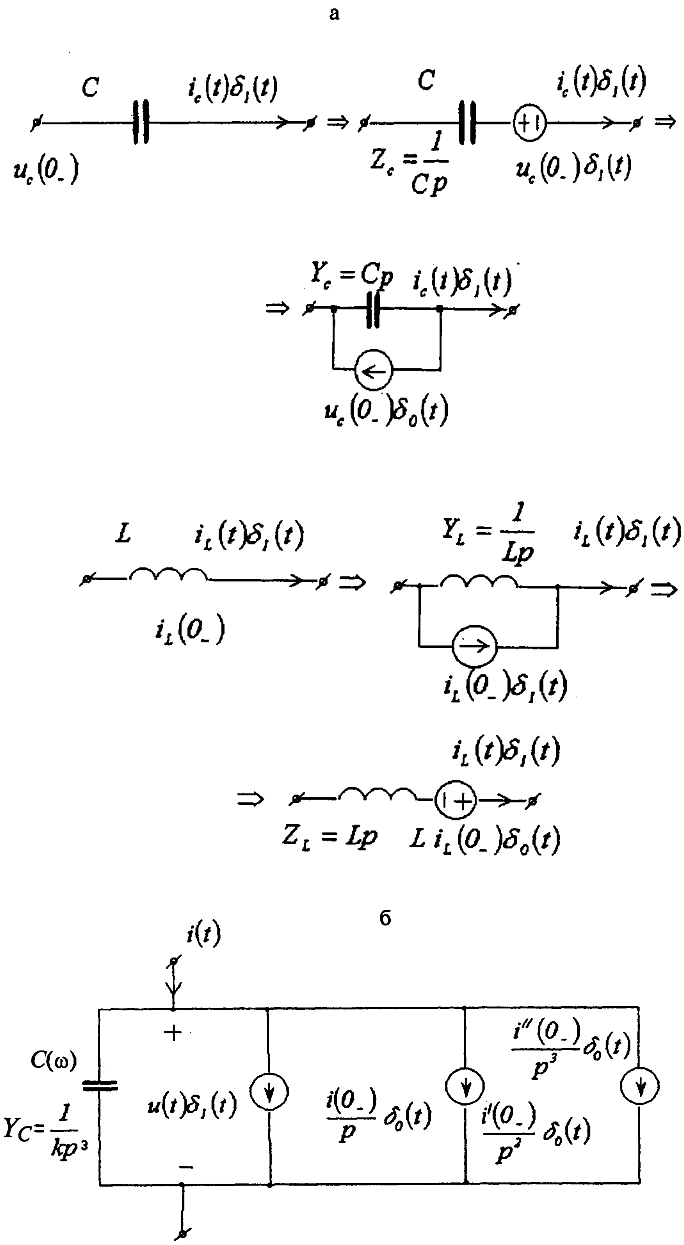

Рис. 2

Теорема 5. Операция интегрирования во временной области. Применим (12) к следующему тождеству:

$$p\left(\int_0^t i(t)\delta_1(t)dt - \frac{i_0^{-1}\delta_0(t)}{p}\right) = i(t)\delta_1(t)$$

или

$$\int_0^t i(t)\delta_1(t)dt = \frac{i(t)}{p}\delta_1(t) + \frac{i_0^{-1}\delta_0(t)}{p}.$$

Здесь i_0^{-1} — начальное значение первообразной.

При повторном интегрировании получим

$$p^2\left(\int_0^t\int_0^t i(t)\delta_1(t)dt^2 - \frac{i_0^{-1}\delta_0(t)}{p^2} - \frac{i_0^{-2}\delta_0(t)}{p}\right) = i(t)\delta_1(t),$$

т. е.
$$\int_0^t\int_0^t i(t)\delta_1(t)dt^2 = \frac{i(t)}{p^2}\delta_1(t) + \frac{i_0^{-1}\delta_0(t)}{p^2} + \frac{i_0^{-2}\delta_0(t)}{p}.$$

В случае n-кратного интегрирования

$$\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t i(t)\delta_1(t)dt^n = \frac{i(t)}{p^n}\delta_1(t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{i_0^{-i}}{p^{n-i+1}}. \qquad (13)$$

Результаты теорем (4) и (5) можно успешно использовать при решении интегродифференциальных уравнений.

В заключение рассмотрим пример анализа нелинейной электротехнической системы.

Пример 5. Включение двигателя постоянного тока под действие постоянного напряжения $U\delta_1(t)$ и момент сопротивления M_c (рис. 3). Определить $\omega(t) = f(u_g(t))$; $\omega(t)$ — угловая скорость вала; $u_g(t)$ — напряжение возбуждения.

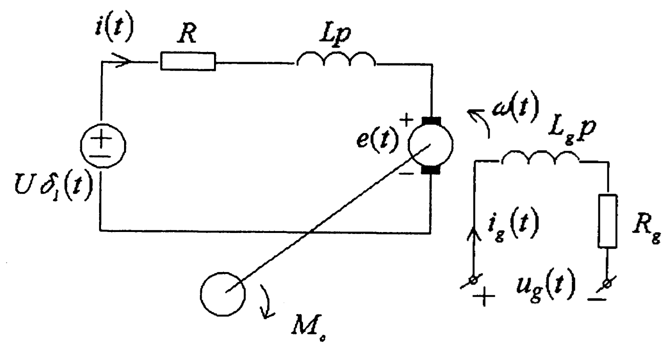

Рис. 3

Примем,что $e(t) = a\Phi(t)\omega(t)$. Исходная упрощенная система уравнений — нелинейная:

$$\begin{cases} Lpi(t) + Ri(t) + a\Phi(t)\omega(t) = U\delta_1(t); \\ Jp\omega(t) + M_c = a\Phi(t)i(t); \\ L_g pi_g(t) + R_g i_g(t) = u_g(t); \\ \Phi(t) = \Phi(i_g(t)). \end{cases}$$

Здесь J — момент инерции; a — конструктивный параметр; индекс g относится к цепи возбуждения.

Задача в итоге сводится к нелинейной зависимости $F(\omega(t), u_g(t)) = 0$.

Перейдя к малым приращениям, линеаризуем исходную систему уравнений: $i(t) = i_0 + \Delta i(t)$; $u_g(t) = u_{g0} + \Delta u_g(t)$; $i_g(t) = i_{g0} + \Delta i_g(t)$; $\Phi(t) = \Phi_0 + \Delta\Phi(t)$; $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t)$.

Тогда, опуская малые второго порядка, найдем:

$$\begin{cases} (Lp + R)\Delta i(t) + a[\Phi_0 \Delta\omega(t) + \omega_0 \Delta\Phi(t)] = 0; \\ Jp\Delta\omega(t) = a[\Phi_0 \Delta i(t) + i_0 \Delta\Phi(t)]; \\ (L_g p + R)\Delta i_g(t) = \Delta u_g(t); \\ \Delta\Phi(t) = b\Delta i_g(t); \; b = \text{const}. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим искомый оператор Хевисайда:

$$H_0(p) = \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta u_g(t)} = \frac{k(pT + 1) - k_1}{(pT_g + 1)(p^2 T T_m + pT_{m+1})}; \quad k = \frac{R}{R_g}\frac{i_0 b}{\Phi_0^2 a};$$

$$k_1 = \frac{b\omega_0}{\Phi_0 R_g}; \; T_g = \frac{L_g}{R_g}; \; T = \frac{L}{R}; \; T_m = \frac{JR}{\Phi_0^2 a^2}.$$

Откуда, например, при линейном законе изменения:

$$\Delta u_g(t) = c_0 t \delta_1(t); \quad c_0 = \text{const};$$

$$\Delta\omega(t) = H_0(p)\Delta u_g(t)\Bigg|_{\Delta u_g(t) = c_0 t\delta_1(t) = \frac{c_0 \delta_0(t)}{p^2}} = A_{00} + A_{01}t + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t},$$

где A_{00}, A_{01}, A_1, A_2, A_3 — вычеты при соответствующих корнях знаменателя; $\alpha_0 = 0$ (двухкратный корень); $\alpha_1 = -\frac{1}{T_g}$; $\alpha_{2,3} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{1}{TT_m}}$.

Нетрудно установить общий вид решения и при переменных $\alpha_1(t)$, $\alpha_{2,3}(t)$.

Доказанные теоремы легко переходят в аналогичные теоремы преобразований Лапласа при замене $p \to s = \sigma + j\omega$ [3].

Например, из (5) и (7) при $M(t) = \alpha$, $\varepsilon = 1$ получим

$$e^{-\alpha t} H_0(p)\{e^{\alpha t} i(t)\delta_1(t)\} = H_0(p + \alpha) i(t)\delta_1(t).$$

Причем, считая воздействие в виде обобщенной экспоненты $i(t) = e^{st}$ (или в общем случае — комбинацию таких экспонент, т. е. ряд Фурье), можно установить, что для отдельных слагаемых в (7):

$$e^{-\alpha t} p\{e^{\alpha t} e^{st}\} = (s + \alpha)e^{st} = (p + \alpha)e^{st} \text{ — для множителя } p;$$

$$e^{-\alpha t}\frac{1}{p}\left\{e^{\alpha t}e^{st}\right\}=\frac{e^{st}}{s+\alpha}=\frac{e^{st}}{p+\alpha}$$ — для элементарной дроби $\frac{1}{p+\alpha}$.

Обобщения для $H_0(p)$ приведут к $H_0(p+\alpha)e^{st}\big|_{p\to s}=H_0(s+\alpha)e^{st}$, т. е. формальной замене p на s.

Такая далеко идущая аналогия все же не является полной, поскольку несобственные интегралы Лапласа требуют дополнительных обоснований для своей сходимости, в то же время как оператор Хевисайда рассматривается для промежуточного текущего значения t (или в общем случае — некоторого вектора параметров $\bar{x}$) и фактически идентичен лишь «текущему» преобразованию Лапласа. Представление оператора Хевисайда в формах

$$H_0(p)=\prod_{i=1}^{\vartheta}H_{0i}(p);\quad H_0(p)=\sum_{i=1}^{\mu}H_{0i}(p);\quad H_0(p)=\sum_{(\varepsilon_\eta)}\prod_{i=1}^{\varepsilon_\eta}H_{0i}(p)$$

позволяет решить вопрос о реализации системы в виде каскадного, параллельного и смешанного соединения блоков низших порядков, а также непосредственного моделирования с помощью интеграторов, дифференциаторов и сумматоров в соответствии с (1) и (2), что широко применяется, например, в технике моделирования нелинейных систем с помощью интегралов и ряда Вольтера [4].

В заключении отметим, что «текущие» преобразования Лапласа и Фурье, отвечающие заданному оператору Хевисайда и локальной интегрируемости широкого класса функций, т. е., например, $I(s,t)$ или $I(j\omega,t)$, могут и не иметь пределов при $t\to\infty$. При этом обратное преобразование Лапласа не входит в концепцию получения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kullstam P. A. Heaviside's Operational Calculus: Oliver's Levenge, Trans // IEEE on Educ. — 1991. — Vol. 34, № 2, May.
2. Davies A. M. A Unifed Theory of Lumped Circuits and Differential Systems Based on Heaviside Operators and Causality // IEEE Trans. on Circuit and Systems-1: Fundamental Theory and Applications. — 1994. — Vol. 41, № 4, November.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
4. Bussgang I. I., Ehrman L., Graham I. W. Analysis of Nonlinear Systems With multiple Inputs. Proc. // IEEE. — 1974. — Vol. 69, № 8.
5. Chua L. O. Device Modeling Via Basic Nonlinear Circuit Elements // IEEE Trans on Circuits and Systems. — 1980. — Vol. cas-27, № 11, November. — P. 1014—1044.

Представлена кафедрой
электротехники и
электроники

Поступила 14.02.2000