https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-152-163

УДК 517.958:519.6

Приближенное решение смешанной задачи для телеграфного уравнения с однородными краевыми условиями первого рода с помощью специальных функций

П. Г. Ласый[1], И. Н. Мелешко[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Смешанная задача для хорошо известного в электротехнике и электронике телеграфного уравнения при условии, что линия свободна от искажений, сводится к аналогичной задаче для одномерного неоднородного волнового уравнения. Эффективный способ решения этой задачи основан на использовании специальных функций – полилогарифмов, которые представляют собой комплексные степенные ряды со степенными же коэффициентами, сходящиеся в единичном круге. Точное решение задачи выражается в интегральной форме через мнимую часть полилогарифма первого порядка на единичной окружности, а приближенное – в виде конечной суммы через действительную часть дилогарифма и мнимую часть полилогарифма третьего порядка. Все указанные части полилогарифмов являются периодическими функциями, имеющими полиномиальные выражения соответствующих степеней на отрезке длиной в период, что позволяет получить решение задачи в элементарных функциях. В работе исследуется смешанная задача для хорошо известного в приложениях телеграфного уравнения. Эта задача линейной подстановкой искомой функции с экспоненциальным по времени коэффициентом сводится к аналогичной задаче для уравнения Клейна – Гордона. Решение последней можно найти методом разделения переменных в виде ряда по тригонометрическим функциям точки линии с коэффициентами, зависящими от времени. Такое решение малопригодно для практического применения, так как для него требуется вычисление большого числа коэффициентов-интегралов и при этом трудно оценить погрешность вычислений. В настоящей статье предлагается другой способ решения этой задачи, основанный на использовании специальных Hе-функций, которые представляют собой комплексные степенные ряды определенного вида, сходящиеся в единичном круге. Точное решение задачи представляется в интегральной форме через Hе-функции второго порядка на единичной окружности. Приближенное решение выражается в конечном виде через Hе-функции третьего порядка. В работе также найдена простая и эффективная оценка погрешности приближенного решения задачи. Она линейна относительно шага разбиения линии с экспоненциальным по времени коэффициентом. Приведен пример решения задачи для уравнения Клейна – Гордона разработанным способом, построены графики точного и приближенного решений.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, уравнение Клейна – Гордона, смешанная задача, краевое условие первого рода, приближенное решение, специальная функция

Для цитирования: Ласый, П. Г. Приближенное решение смешанной задачи для телеграфного уравнения с однородными краевыми условиями первого рода с помощью специальных функций / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ.* 2021. Т. 64, № 2. С. 152–163. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-152-163

Адрес для переписки	Address for correspondence
Ласый Петр Григорьевич	Lasy Petr G.
Белорусский национальный технический университет	Belarusian National Technical University
ул. Я. Коласа, 12,	12, Ya. Kolasa str.,
220013, г. Минск, Республика Беларусь	220013, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 292-82-73	Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by	kafvm2@bntu.by

Approximate Solution of Mixed Problem for Telegrapher Equation with Homogeneous Boundary Conditions of First Kind Using Special Functions

P. G. Lasy[1], I. N. Meleshko[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The mixed problem for the telegraph equation well-known in electrical engineering and electronics, provided that the line is free from distortions, is reduced to a similar problem for one-dimensional inhomogeneous wave equation. An effective way to solve this problem is based on the use of special functions – polylogarithms, which are complex power series with power coefficients, converging in the unit circle. The exact solution of the problem is expressed in integral form in terms of the imaginary part of the first-order polylogarithm on the unit circle, and the approximate one – in the form of a finite sum in terms of the real part of the dilogarithm and the imaginary part of the third-order polylogarithm. All the indicated parts of the polylogarithms are periodic functions that have polynomial expressions of the corresponding degrees on an interval of length in the period, which makes it possible to obtain a solution to the problem in elementary functions. In the paper, we study a mixed problem for the telegrapher's equation which is well-known in applications. This problem of linear substitution of the desired function with a time-exponential coefficient is reduced to a similar problem for the Klein – Gordon equation. The solution of the latter can be found by dividing the variables in the form of a series of trigonometric functions of a line point with time-dependent coefficients. Such a solution is of little use for practical application, since it requires the calculation of a large number of coefficients-integrals and it is difficult to estimate the error of calculations. In the present paper, we propose another way to solve this problem, based on the use of special He-functions, which are complex power series of a certain type that converge in the unit circle. The exact solution of the problem is presented in integral form in terms of second-order He-functions on the unit circle. The approximate solution is expressed in the final form in terms of third-order He-functions. The paper also proposes a simple and effective estimate of the error of the approximate solution of the problem. It is linear in relation to the line splitting step with a time-exponential coefficient. An example of solving the problem for the Klein – Gordon equation in the way that has been developed is given, and the graphs of exact and approximate solutions are constructed.

Keywords: telegrapher's equation, Klein – Gordon equation, mixed problem, boundary condition of the first kind, approximate solution, special function

For citation: Lasy P. G., Meleshko I. N. (2021) Approximate Solution of Mixed Problem for Telegrapher Equation with Homogeneous Boundary Conditions of First Kind Using Special Functions. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 64 (2), 152–163. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-152-163 (in Russian)

Введение

Возьмем прямолинейный проводник, длина которого равна l. Один из его концов примем за начало отсчета оси Ox. О. Хевисайд в [1] показал, что сила тока и напряжение в проводнике в любой его точке $x \in l$ в произвольный момент времени $t \geq 0$ удовлетворяют телеграфному уравнению

$$\partial_{xx} w = LC\partial_{tt} w + (RC + GL)\partial_t w + GR\, w, \tag{1}$$

где $w = w(x,t)$ – неизвестная функция (сила тока или напряжение); L, C, R, G – величины самоиндукции, емкости, сопротивления и проводимости изоляции (утечки) соответственно, рассчитанные на единицу длины линии [2–7].

С приложениями телеграфного уравнения в электротехнике, электронике и связи можно ознакомиться в [1, 8–10].

В работах [11, 12] с помощью полилогарифмов [13, 14] найдено точное и приближенное решение смешанной задачи для уравнения (1) при условии Хевисайда

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$$

(линия без искажений). В этом случае телеграфное уравнение сводится к одномерному волновому уравнению. В настоящей работе аналогичная задача решается для произвольной линии при однородных краевых условиях первого рода.

Основная часть

Рассмотрим смешанную задачу для телеграфного уравнения (1) в области $\Pi=\{(x,t)\,|\,x\in[0,l],\ t\geq 0\}$ с начальными условиями

$$w(x,0)=f(x),\ \ \partial_t w(x,0)=F(x),\ \ x\in[0,l] \tag{2}$$

и однородными краевыми условиями первого рода

$$w(0,t)=0,\ \ w(l,t)=0,\ \ t\geq 0. \tag{3}$$

Функцию $f(x)$ будем считать дважды дифференцируемой на отрезке $[0,\ l]$, а ее вторую производную – удовлетворяющей условию Липшица на этом отрезке, т. е. что существует постоянная $L_{f''}>0$ такая, что для любых точек $x_1,x_2\in[0,l]$ выполняется неравенство $|f''(x_1)-f''(x_2)|\leq$ $\leq L_{f''}|x_1-x_2|$ (коротко $f''(x)\in\mathrm{Lip}(L_{f''},\ [0,l])$). Аналогично функцию $F(x)$ будем предполагать дифференцируемой на отрезке $[0,\ l]$ и $F'(x)\in\mathrm{Lip}(L_{F'},[0,l])$.

Требуется найти классическое, т. е. дважды непрерывно дифференцируемое в области Π решение уравнения (1) при условиях (2), (3) и его аппроксимацию.

Подстановкой

$$w=\exp(-\nu t)u,\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) \tag{4}$$

телеграфное уравнение (1) сводится к уравнению Клейна – Гордона

$$\partial_{tt}u=a^2\partial_{xx}u+b^2u, \tag{5}$$

где $a=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $b=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{R}{L}-\dfrac{G}{C}\right|$.

Поскольку $w(x,0)=u(x,0),\ \partial_t w(x,0)=-\nu u(x,0)+\partial_t u(x,0),\ x\in[0,l],$ получаем следующую смешанную задачу для уравнения (5) с начальными

$$u(x,0)=f(x),\ \ \partial_t u(x,0)=F_1(x),\ \ x\in[0,l], \tag{6}$$

где $F_1(x)=F(x)+\nu f(x)$, причем $F_1'(x)\in\mathrm{Lip}(L_{F_1'},[0,l])$, $L_{F_1'}=L_{F'}+\nu\max\limits_{x\in[0,\ l]} f''(x)$, и краевыми условиями

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\geq 0. \tag{7}$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения специальные функции комплексной переменной z и действительной переменной t, а именно: пусть при данных a, b, l и целых неотрицательных r, s

$$\mathrm{He}_{rs}(z,t)=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\exp(i\lambda_k t)}{\lambda_k^r}\cdot\frac{z^k}{k^s}, \tag{8}$$

где k_0 – целая часть числа $\dfrac{b}{a\omega}$, $\omega=\dfrac{\pi}{l}$; $\lambda_k=\sqrt{(a\omega k)^2-b^2}$, $k>k_0$.

Назовем число $r+s$ порядком этой функции. Ряд в правой части (8) абсолютно сходится при $|z|<1$ для всех r и s. Если же $r+s>1$, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z|\leq 1$.

Пусть далее:

$$\mathrm{He}_{rs}^{(1)}(z,t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{He}_{rs}(z,t)+\mathrm{He}_{rs}(z,-t)\right)=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_k t}{\lambda_k^r}\cdot\frac{z^k}{k^s}; \tag{9}$$

$$\mathrm{He}_{rs}^{(2)}(z,t)=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{He}_{rs}(z,t)-\mathrm{He}_{rs}(z,-t)\right)=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k^r}\cdot\frac{z^k}{k^s}. \tag{10}$$

В дальнейшем ряды (8)–(10) будем называть He-функциями.

Следуя [5, с. 586], решение задачи (5)–(7) будем искать методом Фурье в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)\sin\omega kx. \tag{11}$$

Формальная подстановка функции $u(x,t)$ в уравнение (5) дает следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка для каждой из функций $a_k(t)$, $k\in\mathrm{N}$:

$$a_k''+\left((a\omega k)^2-b^2\right)a_k=0. \tag{12}$$

Начальные условия (6) приводят к начальным условиям для уравнения (12):

$$a_k(0)=b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\omega kx\,dx;\ a_k'(0)=c_k=\frac{2}{l}\int_0^l F_1(x)\sin\omega kx\,dx,$$

или после интегрирования по частям

$$a_k(0)=b_k=-\frac{2}{\pi\omega k^2}\int_0^l f''(x)\sin\omega kx\,dx;\ a_k'(0)=c_k=\frac{2}{\pi k}\int_0^l F_1'(x)\cos\omega kx\,dx. \tag{13}$$

Для задачи Коши (12), (13) возможны три случая:

1) $k < \dfrac{b}{a\omega}$, для таких k эта задача имеет решение

$$a_k(t) = b_k \operatorname{ch}\lambda_k t + \frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{sh}\lambda_k t,\ \lambda_k = \sqrt{b^2 - (a\omega k)^2}; \tag{14}$$

2) $k = \dfrac{b}{a\omega}$, в этом случае

$$a_k(t) = b_k + c_k t; \tag{15}$$

3) $k > \dfrac{b}{a\omega}$, здесь

$$a_k(t) = b_k \cos\lambda_k t + \frac{c_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t,\ \lambda_k = \sqrt{(a\omega k)^2 - b^2}. \tag{16}$$

Определим, учитывая (14)–(16), функции:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{k_0}\left(b_k \operatorname{ch}\lambda_k t + \frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{sh}\lambda_k t\right)\sin\omega kx, \text{ если } k_0 \geq 1 \text{ и } \frac{b}{a\omega} \notin \mathrm{N}; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(b_k \operatorname{ch}\lambda_k t + \frac{c_k}{\lambda_k}\operatorname{sh}\lambda_k t\right)\sin\omega kx, \text{ если } k_0 \geq 2 \text{ и } \frac{b}{a\omega} \in \mathrm{N}; \\ 0 \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} (b_{k_0} + c_{k_0} t)\sin\omega k_0 x, \text{ если } k_0 \geq 1 \text{ и } \dfrac{b}{a\omega} \in \mathrm{N}; \\ 0 \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$u_3(x,t) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(b_k \cos\lambda_k t + \frac{c_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\right)\sin\omega kx.$$

Ввиду (13) ряд в правой части функции $u_3(x,t)$ равномерно сходится в области $\Pi,$ и можно записать формальное решение (11) задачи (5)–(7) в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t). \tag{17}$$

Аналогично [15, с. 552] можно проверить тот факт, что функция (17) дважды непрерывно дифференцируема по каждой переменной в области Π и будет удовлетворять уравнению (5). Следовательно, она является классическим решением поставленной задачи.

Преобразуем функцию $u_3(x,t)$, использовав выражения (13) для коэффициентов b_k, c_k:

$$u_3(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\left(\frac{1}{\omega}f''(\tau)\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\cos\lambda_k t\cdot\frac{\cos\omega k(x+\tau)}{k^2}-\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\cos\lambda_k t\cdot\frac{\cos\omega k(x-\tau)}{k^2}\right)+\right.$$

$$\left.+F_1'(\tau)\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k}\cdot\frac{\sin\omega k(x+\tau)}{k}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k}\cdot\frac{\sin\omega k(x-\tau)}{k}\right)\right)d\tau,$$

или, учитывая He-функции (9), (10):

$$\begin{aligned}u_3(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\Bigg(&\frac{1}{\omega}f''(\tau)\operatorname{Re}\Big(\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)-\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\Big)+\\&+F_1'(\tau)\operatorname{Im}\Big(\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)+\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\Big)\Bigg)d\tau.\end{aligned}\tag{18}$$

Таким образом, найдено классическое решение смешанной задачи (5)–(7), которое выражается через He-функции (9), (10) второго порядка на единичной окружности $z=\exp(i\omega x)$. Принимая во внимание (4), запишем решение исходной задачи (1)–(3)

$$w(x,t)=\exp(-\nu t)(u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)).\tag{19}$$

Отыщем формулу для приближенного вычисления этого решения. Разобьем отрезок $[0,\ l]$ на n равных частей точками $x_k=kh$, $k=\overline{0,n}$, где $h=\dfrac{l}{n}$ – шаг разбиения, и заменим под знаком интеграла в правой части формулы (18) на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n}$ функции $f''(x)$ и $F_1'(x)$ ее значениями в средней точке отрезка. В результате после несложного интегрирования получим следующее приближенное выражение для функции $u_3(x,t)$:

$$\begin{aligned}u_3^{(n)}(x,t)=\frac{1}{\pi\omega}\sum_{k=1}^{n}\Bigg(&\frac{1}{\omega}f''\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\operatorname{Im}\Big(\mathrm{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)+\\&+\mathrm{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\Big)+F_1'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\times\\&\times\operatorname{Re}\Big(\mathrm{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)-\mathrm{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)\Big)\Bigg)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}.\end{aligned}$$

Следовательно, приближенное решение задачи (5)–(7) можно найти по формуле

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3^{(n)}(x,t). \qquad (20)$$

Тогда формула

$$w_n(x,t)=\exp(-\nu t)(u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3^{(n)}(x,t)) \qquad (21)$$

дает нам приближенное решение задачи (1)–(3).

Оценим погрешность вычисления решения по формуле (21). Поскольку

$$w(x,t)-w_n(x,t)=\exp(-\nu t)(u_3(x,t)-u_3^{(n)}(x,t))=$$

$$=\frac{\exp(-\nu t)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\frac{1}{\omega}\left(f''(\tau)-f''\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\mathrm{Re}\left(\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)-\right.\right.$$

$$\left.-\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\right)+\left(F_1'(\tau)-F_1'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\times$$

$$\left.\times\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)+\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\right)\right)d\tau,$$

то

$$\left|w(x,t)-w_n(x,t)\right|\le\frac{\exp(-\nu t)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\frac{1}{\omega}\left|f''(\tau)-f''\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|\times\right.$$

$$\times\left(\left|\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)\right|+\left|\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\right|\right)+$$

$$\left.+\left|F_1'(\tau)-F_1'\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\right|\left(\left|\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x+\tau)),t)\right|+\left|\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\omega(x-\tau)),t)\right|\right)\right)d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что функции $f''(x)$, $F_1'(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными $L_{f''}$, $L_{F_1'}$ соответственно и справедливы неравенства

$$\left|\mathrm{He}_{02}(z,t)\right|\le\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left|\exp(i\lambda_k t)\cdot\frac{z^k}{k^2}\right|\le M_1,\ \left|\mathrm{He}_{11}(z,t)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left|\frac{\exp(i\lambda_k t)}{\lambda_k}\cdot\frac{z^k}{k}\right|\le M_2,\ |z|\le 1,$$

где $M_1=\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$; $M_2=\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_k k}$, получим

$$\left|w(x,t)-w_n(x,t)\right|\le\frac{\exp(-\nu t)}{\pi}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}\left|\tau-x_{k-1}-\frac{h}{2}\right|\cdot 2M_1+L_{F_1'}\left|\tau-x_{k-1}-\frac{h}{2}\right|\cdot 2M_2\right)d\tau=$$

$$= \frac{2\exp(-\nu t)}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2\right)\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|\tau - x_{k-1} - \frac{h}{2}\right|d\tau =$$

$$= \frac{2\exp(-\nu t)}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{h^2}{4} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2\right)h\exp(-\nu t).$$

Таким образом, окончательно

$$\left|w(x,t) - w_n(x,t)\right| \le \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2\right)h\exp(-\nu t), \tag{22}$$

т. е. погрешность приближенного вычисления поставленной задачи имеет первый порядок малости относительно шага h и экспоненциально убывает по времени.

Сформулируем теперь утверждение, которое является результатом наших изысканий.

Теорема. *При указанных выше предположениях относительно функций* $f(x)$ *и* $F(x)$ *точное решение смешанной задачи* (2), (3) *для телеграфного уравнения* (1) *находится с помощью* He-*функций второго порядка на единичной окружности по формуле* (19), *а приближенное – с помощью* He-*функций третьего порядка по формуле* (21). *Абсолютная погрешность вычислений оценивается величиной* $\frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2\right)h\exp(-\nu t)$, *т. е. она линейна относительно шага h разбиения отрезка* $[0,l]$ *с экспоненциально убывающим по времени коэффициентом.*

Укажем полезные для практического вычисления погрешности (22) оценки рядов M_1 и M_2. Поскольку по формуле Эйлера [16, с. 465] $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, то $M_1 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{k^2}$.

Использовав далее [16, с. 286], получим при любом фиксированном натуральном m

$$M_2 < M_2^{(m)} = \sum_{k=k_0+1}^{k_0+m}\frac{1}{\lambda_k k} + \int_{k_0+m}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(a\omega x)^2 - b^2}} = \sum_{k=k_0+1}^{k_0+m}\frac{1}{\lambda_k k} + \frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a\omega(k_0+m)}.$$

Тогда из (22) следует, что погрешность вычисления приближенного решения по формуле (21) не будет превышать заданную точность ε > 0, если n удовлетворяет неравенству

$$n > \frac{l}{2\omega\varepsilon}\left(\frac{1}{\omega}L_{f''}M_1 + L_{F_1'}M_2^{(m)}\right). \tag{23}$$

Пример. *Найти решение уравнения Клейна – Гордона*

$$\partial_{tt}u = \frac{\partial_{xx}u}{12\pi^2} + \frac{u}{3} \tag{24}$$

при начальных

$$u(x,0)=\frac{1}{36}(\sin 6x - x\sin 6),\ \ \partial_t u(x,0)=x^2-x^3,\ \ x\in[0,1] \tag{25}$$

и однородных краевых

$$u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0,\ \ t\ge 0 \tag{26}$$

условиях.

Здесь $a=\dfrac{1}{2\sqrt{3}\pi}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $l=1$, $\omega=\pi$, $k_0=2$ и $f(x)=\dfrac{1}{36}(\sin 6x - x\sin 6)$, $F_1(x)=x^2-x^3$, $x\in[0,1]$. Точное решение задачи найдем по формуле (17).

Так как

$$b_1=2\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx=\frac{2\sin 6}{\pi^3-36\pi},\ c_1=2\int_0^1 F_1(x)\sin\pi x\,dx=\frac{4}{\pi^3},\ \lambda_1=\frac{1}{2},$$

то

$$u_1(x,t)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 6}{\pi^2-36}\operatorname{ch}\frac{t}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\sin\pi x.$$

Поскольку $b_2=2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi x\,dx=\dfrac{\sin 6}{36\pi-4\pi^3}$, $c_2=2\int_0^1 F_1(x)\sin 2\pi x\,dx=$ $=-\dfrac{3}{2\pi^3}$, то

$$u_2(x,t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 6}{36-4\pi^2}-\frac{3}{2\pi^2}t\right)\sin 2\pi x.$$

Учитывая далее, что в данном случае

$$\mathrm{He}_{02}^{(1)}(z,t)=\sum_{k=3}^{\infty}\cos\lambda_k t\cdot\frac{z^k}{k^2},\ \mathrm{He}_{11}^{(2)}(z,t)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k}\cdot\frac{z^k}{k},$$

где $\lambda_k=\sqrt{\dfrac{k^2}{12}-\dfrac{1}{3}}$, $k\ge 3$ и $f''(x)=-\sin 6x$, $F_1'(x)=2x-3x^2$, $x\in[0,1]$, ввиду (18) получаем

$$u_3(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\Bigg(\frac{1}{\pi}\sin 6\tau\cdot\mathrm{Re}\Big(\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)-\mathrm{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)\Big)+$$
$$+(2\tau-3\tau^2)\,\mathrm{Im}\Big(\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)+\mathrm{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)\Big)\Bigg)d\tau.$$

Следовательно, точное решение задачи (24)–(26) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\left(2\left(\frac{\sin 6}{\pi^2-36}\operatorname{ch}\frac{t}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\sin\pi x+\left(\frac{\sin 6}{36-4\pi^2}-\frac{3}{2\pi^2}t\right)\sin 2\pi x+\right.$$

$$+\int_0^1\left(\frac{1}{\pi}\sin 6\tau\cdot\operatorname{Re}\Big(\operatorname{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)-\operatorname{He}_{02}^{(1)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)\Big)+\right.$$

$$\left.\left.+(2\tau-3\tau^2)\operatorname{Im}\Big(\operatorname{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)+\operatorname{He}_{11}^{(2)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)\Big)\right)d\tau\right).$$

Принимая во внимание, что при любом натуральном n

$$u_3^{(n)}(x,t)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\pi}\sin 6\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\operatorname{Im}\Big(\operatorname{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)+\operatorname{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)\Big)+$$

$$+\left(2\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-3\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)^2\right)\times$$

$$\left.\times\operatorname{Re}\Big(\operatorname{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)-\operatorname{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)\Big)\right)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k},$$

где $x_k=kh,\ k=\overline{0,n};\ h=\dfrac{1}{n},$ запишем приближенное решение задачи по формуле (20):

$$u_n(x,t)=\frac{1}{\pi}\left(2\left(\frac{\sin 6}{\pi^2-36}\operatorname{ch}\frac{t}{2}+\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\sin\pi x+\left(\frac{\sin 6}{36-4\pi^2}-\frac{3}{2\pi^2}t\right)\sin 2\pi x+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\pi}\sin 6\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)\operatorname{Im}\Big(\operatorname{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)+\operatorname{He}_{03}^{(1)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)\Big)+\right.$$

$$+\left(2\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)-3\left(x_{k-1}+\frac{h}{2}\right)^2\right)\times$$

$$\left.\left.\times\operatorname{Re}\Big(\operatorname{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\pi(x-\tau)),t)-\operatorname{He}_{12}^{(2)}(\exp(i\pi(x+\tau)),t)\Big)\right)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}\right).$$

Так как $f'''(x)=-6\cos 6x,\ F_1''(x)=2-6x,\ x\in[0,1],$ то $L_{f''}=6,\ L_{F_1'}=4.$ Кроме того, для рассматриваемой задачи $M_1=\dfrac{2\pi^2-15}{12},\ M_2^{(1)}=\dfrac{2}{\sqrt{15}}+$ $+\sqrt{3}\arcsin\dfrac{2}{3}.$ Значит, при заданной точности $\varepsilon>0$ из (23) следует, что

$$n > \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{2\pi^2 - 15}{2\pi} + \frac{8}{\sqrt{15}} + 4\sqrt{3}\arcsin\frac{2}{3}\right).$$

В частности, при $\varepsilon = 0{,}01$ достаточно взять $n = 126$, чтобы обеспечить требуемую точность. На рис. 1 представлены графики точного $u(x,t)$ и приближенного $u_{126}(x,t)$ решений задачи (24)–(26).

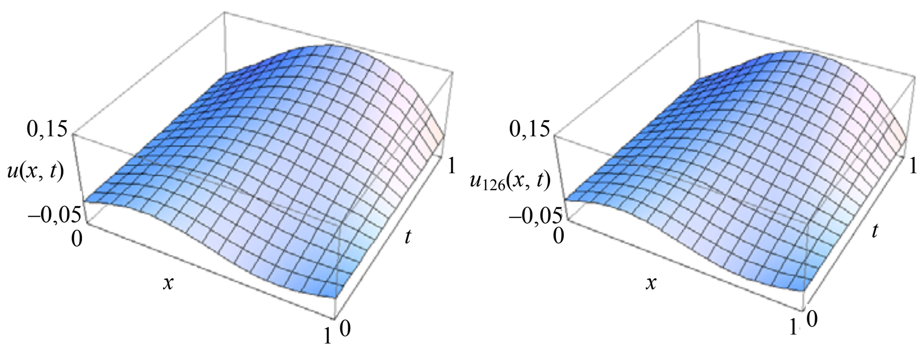

Рис. 1. Графики решений: a – точного $u(x, t)$; b – приближенного $u_{126}(x, t)$

Fig. 1. The graphs of the solutions: a – exact one $u(x, t)$; b – approximate one $u_{126}(x, t)$

ВЫВОД

С помощью введенных в настоящей работе специальных He-функций второго и третьего порядков найдены точное и приближенное решения смешанной задачи для телеграфного уравнения с однородными краевыми условиями первого рода. Получена оценка погрешности приближенного решения. Она является равномерной по длине линии и линейна относительно шага разбиения линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heaviside, O. Electromagnetic Theory / O. Heaviside. 3rd ed. London: Spon, 1951. 416 p.
2. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. М.: Наука, 1964. 772 с.
3. Кошляков, Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: ГИФМЛ, 1962. 767 с.
4. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. М.: Наука, 1969. 288 с.
5. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.: Наука,1974. Т. 2. 479 с.
6. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. СПб.: Лань, 2007. 688 с.
7. Остапенко, В. Телеграфное уравнение. Краевые задачи / В. Остапенко. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 272 с.
8. Новиков, Ю. Н. Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа / Ю. Н. Новиков. СПб.: Питер, 2005. 384 с.
9. Бычков, Ю. А. Основы теории электрических цепей / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев. СПб.: Лань, 2002. 464 с.
10. Дубнищев, Ю. Н. Колебания и волны / Ю. Н. Дубнищев. СПб.: Лань, 2011. 384 с.
11. Ласый, П. Г. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв.

высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340.
12. Ласый, П. Г. Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2019. Т. 62, № 5. С. 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421.
13. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
14. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.
15. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. М.: Наука,1969. Т. 3. 656 с.
16. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. М.: Физматгиз,1962. Т. 2. 807 с.

Поступила 02.10.2020 Подписана в печать 15.12.2020 Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Heaviside O. (1951*) Electromagnetic Theory.* 3rd ed. London, Spon. 416.
2. Ango A. (1964) *Mathematics for Electrical and Radio Engineers.* Moscow, Nauka Publ. 772 (in Russian).
3. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1962) *Differential Equations of Mathematical Physics.* Moscow, GIFML. 767 (in Russian).
4. Aramanovich I. G., Levin V. I. (1969) *Equations of Mathematical Physics.* Moscow, Nauka Publ. 288 (in Russian).
5. Smirnov V. I. (1974) *Course on Higher Mathematics. Vol. 2*. Moscow, Nauka Publ. 479 (in Russian).
6. Myshkis A. D. (2007) *Lectures on Higher Mathematics.* Saint-Petersburg, Lan' Publ. 688 (in Russian).
7. Ostapenko V. (2012) *Telegrapher's Equation. Boundary Value Problems.* Saarbrücken, LAP Lambert Academic Publ. 272 (in Russian).
8. Novikov Yu. N. (2005) *Electrical Engineering and Electronics. Theory of Circuits and Signals, Methods of Analysis.* Saint-Petersburg, Piter Publ. 384 (in Russian).
9. Bychkov Yu. A., Zolotnitskii V. M., Chernyshev E. P. (2002) *Fundamentals of the Theory of Electrical Circuits.* Saint-Petersburg, Lan' Publ. 464 (in Russian).
10. Dubnishchev Yu. N. (2011) *Vibrations and Waves.* Saint-Petersburg, Lan' Publ. 384 (in Russian).
11. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2017) Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations,* 60 (4), 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340 (in Russian).
12. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2019) Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations,* 62 (5), 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421 (in Russian).
13. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) *Polylogarithms, their Properties and Calculation Methods.* Minks, BSU Publ. 68 (in Russian).
14. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Cauchy-Type Integrals and their Applications.* Minks, VUZ-YUNITI Publ. 197 (in Russian).
15. Fikhtengol'ts G. M. (1969) *Course on Differential and Integral Calculus. Vol. 3.* Moscow, Nauka Publ. 656 (in Russian).
16. Fikhtengol'ts G. M. (1962) *Course on Differential and Integral Calculus. Vol. 2.* Moscow, Fizmatgiz Publ. 807 (in Russian).

Received: 2 October 2020 Accepted: 15 December 2020 Published online: 30 March 2021