

4. К р у м м Л. А., П у н ч а с А. А., Т р у щ е л е в а Л. А. К оптимизации режима ТЭС градиентным методом // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1967. — № 6. — С. 9—20.

5. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Основы динамического программирования. — Мн.: БГУ, 1975. — 259 с.

Представлена кафедрой  
программного обеспечения  
вычислительной техники  
и автоматизированных систем

Поступила 27.07.2000

УДК 532.517.4

## **РАСЧЕТЫ ОДНОРОДНЫХ СДВИГОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЗАМКНУТЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВТОРЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОМЕНТОВ**

**Асп. ШЕЛЕГЕДИНА Е. Н.**

*Санкт-Петербургский государственный технический университет*

Для решения прикладных гидрогазодинамических задач в области энергетики (расчеты турбулентных течений жидкостей и газов в соплах, проточных частях турбомашин, камерах сгорания, диффузорах и т. д.) широко применяются полуэмпирические модели турбулентности. Однако, несмотря на более чем тридцатилетний опыт разработок и использования таких моделей, до сих пор все они имеют ограниченную универсальность. Следует отметить, что практически все современные полуэмпирические модели турбулентности базируются на одноточечных статистических характеристиках турбулентности. Один из возможных путей усовершенствования полуэмпирических моделей — использование двухточечных характеристик турбулентности, с помощью которых можно получить значительно больше информации о структуре турбулентного потока. Разработка полуэмпирических моделей на базе двухточечных моментов является актуальной задачей как в свете возможности усовершенствования с их помощью широко применяемых в инженерной практике моделей типа « $k - \varepsilon$ », « $k - kb$ », модели рейнольдсовых напряжений и т. п. (как, например, в [1–4]), так и для самостоятельного их использования при изучении турбулентных течений.

Построение моделей на основе уравнений для двухточечных моментов второго порядка имеет два направления. Одно направление заключается в использовании спектральной формы этих уравнений (однако модели такого типа не получили широкого распространения на практике, поскольку замыкающие формулы для спектральных уравнений весьма сложны), второе — базируется на использовании уравнений для двухточечных корреляций, записанных в физических координатах, замыкание которых может быть осуществлено посредством гораздо более простой и наглядной градиентной гипотезы, позволяющей выразить

третьи корреляционные моменты через градиенты вторых. Такие градиентные формулы использованы для замыкания уравнения Кармана—Ховарта в [3, 5–7]. Подчеркнем, что в указанных работах эта модель была применена только для изучения вырождения однородной изотропной турбулентности и проверена на небольшом числе опытных данных.

В настоящей работе рамки применения указанной модели были значительно расширены. На базе уравнений для вторых двухточечных моментов построены две полуэмпирические модели для описания однородной турбулентности с однородной скоростью сдвига, а именно: одна модель в предположении об изотропности турбулентности, а вторая — об осевой симметрии статистических характеристик пульсационного движения. Основное уравнение первой модели было выведено из уравнения для следа тензора вторых двухточечных моментов с использованием для выражения компоненты  $\langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle$  обобщенной гипотезы Невзглядова-Драйдена, а именно

$$\left| \langle u'_{2B} u'_{1A} \rangle \right| = \beta \frac{\langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{2}. \quad (1)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные точки внутри жидкости;  $u'_{iA,B}$  — проекция пульсационной скорости, взятой в точках  $A$ ,  $B$ , на ось  $z_i$ ;  $\beta$  — эмпирическая постоянная, имеющая согласно опытным данным значение  $\approx 0,3$ ; угловые скобки обозначают осреднение. Замыкание полученного в итоге уравнения осуществлялось посредством градиентной формулы связи вторых и третьих двухточечных моментов, предложенной в работе Н. И. Акатнова [7] для замыкания уравнения Кармана—Ховарта и имеющей вид

$$B_3 = \nu_t \frac{\partial B_2}{\partial r}, \quad (2)$$

где

$$B_2 \equiv \langle u_A^* u_B^* \rangle; \quad B_3 \equiv \langle u_A^{*2} u_B^* \rangle;$$

$u_{A,B}^*$  — проекция пульсационной скорости в точках  $A$ ,  $B$  на направление вектора  $r$ , соединяющего точки  $A$  и  $B$ ;  $r = |r|$ ;  $\nu_t$  — коэффициент турбулентной вязкости, определяемый формулой

$$\nu_t = l \sqrt{b} [1 - f(z_1, r)], \quad (3)$$

где  $b(z_1) = B_2(z_1, 0)$ ;  $f(z_1, r) = \frac{B_2(z_1, r)}{b(z_1)}$ ; направление оси  $z_1$  совпадает с

направлением течения жидкости, а оси  $z_2$  — с направлением градиента осредненной скорости;  $l$  — путь смешения, который подбирался исходя из требований размерности, известных свойств функций  $B_2$  и  $B_3$  при малых значениях  $r$  и, наконец, условий наилучшего согласия расчетов вырождения однородной изотропной турбулентности с эксперименталь-

ными данными. Полученное уравнение имело вид известного уравнения Кармана—Ховарта, замкнутого посредством (2) и с добавленным генерационным членом, равным  $\beta B_2 d\langle u_1 \rangle / dz_2$  ( $\langle u_1 \rangle$  — осредненная скорость потока). Уравнение было дополнено граничными условиями для функции  $B_2$  вида

$$\partial B_2 / \partial r = 0 \text{ при } r = 0; B_2 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (4)$$

и решалась численно при помощи маршевой по координате  $z_1$  неявной конечно-разностной схемы первого порядка точности по  $z_1$  и второго по  $r$ . Начальные условия в некотором сечении  $z_1 = z_{10}$  задавались на основе опытных данных. Найденные в результате коэффициенты корреляции, одномерные энергетические спектры, кинетическая энергия турбулентности, интегральные и тэйлоровские масштабы в потоке с однородным сдвигом хорошо согласуются с опытными данными [8, 9]. Более подробно о результатах этих расчетов можно прочесть в [10].

Вторая модель основана на предположении осевой симметрии характеристик пульсационного движения и для ее построения применена теория бессдвиговой осесимметричной турбулентности С. Чандрасекхара [11, 12]. Заключение о возможности применения данной теории для приближенного описания турбулентности в сдвиговых потоках базируется на опытных данных, а именно: согласно экспериментам в турбулентных сдвиговых потоках (пограничных слоях, струях, в потоке с однородным сдвигом и т. д.) пульсационное движение в первом приближении можно считать осесимметричным.

Согласно теории осесимметричной турбулентности [11] все соленоидальные двухточечные моменты поля скорости второго порядка выражаются через две скалярные функции:  $B(t, r)$  и  $Q(t, r)$  ( $t$  — время,  $r$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ ), а моменты третьего порядка — через шесть. Как и при построении первой модели, уравнения для функций  $B$  и  $Q$  были выведены с помощью уравнения для следа тензора вторых моментов, имеющего в данном случае следующий вид:

$$\frac{\partial \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle}{\partial t} = \Sigma_{ii} - 2 \frac{d\langle u_1 \rangle}{dz_2} \langle u'_{1A} u'_{2B} \rangle + 2\nu \nabla^2 \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle; \quad (5)$$

$$\Sigma_{ii} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[ \langle u'_{iA} u'_{kA} u'_{iB} \rangle - \langle u'_{iB} u'_{kB} u'_{iA} \rangle \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ \langle p'_{iA} u'_{iB} \rangle - \langle p'_{iB} u'_{iA} \rangle \right], \quad (6)$$

где  $\xi_i = z_{iB} - z_{iA}$  — относительные координаты;  $p'_{A,B}$  — пульсация давления в точках  $A, B$ ;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu$  — кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Полагая далее орт оси симметрии  $\lambda$  параллельным направлению осредненной скорости  $z_1$ , можем выразить величину  $\langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle$  с помощью теории [11] через функции  $B(t, r)$  и  $Q(t, r)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle u'_{1A} u'_{1B} \rangle + \langle u'_{2A} u'_{2B} \rangle + \langle u'_{3A} u'_{3B} \rangle \equiv Q_{ii} = \\ & = (r \partial B / \partial r + 3B) - (r \partial Q / \partial r + 2Q) + r \mu^2 \partial Q / \partial r, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mu$  – косинус угла между  $r$  и  $\lambda$ . Входящий в (5) Лапласиан от  $Q_{ii}$  определяется (7), если заменить в ней  $B$  на  $\nabla^2 B$ , а  $Q$  на  $\nabla^2 Q$ . Для выражения касательной компоненты тензора вторых моментов, входящей в генерационный член (5), использовалась обобщенная гипотеза (1), принятая в данном случае в виде

$$-\langle u'_{1A} u'_{2B} \rangle = \beta Q_{i^*}^* / 2, \quad (8)$$

где  $Q_{i^*}^*$  находится по (7) через функции  $B^*$  и  $Q^*$ , имеющие следующие определения:

$$B^* = B_{(+)} - n_B(B - 2Q); \quad Q^* = Q_{(+)} + n_Q(B - 2Q). \quad (9)$$

Функции  $B_{(+)}$ ,  $Q_{(+)}$  совпадают с  $B$  и  $Q$ , если последние неотрицательны и равны нулю в противном случае;  $n_B$  и  $n_Q$  – постоянные. Поправки  $\sim (B - 2Q)$  включены в (9) для обеспечения условия  $B \approx 2Q$ , выполнение которого позволяет получить анизотропное отношение  $\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_2'^2 \rangle = \langle u_3'^2 \rangle$ , близкое к экспериментальному. Сумма членов  $\Sigma_{ii}$  в общем случае выражается через шесть скалярных коэффициентов  $T_1, T_2, \dots, T_6$  [11]. В настоящей работе были выбраны отличными от нуля коэффициенты  $T_4, T_6$ . Окончательное выражение для  $\Sigma_{ii}$  через  $T_4$  и  $T_6$  содержит слагаемые, имеющие множителем  $\mu^0$  и  $\mu^2$  соответственно. Подставив (7), (8) и выражение для  $\Sigma_{ii}$  в (5), следует собрать суммы коэффициентов при  $\mu^0$  и  $\mu^2$  и приравнять эти суммы к нулю, так как величины, входящие в них, от  $\mu$  не зависят. В итоге получим систему дифференциальных уравнений для функций  $B$  и  $Q$ . Входящие в эти уравнения функции  $T_4$  и  $T_6$  были выражены через функции  $B$  и  $Q$  посредством градиентных формул, записанных по аналогии с (2), (3), а соответствующие пути смешения находились так же, как в [10], с теми же числовыми значениями эмпирических постоянных. Окончательный вид уравнений для  $B$  и  $Q$  следующий:

$$\langle u_1 \rangle \frac{\partial B}{\partial z_1} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 (v_{1B} + v) \frac{\partial B}{\partial r} \right) - \frac{2pv_{1Q}}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \beta \frac{d\langle u_1 \rangle}{dz_2} B^*; \quad (10)$$

$$\langle u_1 \rangle \frac{\partial Q}{\partial z_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rpv_{1Q} \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \frac{2v}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial Q}{\partial r} \right) + \beta \frac{d\langle u_1 \rangle}{dz_2} Q^*. \quad (11)$$

Переход от  $t$  к  $z_1$  в (10), (11) осуществлен по формуле Тэйлора  $\partial/\partial t = \langle u_1 \rangle (\partial/\partial z_1)$ . Система уравнений (10), (11), дополненная граничными условиями для функций  $B$  и  $Q$  вида (4), решалась численно маршевым методом.

Расчеты потока с однородным сдвигом средней скорости проводились в условиях опытов Корсина и сотрудников, данные по которым приведены в [9, 13]. Величины средней скорости и масштаба  $M$  ( $M$  – характерный размер турбулизирующего устройства в экспериментальной установке) имели в этих опытах следующие значения:

$\langle u_1 \rangle = 12,4$  м/с;  $M = 1,5$  см ( $Re = \frac{\langle u_1 \rangle M}{\nu} = 12350$ ). Рассматривались два варианта: случай сильного и слабого сдвига с  $d\langle u_1 \rangle/dz_2 = 46,8$  с<sup>-1</sup> и  $d\langle u_1 \rangle/dz_2 = 12,9$  с<sup>-1</sup> соответственно. На рис. 1а, б сплошными линиями показаны коэффициенты корреляции  $R_{ii}(r_1, r_2, r_3) = \frac{\langle u'_i(r_1, r_2, r_3) u'_i(0, 0, 0) \rangle}{\langle u_i'^2 \rangle}$ ,

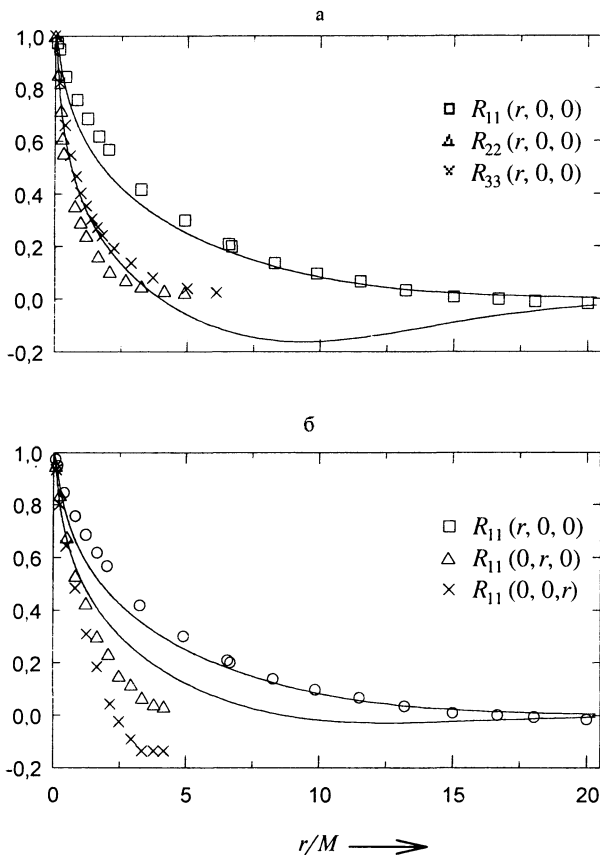


Рис. 1. Автокорреляционные функции продольной и поперечных компонент пульсационной скорости:  $Re = 12350$ ,  $dU_1/dz_2 = 46,8$  с<sup>-1</sup>

рассчитанные для случая сильного сдвига, по сравнению с опытными данными [9], а на рис. 2 — одноточечные вторые моменты, которые в приближении предлагаемой модели вычисляются по формулам:  $\langle u_1'^2 \rangle = B(z_1, 0)$ ;  $\langle u_2'^2 \rangle = \langle u_3'^2 \rangle = B(z_1, 0) - Q(z_1, 0)$ . Эмпирические коэффициенты имели в этих расчетах следующие значения:  $\beta = 0,28$ ;  $n_B = 0$ ;  $n_Q = 0,2$ ;  $p = 2,4$ . Далее была рассмотрена задача о внезапном наложении однородного сдвигового потока на первоначально изотропную турбулентность. Известно, что в этом случае коэффициент  $\beta$  не мгновенно приобретает значение, соответствующее сдвиговому потоку, а достигает его в течение некоторого времени. Чтобы учесть это изменение, были проведены расчеты, в которых  $\beta$  менялась в соответствии с релаксационным уравнением вида

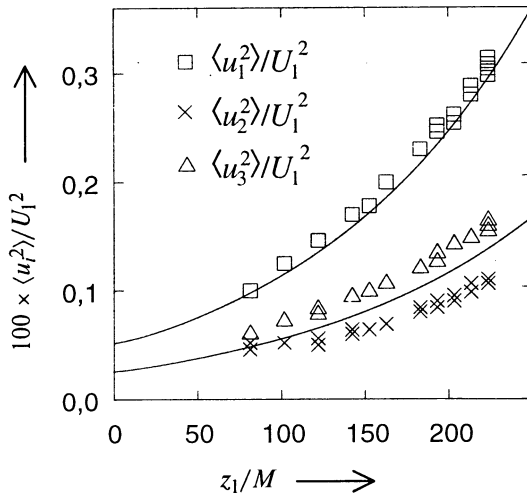


Рис. 2. Эволюция одноточечных вторых моментов турбулентности вниз по потоку:  $Re = 12350$ ;  $dU_1/dz_2 = 46,8 \text{ c}^{-1}$

$$\gamma T \frac{d\beta}{d\tau} + \beta = \beta_\infty \cong 0,34, \quad (12)$$

где  $\tau = \frac{z_1}{\langle u_1 \rangle} \frac{d\langle u_1 \rangle}{dz_2}$ ,  $T$  — безразмерное время релаксации (согласно [13]

$T \cong 2,5$ ),  $\gamma$  — эмпирический коэффициент. Рассчитанные в этом случае значения диагональных и касательного одноточечных моментов показаны на рис. 3 сплошными линиями; символами нанесены опытные данные [13], где в начальном сечении турбулентность была близка к изотропной. Удовлетворительное согласие с опытами [13] получено при  $\gamma = 0,32$ .

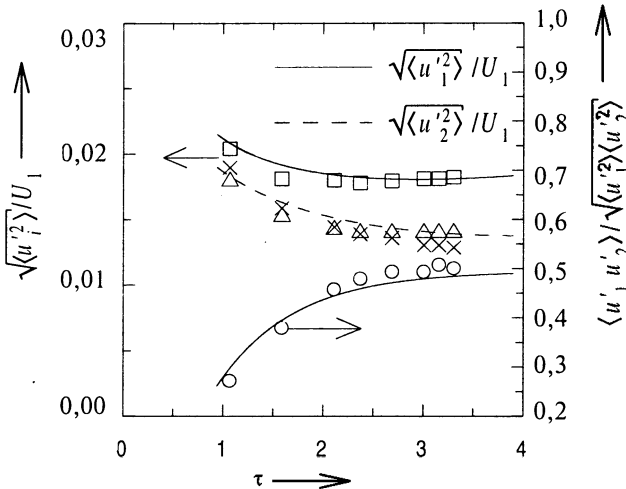


Рис. 3. Изменение диагональных и касательного одноточечных моментов вниз по потоку:  $Re = 12350$ ;  $dU_1/dz_2 = 12,9 \text{ c}^{-1}$ . Данные [13]:  $\square$  —  $\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle} / U_1$ ;

$$\times - \sqrt{\langle u_2'^2 \rangle} / U_1; \Delta - \sqrt{\langle u_3'^2 \rangle} / U_1; \circ - \langle u_1' u_2' \rangle / \sqrt{\langle u_1'^2 \rangle \langle u_2'^2 \rangle}$$

В заключение отметим, что во всех расчетах, сделанных с помощью двух представленных моделей, использовались значения эмпирических

коэффициентов, входящих в формулы для пути смешения градиентной модели (2), (3), которые были подобраны в [10] из условия наилучшего согласия расчетов вырождения однородной изотропной турбулентности с большим числом опытных данных и в широком диапазоне значений  $Re$ . Обе представленные модели могут быть использованы для расчетов однородных сдвиговых потоков, а также для построения подсеточных моделей при исследовании турбулентных течений методом моделирования крупных вихрей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Launder B., Reece G., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // *J. Fluids Mech.* — 1975. — Vol. 68, part 3. — P. 537–566.
2. Jeandel D., Brison J. F., Mathieu J. Modelling methods in physical and spectral space // *Physics of Fluids.* — 1978. — Vol. 21, № 2. — P. 169–182.
3. Oberlack M., Peters N. Closure of the Two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models // *Applied Scientific Research.* — 1993. — Vol. 51. — P. 533–538.
4. Коловандин Б. А., Ватутин И. А., Бондарчук В. У. Моделирование однородной турбулентности. — Мн.: «Беларуская навука», 1998. — 240 с.
5. Лыткин Ю. М., Черных Г. Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана—Ховарта // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр.* — Новосибирск, 1976. — Вып. 27. — С. 124–130.
6. Domagadzki J. A., Mellor G. L. A simple turbulence closure hypothesis for the triple-velocity correlation functions in homogeneous isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1984. — Vol. 140. — P. 45–61.
7. Акатнов Н. И. О замыкании уравнения двухточечных моментов, описывающего вырождение однородной изотропной турбулентности // *Гидрогазодинамика: Сб. науч. тр.* — Л., 1990. — С. 31–40.
8. Rohr J., Itswire E., Helland K., Van Atta C. An investigation of the growth turbulence in a uniform-mean-shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1988. — Vol. 187. — P. 1–33.
9. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. Part 1, 2 // *J. Fluid Mech.* — 1981. — Vol. 104. — P. 311–367.
10. Акатнов Н. И., Быстрова Е. Н. Расчеты некоторых характеристик однородной турбулентности на основе уравнения Кармана—Ховарта, замкнутого посредством полуэмпирической модели // *Изв. РАН ТВТ.* — 1999. — № 6.
11. Chandrasekhar S. The theory of axisymmetric turbulence // *Philos. Trans. A.* — 1950. — Vol. 242. — P. 557.
12. Chandrasekhar S. The decay of axisymmetric turbulence // *Proc. Roy. Soc. A.* — 1950. — Vol. 203. — P. 358.
13. Champagne F., Harris V., Corrsin S. Experiments of nearly homogeneous turbulent shear flow // *J. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 41, part 1. — P. 81–139.

Представлена кафедрой  
гидроаэродинамики

Поступила 2.02.2000