https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172

УДК 519.6517.5

Приближенное представление дилогарифмами решения одной вариационной краевой задачи для круга при граничном условии Неймана

Докт. физ.-мат. наук, проф. И. Н. Мелешко[1], канд. физ.-мат. наук, доц. П. Г. Ласый[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Известно, что краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона эквивалентны задаче вариационного исчисления – о минимуме интеграла, для которого данное уравнение в частных производных является уравнением Эйлера – Лагранжа. Например, задача о минимуме интеграла Дирихле в единичном круге с центром в начале координат на некотором допустимом множестве функций при заданных значениях нормальной производной на окружности эквивалентна краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа в этой области. На основе известного точного решения краевой задачи Неймана для круга с помощью специальной приближенной формулы для интеграла Дини сконструировано эффективное приближенное представление дилогарифмами решения указанной выше эквивалентной вариационной краевой задачи. Приближенная формула эффективна в том смысле, что она достаточно проста при численной реализации, устойчива, а равномерная по кругу оценка погрешности позволяет проводить вычисления с заданной точностью. Специальная квадратурная формула для интеграла Дини обладает замечательным свойством – ее коэффициенты неотрицательны. Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами занимают особое место в теории приближенных вычислений определенных интегралов и ее приложениях. Естественно, что еще большую значимость это свойство приобретает, когда коэффициенты не числа, а некоторые функции. Проведенный численный анализ приближенного решения подтверждает его эффективность.

Ключевые слова: вариационная задача, краевая задача Неймана, интеграл Дини, приближенное решение, квадратурная формула

Для цитирования: Мелешко, И. Н. Приближенное представление дилогарифмами решения одной вариационной краевой задачи для круга при граничном условии Неймана / И. Н. Мелешко, П. Г. Ласый // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 168–172. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172

Approximate Dilogarithm Representation of One Variational Boundary Value Problem Solution for Circle under the Neumann Boundary Condition

I. N. Meleshko[1], P. G. Lasy[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. It is known that boundary value problems for the Laplace and Poisson equations are equivalent to the problem of the calculus of variations – the minimum of an integral for which the given partial differential equation is the Euler – Lagrange equation. For example, the problem of the minimum of the Dirichlet integral in the unit disc centered at the origin on some admissible set of functions for given values of the normal derivative on the circle is equivalent to the Neimann boundary value problem for the Laplace equation in this domain. An effective approximate dilogarithm representation of the solution of the above equivalent variational boundary value problem is constructed on the basis of the known exact solution of the Neumann Boundary value problem for a circle using a special approximate formula for the Dini integral. The approximate formula is effective in the sense that it is quite simple in numerical implementation, stable, and the error estimation, which is uniform over a circle, allows calculations with the given accuracy. A special quadrature formula for the Dini integral has

Адрес для переписки
Мелешко Иван Николаевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence
Meleshko Ivan N.
Belarusian National Technical University
9, B. Khmelnithskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

a remarkable property – its coefficients are non-negative. Quadrature formulas with non-negative coefficients occupy a special place in the theory of approximate calculations of definite integrals and its applications. Naturally, this property becomes even more significant when the coefficient are not number, but some functions. The performed numerical analysis of the approximate solution confirms its effectiveness.

Keywords: variational problem, boundary Neumann problem, Dini integral, approximate solution, quadrature formula

For citation: Meleshko I. N., Lasy P. G. (2021) Approximate Dilogarithm Representation of One Variational Boundary Value Problem Solution for Circle under the Neumann Boundary Condition. *Science and Technique*. 20 (2). 168–172. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172 (in Russian)

Введение

Вариационные методы часто применяют для решения различных задач механики, физики и математической физики [1–4]. Представляет интерес вопрос о решении вариационных задач с помощью эффективных методов решения эквивалентных краевых задач математической физики.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала на некотором допустимом множестве $\mathfrak{I}$ функций $u = u(x, y)$, удовлетворяющих граничному условию Неймана:

$$\iint_G |\operatorname{grad} u|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Она эквивалентна краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа в области G. В случае, когда область G – единичный круг с центром в начале координат, мы приходим к задаче о нахождении функции $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа и граничному условию Неймана соответственно:

$$\Delta u = 0, \; r < 1; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \; -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{2}$$

где $f(\varphi)$ – непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция.

Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1), (2) является выполнение равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Решение задачи находится в этом случае с точностью до действительной постоянной и может быть записано с помощью интеграла Дини [1, с. 598–600; 2, с. 231–232] в виде

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t - z|\,\mathrm{d}\tau + C, \quad t = e^{i\tau}, \; z = re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), а, следовательно, и соответствующей вариационной задачи будет единственным, если потребовать, чтобы множество допустимых функций $\mathfrak{I}$ удовлетворяло некоторому дополнительному условию.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Приближенная формула для интеграла Дини

Сконструируем квадратурную формулу с неотрицательными коэффициентами для интеграла

$$D(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t - z|\,\mathrm{d}\tau, \quad t = e^{i\tau}, \; z = re^{i\varphi}. \tag{4}$$

Запишем этот интеграл в виде разности двух интегралов

$$D(r, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\frac{2}{|t - z|}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\ln 2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Зададим на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему точек $\varphi_k = kh, \; k = \overline{-n, n}, \; h = \frac{2\pi}{2n+1}$ и аппроксимируем функцию $f(\varphi)$ на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} \theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \tag{6}$$

где $\theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, \; \varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2}\right]; \\ 0, \; \varphi \notin \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$

Подставив в представление (5) интеграла Дини вместо плотности ее приближение по (6), получим следующую квадратурную формулу:

$$D(r, \varphi) \approx \tilde{D}(r, \varphi) = \sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(\varphi_k), \tag{7}$$

где

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\ln\frac{2}{|t-z|}\mathrm{d}\tau. \qquad (8)$$

Теорема 1. *Коэффициенты $A_k(r,\varphi)$ квадратурной формулы* (7) *неотрицательны и вычисляются по формуле*

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\left(h\ln 2+\operatorname{Im}\left(L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}\right)\right)\right), \qquad (9)$$

где $L^2(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ *– дилогарифм Эйлера [5, 6].*

Доказательство. Так как в единичном круге $\ln\frac{2}{|t-z|}>0,$ то из представления (8) для коэффициентов $A_k(r,\varphi)$ следует, что все они неотрицательны для $r<1$ и $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Далее запишем

$$A_k(r,\varphi)=\frac{h\ln 2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\operatorname{Re}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}\tau=$$
$$=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k\right)\mathrm{d}\tau=$$
$$=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos k(\tau-\varphi)\right)\mathrm{d}\tau=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k^2}\left(\sin k\left(\varphi-\varphi_k+\frac{h}{2}\right)-\sin k\left(\varphi-\varphi_k-\frac{h}{2}\right)\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(h\ln 2+\operatorname{Im}\left(L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k-\frac{h}{2}\right)}\right)-L^2\left(ze^{-i\left(\varphi_k+\frac{h}{2}\right)}\right)\right)\right).$$

Формула (9) доказана.

Получим оценки погрешности приближенной формулы (7).

Теорема 2. *Если плотность $f(\varphi)$ интеграла Дини непрерывна на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *то имеет место равномерная по* $r\le 1$ *и* $\varphi\in[-\pi,\pi]$ *оценка погрешности приближенной формулы* (7)

$$|D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)|\le 4\omega(f,h)\ln 2, \qquad (10)$$

где $\omega(f,h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, то равномерно по всем $r\le 1$ и $\varphi\in[-\pi,\pi]$

$$|D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)|\le 2M_1h\ln 2, \qquad (11)$$

где $M_1=\max\limits_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f'(\varphi)|$.

Доказательство. Сравнивая (5) и (7), находим, что

$$D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(\tau)-\tilde{f}(\tau))\ln\frac{2}{|t-z|}\mathrm{d}\tau-$$
$$-\frac{\ln 2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(\tau)-\tilde{f}(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине и учитывая, что в единичном круге $\ln\frac{2}{|t-z|}>0,$ можно записать неравенство

$$|D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)|\le$$
$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{2}{|t-z|}\mathrm{d}\tau+\frac{\ln 2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\tau\right)\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)|,$$

и, значит,

$$|D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)|\le$$
$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{|t-z|}\mathrm{d}\tau+4\ln 2\right)\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)|. \qquad (12)$$

Поскольку

$$\ln\frac{1}{|t-z|}=-\operatorname{Re}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)=$$
$$=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos k(\tau-\varphi),$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{|t-z|}\mathrm{d}\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k^2}\sin k(\tau-\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

и, следовательно, неравенство (12) можно переписать в виде

$$|D(r,\varphi)-\tilde{D}(r,\varphi)|\le 4\ln 2\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)|. \qquad (13)$$

Если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то

$$|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)| \le \omega(f, h), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (14)$$

если же она непрерывно дифференцируема на этом промежутке, то

$$|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)| \le \frac{M_1 h}{2}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (15)$$

Из (13)–(15) следуют доказываемые неравенства (10), (11).

Полученные оценки погрешности приближенной формулы (7) для интеграла Дини полезны также и тем, что в них указываются не только порядок, но и возможные значения для констант.

Приближенное представление дилогарифмами решения вариационной задачи

Приближенное решение вариационной задачи будем конструировать на основе формул (3)–(5) и (7), из которых вытекают следующие точные и приближенные равенства:

$$u(r, \varphi) = D(r, \varphi) + C \approx \tilde{D}(r, \varphi) + C; \quad (16)$$

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \tilde{D}(r, \varphi) + C = \sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(\varphi_k) + C, \quad (17)$$

в которых коэффициенты $A_k(r, \varphi)$ определены формулами (8), (9). Формулы (9) и (17) позволяют представить приближенное решение дилогарифмами Эйлера

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Im}\left(L^2\left(z e^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)}\right) - L^2\left(z e^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)}\right)\right) f(\varphi_k) + C. \quad (18)$$

Сравнив равенства (16) и (17), замечаем, что

$$u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi) = D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi).$$

Поэтому для оценки погрешности формул (17) и (18) можно воспользоваться неравенствами (10) и (11) теоремы 2.

Об устойчивости квадратурной формулы (7) для интеграла Дини

Выше отмечен тот факт, что коэффициенты $A_k(r, \varphi)$ квадратурной формулы (7) неотрицательны для всех $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами занимают особое место в теории приближенного вычисления определенных интегралов и ее приложениях [7]. Важность свойства положительности коэффициентов квадквадратурных формул отмечается также в [8]. Естественно, что еще большую значимость это свойство приобретает, когда коэффициенты не числа, а некоторые функции, на что указывается в [9].

Проведем исследование квадратурной формулы (7) на устойчивость. Предположим, что значения плотности $f(\varphi)$ интеграла Дини в узлах квадратурной формулы найдены приближенно, т. е. вместо $f(\varphi)$ имеем $\tilde{f}(\varphi)$, так что погрешности равны $\varepsilon_k = f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)$. Пусть $|\varepsilon_k| \le \varepsilon$, $k = \overline{-n, n}$. Тогда для погрешности вычисления квадратурной суммы в (7) получается неравенство

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi)\tilde{f}(\varphi_k)\right| \le \varepsilon \sum_{k=-n}^{n} \left|A_k(r, \varphi)\right|,$$

из которого следует, что точная верхняя грань погрешности вычисления этой квадратурной суммы пропорциональна $\sum_{k=-n}^{n} \left|A_k(r, \varphi)\right|$. Оценим данную сумму числом, не зависящим от r и φ, учитывая, что, как мы убедились выше, $\ln\frac{2}{|t-z|} > 0$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{1}{|t-z|} d\tau = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{k=-n}^{n} \left|A_k(r, \varphi)\right| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left| \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln\frac{2}{|t-z|} d\tau \right| = \frac{1}{\pi}\left(2\pi\ln 2 + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{1}{|t-z|} d\tau\right) = 2\ln 2.$$

Значит, при всех $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \sum_{k=-n}^{n} A_k(r, \varphi)\tilde{f}(\varphi_k)\right| \le 2\varepsilon\ln 2.$$

Это означает, что при всех n, r и φ погрешность вычислений этой квадратурной суммы имеет тот же порядок, что и погрешность вычисления плотности $f(\varphi)$. В таких случаях говорят, что квадратурная формула численно устойчива.

Пример. *Найти решение уравнения* (1) *при условии*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi + \varphi\cos\varphi, \ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

Точное решение этой задачи найдено в [10, с. 133] с помощью преобразований интеграла Шварца

$$u(r, \varphi) = D(r, \varphi) + C = \operatorname{Im}\left(\left(z - \frac{1}{z}\right)\ln(1+z)\right) + C, \quad (19)$$

где $\ln(1 + z)$ – ветвь логарифмической функции, принимающей на промежутке (–1, 1) действительной оси действительные значения.

Максимальная погрешность вычислений по точной формуле (19) и с помощью приближенного уравнения (18) при $r = 0{,}1 + 0{,}2k$, $k = \overline{0,\ 4}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $n = 20$ равна 0,002. Аналогично погрешность вычислений в тех же точках при $n = 50$ не превышает 0,00033, а при $n = 100$ она не больше чем 0,000083.

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость квадратурной формулы.

ВЫВОДЫ

1. На основе известного точного решения краевой задачи Неймана для круга с помощью специальной квадратурной формулы для интеграла Дини сконструировано эффективное приближенное представление дилогарифмами решения эквивалентной вариационной задачи на допустимом множестве функций.

2. Получена равномерная в единичном круге оценка погрешности приближенной формулы. Проведен численный анализ квадратурной суммы на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.: Наука, 1974. Т. 4. 336 с.
4. Беляев, Н. М. Методы теории теплопроводности: в 2 ч. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. М.: Высш. шк., 1982. Ч. 1. 327 с.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 294 с.
6. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
7. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. М.: Наука, 1967. 500 с.
8. Мысовских, И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И. П. Мысовских. М.: Наука, 1981. 336 с.
9. Мелешко, И. Н. Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами для сингулярных интегралов Коши / И. Н. Мелешко // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1989. № 3. С. 27–34.
10. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 07.10.2020
Подписана в печать 17.12.2020
Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Kantarovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow-Leningrad, Fizmatgiz Publ. 708 (in Russian).
2. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. (1973) *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
3. Smirnov V. I. (1974) *Higher Mathematics Course. Vol. 4.* Moscow, Nauka Publ. 336 (in Russian).
4. Belyaev N. M., Ryadno A. A. (1982) *Methods of the Theory of Heat Conduction. Part 1.* Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 327 (in Russian).
5. Bateman H., Erdelyi A. (1967) *Higher Transcendental Functions*. Moscow, Nauka Publ. 294 (in Russian).
6. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) *Polylogarithms, their Properties and Calculation Methods*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 68 (in Russian).
7. Krylov V. I. (1967) *Approximate Calculation of Integral Methods*. Moscow, Nauka Publ. 500 (in Russian).
8. Mysovskikh I. P. (1981) *Interpolatory Cubature Formulas.* Moscow, Nauka Publ. 336 (in Russian).
9. Meleshko I. N. (1989) Quadrature Formulas with Nonnegative Coefficients for Singular Cauchy Integrals. *Vestsi Akademii Navuk BSSR. Ser. Fizika-Matematychnykh Navuk* [Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series], (3), 27–34 (in Russian).
10. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Integrals of Cauchy Type and their Applications.* Minsk, VUZ-UNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 07.10.2020
Accepted: 17.12.2020
Published online: 30.03.2021