https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184

УДК 519.653.4

Прямой метод решения задачи билинейного программирования

Канд. физ.-мат. наук, доц. Л. Д. Матвеева[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Рассматривается задача билинейного программирования, в которой столбец, соответствующий одной из переменных величин, не фиксированный, а может выбираться из некоторого выпуклого множества. Данная задача известна как задача Данцига – Вулфа. Раннее предлагался модифицированный опорный метод ее решения, использующий декомпозицию ограничений задачи метода Данцига – Вулфа. Автором статьи разработан прямой точный метод решения сформулированной задачи. Метод основан на идее решения задачи линейного программирования с обобщенными прямыми ограничениями и на общей концепции адаптивного метода решения задачи линейного программирования. Введены понятия опоры, опорного плана, оптимального и субоптимального (ε-оптимального) плана, который является заданным приближением по целевой функции к оптимальному плану задачи. Сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности опорного плана. Поиск оптимального решения основан на идее максимизации приращения целевой функции. Данный подход позволяет полнее учитывать основную цель и структуру задачи. Улучшение опорного плана состоит из двух частей: замены плана и замены опоры. Для поиска подходящего направления решается специальная производная задача с учетом основных ограничений задачи. Замена опоры основана на поиске оптимального плана двойственной задачи. За конечное число итераций (в случае невырожденности) метод приводит к оптимальному решению задачи.

Ключевые слова: билинейное программирование, оптимальный план, опора, прямой метод

Для цитирования: Матвеева, Л. Д. Прямой метод решения задачи билинейного программирования / Л. Д. Матвеева // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 179–184. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184

Direct Method for Solving Bilinear Programming Problem

L. D. Matveyeva[1)]

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The bilinear programming problem is considered, where a column, which corresponds to one of the variables, is not fixed but can be chosen from a convex set. This problem is known as the Dantzig – Wolfe problem. Earlier, a modified support method was proposed to solve the problem, using the decomposition of the problem constraints of the Dantzig – Wolfe method. The author of the paper has developed a direct exact method for solving the formulated problem. The method is based on the idea of the solving a linear programming problem with generalized direct constraints and a general concept of an adaptive solution method. The notions of support, support plan, optimal and suboptimal (ε-optimal) plan are introduced which is a given approximation of the objective function to the optimal plan of the problem. Criteria for optimality and suboptimality of the support plan have been formulated and have been proved in the paper. The search for the optimal solution is based on the idea of maximizing the increment of the objective function. This approach allows more fully to take into account the main target and structure of the problem. Improving a support plan consists of two parts: replacing the plan and replacing the support. To find a suitable direction, a special derived problem is solved while taking into account the main constraints of the problem. The replacement of the support is based on the search for the optimal plan of the dual problem. The method leads to an optimal solution to the problem in a finite number of iterations (in the case of a non-degenerate value).

Keywords: bilinear programming, optimal plan, support, direct method

For citation: Matveyeva L. D. (2021) Direct Method for Solving Bilinear Programming Problem. *Science and Technique*. 20 (2), 179–184. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184 (in Russian)

Адрес для переписки
Матвеева Людмила Дмитриевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9, корп. 11,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
millamatveeva@gmail.com

Address for correspondence
Matveyeva Ludmila D.
Belarusian National Technical University
9, k. 11, B. Khmelnithskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
millamatveeva@gmail.com

Введение

Билинейными задачами называются специальные задачи нелинейного программирования с такими двумя группами переменных, когда при фиксации значений каждой группы получается однотипная задача линейного программирования относительно другой группы переменных. То есть в билинейных задачах обеими группами переменных распоряжаются союзники и каждый из них при самостоятельных действиях имеет дело с задачей линейного программирования [1].

Следует отметить, что многие задачи теории управления, исследования операций и экономики могут быть представлены в виде задач билинейного программирования [2]. Например, так выглядят задачи поиска ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре [3], задача производственного календарного планирования, задача о многопродуктовом потоке на сети [4].

В [5] приводятся приближенные алгоритмы локального и глобального поисков оптимального решения в задачах билинейного программирования с несвязными переменными. Среди последних работ стоит отметить подход к решению билинейных задач, базирующийся на известном алгоритме внешних аппроксимаций.

Автором статьи разработан точный метод решения специальной задачи билинейного программирования, который максимально учитывает специфику задачи и позволяет находить как ее приближенное, так и точное решение.

Основная часть

Рассмотрим задачу:

$$\varphi(x_0, x, y) = c'x + (q'y + c_0)x_0 \to \max_{x_0, x, y};$$
$$Ax + (Cy + a_0)x_0 = b, \; d_{*0} \le x_0 \le d_0^*, \qquad (1)$$
$$d_* \le x \le d^*, \; y \in Y,$$

где $Y = \{y : By = a, \; g_* \le y \le g^*\}$ – ограниченное множество; c, x, d_*, d^* – n-векторы; a_0, b – m-векторы; q, y, g_*, g^* – p-векторы; a – r-вектор; c_0, x_0, d_{*0}, d_0^* – скаляры; $A = A(I, J)$ – $m \times n$-матрица; $B = B(K, L)$ – $r \times p$-матрица; $C = C(I, L)$ – $m \times p$-матрица.

Данная задача в литературе известна как задача Данцига – Вулфа [6].

Совокупность (x_0, x, y) называется планом задачи (1), если на ней выполняются все ограничения. План (x_0^*, x^*, y^*) называется оптимальным, если он доставляет максимум целевой функции. Субоптимальный (ε-оптимальный) план определяется неравенством $\varphi(x_0^*, x^*, y^*) - \varphi(x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon) \le \varepsilon.$

Предположим, что $r + m < p.$ Из множеств J и L выделим подмножества $J_{оп}$ и $L_{оп}$ соответственно так, что $|J_{оп}| = |I|, \; |L_{оп}| = |K|.$ Квадратные матрицы $A_{оп} = A(I, J_{оп}), B(K, L_{оп})$ назовем опорными, если они являются невырожденными [7]. Совокупность $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ – это опорный план задачи (1). Опорный план $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ называется невырожденным, если он не вырожден по прямым ограничениям, т. е. выполняются неравенства:

$$d_{*0} < x_0 < d_0^*; \; d_*(J_{оп}) < x(J_{оп}) < d^*(J_{оп});$$
$$g_*(L_{оп}) < y(L_{оп}) < g^*(L_{оп}).$$

Пусть задан опорный план $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}.$ Вычислим векторы потенциалов $u' = c'_{оп}A_{оп}^{-1},$ $\bar{u}' = \alpha'_{оп}B_{оп}^{-1},$ оценок $\Delta' = u'A - c', \; \bar{\Delta}' = \bar{u}'B - \alpha',$ где $\alpha' = u'C - q', \; \mu = u'a_0 - c_0.$

Рассмотрим некоторый план задачи (1): $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\} = \{x_0 + \Delta x_0, x + \Delta x, y + \Delta y\}.$ Найдем формулу приращения целевой функции $\varphi(x_0, x, y)$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi(x_0, x, y) = \varphi(\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}) -$$
$$- \varphi(x_0, x, y) = c'\Delta x + (q'y + c_0)\Delta x_0 + \qquad (2)$$
$$+ q'\Delta y \Delta x_0 + q'\Delta y x_0.$$

Так как (x_0, x, y) и $(\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ являются планами задачи, то выполняются следующие равенства:

$$A\Delta x + (Cy + a_0)\Delta x_0 + C\Delta y x_0 +$$
$$+ C\Delta y \Delta x_0 = 0; \; B\Delta y = 0. \qquad (3)$$

Найдем из этих равенств опорные компоненты Δx и Δy:

$$\Delta x\left(J_{\text{оп}}\right)=-A_{\text{оп}}^{-1}\left[A\left(I,\,J_{\text{н}}\right)\Delta x\left(I_{\text{н}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(Cy+a_0\right)\Delta x_0+C\Delta y x_0+C\Delta y\Delta x_0\right]; \qquad (4)$$

$$\Delta y\left(L_{\text{оп}}\right)=-B_{\text{оп}}^{-1}B\left(K,\,L_{\text{н}}\right)\Delta y\left(L_{\text{н}}\right), \qquad (5)$$

где $J_{\text{н}}=J\setminus J_{\text{оп}}$; $L_{\text{н}}=L\setminus L_{\text{оп}}$.

Тогда из определения потенциалов и оценок получим

$$\Delta\varphi=-\Delta'\left(J_{\text{н}}\right)\Delta x\left(J_{\text{н}}\right)-\Delta_0\left(y\right)\Delta x_0-$$
$$-\overline{\Delta}'\left(L_{\text{н}}\right)\Delta y\left(L_{\text{н}}\right)x_0-\overline{\Delta}'\left(L_{\text{н}}\right)\Delta y\left(L_{\text{н}}\right)\Delta x_0. \qquad (6)$$

Обозначим:

$$J_{*\text{н}}=\left\{j\in J_{\text{н}}:x_j=d_{*j}\right\};\ J_{\text{н}}^{*}=\left\{j\in J_{\text{н}}:x_j=d_j^{*}\right\};$$
$$L_{*\text{н}}=\left\{l\in L_{\text{н}}:y_l=g_{*l}\right\};\ L_{\text{н}}^{*}=\left\{l\in L_{\text{н}}:y_l=g_l^{*}\right\};$$
$$\tilde{J}_{\text{н}}=J_{\text{н}}\setminus\left\{J_{*\text{н}}\cup J_{\text{н}}^{*}\right\};\ \tilde{L}_{\text{н}}=L_{\text{н}}\setminus\left\{L_{*\text{н}}\cup L_{\text{н}}^{*}\right\}.$$

Теорема. *Критерий оптимальности. Соотношения:*

$$\Delta\left(J_{*\text{н}}\right)\geq 0,\ \Delta\left(J_{\text{н}}^{*}\right)\leq 0,\ \Delta\left(\tilde{J}_{\text{н}}\right)=0;$$

$$\Delta_0\left(y\right)\geq 0 \text{ при } x_0=d_{*0};\ \Delta_0\left(y\right)\leq 0 \text{ при } x_0=d_0^{*};$$
$$\Delta_0\left(y\right)=0 \text{ при } d_{*0}<x_0<d_0^{*};$$

$$\overline{\Delta}\left(L_{*\text{н}}\right)x_0\geq 0;\ \overline{\Delta}\left(L_{\text{н}}^{*}\right)x_0\leq 0;\ \overline{\Delta}\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)x_0=0;$$
$$\overline{\Delta}\left(L_{*\text{н}}\right)\leq 0;\ \overline{\Delta}\left(L_{\text{н}}^{*}\right)\geq 0;\ \overline{\Delta}\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)=0, \text{ при } x_0=d_{*0}; \qquad (7)$$

$$\overline{\Delta}\left(L_{*\text{н}}\right)\geq 0;\ \overline{\Delta}\left(L_{\text{н}}^{*}\right)\leq 0;\ \overline{\Delta}\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)=0 \text{ при } x_0=d_0^{*};$$
$$\overline{\Delta}\left(L_{\text{н}}\right)=0 \text{ при } d_{*0}<x_0<d_0^{*}$$

достаточны, а в случае невырожденности необходимы для оптимальности опорного плана $\left(x_0,\,x,\,y,\,A_{\text{оп}},\,B_{\text{оп}}\right)$.

Доказательство. *Достаточность.* Из условий $d_*-x\leq\Delta x\leq d^*-x$, $d_{*0}-x_0\leq\Delta x_0\leq d_0^*-x_0$, $g_*-y\leq\Delta y\leq g^*-y$ и определения подмножеств $J_{*\text{н}},\,J_{\text{н}}^*,\,L_{*\text{н}},\,L_{\text{н}}^*$ следуют соотношения $\Delta x\left(J_{*\text{н}}\right)\geq 0$, $\Delta x\left(J_{\text{н}}^*\right)\leq 0$, $\Delta y\left(L_{*\text{н}}\right)\geq 0$, $\Delta y\left(L_{\text{н}}^*\right)\leq 0$, $\Delta x_0\geq 0$ при $x_0=d_{*0}$, $\Delta x_0\leq 0$ при $x_0=d_0^*$ для всех допустимых приращений $\Delta x_0,\,\Delta x,\,\Delta y$. Следовательно, при условиях (7) выполняется неравенство $\Delta\varphi\left(x_0,\,x,\,y\right)\leq 0$, что доказывает оптимальность плана $\left\{x_0,\,x,\,y\right\}$, так как любое допустимое приращение $\left\{\Delta x_0,\,\Delta x,\,\Delta y\right\}$ не ведет, согласно (6), к увеличению значения целевой функции.

Необходимость. Пусть $\left\{x_0,\,x,\,y,\,A_{\text{оп}},\,B_{\text{оп}}\right\}$ – оптимальный план. Докажем справедливость соотношений (7) методом от противного. Пусть условия (7) не выполняются по первой группе соотношений. Тогда, полагая $\Delta x_0=0,\,\Delta y\left(L_{\text{н}}\right)=0$, можно построить такую (в силу невырожденности опорного плана) допустимую вариацию Δx, что не нарушаются прямые ограничения по опорным переменным и при этом $-\Delta'\left(J_{\text{н}}\right)\Delta x\left(J_{\text{н}}\right)>0$, что противоречит предположению об оптимальности опорного плана. Аналогично проводится доказательство при нарушении других групп соотношений (7).

Из приведенных рассуждений следует, что при заданном опорном плане $\left\{x_0,\,x,\,y,\,A_{\text{оп}},\,B_{\text{оп}}\right\}$ для каждого плана $\left\{\tilde{x}_0,\,\tilde{x},\,\tilde{y}\right\}$ найдутся допустимые приращения $\Delta x(J_{\text{н}}),\,\Delta y(L_{\text{н}}),\,\Delta x_0$ такие, что $\tilde{x}=x+\left\{\Delta x(J_{\text{оп}}),\,\Delta x(J_{\text{н}})\right\}$, $\tilde{x}_0=x_0+\Delta x_0$, $\tilde{y}=y+\left\{\Delta y(L_{\text{оп}}),\,\Delta y(L_{\text{н}})\right\}$, где $\Delta x(J_{\text{оп}}),\,\Delta y(L_{\text{оп}})$ вычисляются по формулам (4), (5). Поэтому максимум функции (6) служит оценкой отклонения плана $\left\{x_0,\,x,\,y\right\}$ от оптимального по целевой функции. Найдем максимум функции (6) с учетом ограничений:

$$d_*\left(J_{\text{н}}\right)-x\left(J_{\text{н}}\right)\leq\Delta x\left(J_{\text{н}}\right)\leq d^*\left(J_{\text{н}}\right)-x\left(J_{\text{н}}\right);$$
$$d_{*0}-x_0\leq\Delta x\leq d_0^*-x_0;$$

$$g_*\left(L_{\text{н}}\right)-y\left(L_{\text{н}}\right)\leq\Delta y\left(L_{\text{н}}\right)\leq g^*\left(L_{\text{н}}\right)-y\left(L_{\text{н}}\right).$$

Он достигается при $\Delta x_j=d_{*j}-x_j$ при $\Delta j>0$; $\Delta x_j=d_j^*-x_j$ при $\Delta j<0$; $\Delta x_j=0$ при $\Delta j=0$, $j\in J_{\text{н}}$; $\Delta x_0=d_{*0}-x_0$ при $\Delta_0\left(y\right)>0$; $\Delta x_0=d_0^*-x_0$ при $\Delta_0\left(y\right)<0$; $\Delta x_0=0$ при $\Delta_0\left(y\right)=0$; $\Delta y_j=g_{*j}-y_j$ при $\overline{\Delta}_j>0$; $\Delta y_j=g_j^*-y_j$ при $\overline{\Delta}_j<0$; $\Delta y_j=0$ при $\overline{\Delta}_j=0$, $j\in L_{\text{н}}$ и равен числу $\beta=\beta$ (x_0, $x,\,y,\,A_{\text{оп}},\,B_{\text{оп}}$) [8, 9]:

$$\beta = \sum_{\substack{\Delta_j<0,\\ j\in J_{\text{н}}}} \Delta_j\left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{\substack{\Delta_j>0,\\ j\in J_{\text{н}}}} \Delta_j\left(x_j - d_{*j}\right) + \Delta_0\left(y\right)\overline{d}_0 + x_0 \sum_{\substack{\overline{\Delta}_j x_0\ge 0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}_j\left(g_j^* - y_j\right) + x_0 \sum_{\substack{\overline{\Delta}_j x_0<0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}_j\left(g_{*j} - y_j\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\overline{\Delta}_j>0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}_j\left(g_j^* - y_j\right)\left(d_0^* - x_0\right) + \sum_{\substack{\overline{\Delta}_j<0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}_j\left(g_{*j} - y_j\right)\left(d_{*0} - x_0\right),$$

которое называется оценкой субоптимальности опорного плана $\{x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$. Здесь приняты обозначения:

$$\overline{d}_0 = \begin{cases} x_0 - d_0^*, \text{ если } \Delta_0\left(y\right) < 0; \\ x_0 - d_{*0}, \text{ если } \Delta_0\left(y\right) > 0. \end{cases}$$

Справедлив *критерий субоптимальности*. При $\beta \le \varepsilon$ опорный план $\{x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$ является ε-оптимальным опорным планом задачи (1). Для каждого ε-оптимального плана $\{x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ существует такая опора $A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}$, что оценка субоптимальности β опорного плана $\{x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет неравенству $\beta \le \varepsilon$.

Итерация метода. Пусть $\{x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$ – опорный план задачи (1). Для плана $\{x_0, x, y\}$ имеются допустимые направления, вдоль которых целевая функция возрастает. Пусть $\beta > \varepsilon$, где ε – заданная точность приближения к оптимальному плану задачи. Новый пан $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\}$ будем искать в виде $\tilde{x}_0 = x_0 + \theta_0 l_0$, $\tilde{x} = x + \theta_0^2 l$, $\tilde{y} = y + \theta_0 \tilde{l}$, где $\{l_0, l, \tilde{l}\}$ – подходящие направления для $\{x_0, x, y\}$; θ_0 – максимально допустимый шаг.

Для построения подходящего направления рассмотрим производную задачу:

$$\Delta_0\left(y\right)l_0 - \overline{\Delta}'_{\text{н}}\tilde{l}_{\text{н}}\left(x_0 + l_0\right) \to \min_{l_0, \tilde{l}_{\text{н}}};$$

$$\begin{gathered} d_{*0} - x_0 \le l_0 \le d_0^* - x_0; \\ g_*\left(L_{\text{н}}\right) - y\left(L_{\text{н}}\right) \le \tilde{l}_{\text{н}} \le g^*\left(L_{\text{н}}\right) - y\left(L_{\text{н}}\right); \end{gathered} \qquad (8)$$

$$B\tilde{l} = 0,\ C\tilde{l}x_0 + \left(Cy + a_0\right)l_0 = 0.$$

Направление $\tilde{l}_{\text{н}} = \tilde{l}\left(L_{\text{н}}\right)$ определяем по формулам:

$$\tilde{l}_j = \begin{cases} g_j^* - y_j \text{ при } \overline{\Delta}_j\left(x_0 + l_0\right) > 0; \\ g_{*j} - y_j \text{ при } \overline{\Delta}_j\left(x_0 + l_0\right) < 0; \\ 0 \quad \text{при } \overline{\Delta}_j\left(x_0 + l_0\right) = 0,\ j \in L_{\text{н}}. \end{cases} \qquad (9)$$

В результате получим следующую кусочно-линейную задачу для нахождения l_0:

$$s(l_0) = \Delta_0\left(y\right)l_0 + \sum_{\substack{\overline{\Delta}'_j\left(x_0+l_0\right)>0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}'_j\left(x_0 + l_0\right)\left(y_j - g_j^*\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\overline{\Delta}'_j\left(x_0+l_0\right)<0,\\ j\in L_{\text{н}}}} \overline{\Delta}'_j\left(x_0 + l_0\right)\left(y_j - g_{*j}\right) \to \min; \quad (10)$$

$$d_{*0} - x_0 \le l_0 \le d_0^* - x_0.$$

Несложно доказать, что если $x_0 + l_0$ меняет знак на отрезке $\left[d_{*0},\ d_0^*\right]$, то функция $s(l_0)$ – вогнутая. Если $x_0 + l_0$ постоянного знака, то $s(l_0)$ – монотонная. Следовательно, минимум функции $s(l_0)$ существует только на границах отрезка $\left[d_{*0},\ d_0^*\right]$.

Решая задачу (10), находим направление l_0 для x_0. Затем по формулам (9), (5) находим направление $\tilde{l}$ для y. Полагая

$$l_j = \begin{cases} d_j^* - x_j \text{ при } \Delta_j < 0; \\ d_{*j} - x_j \text{ при } \Delta_j > 0; \\ 0 \quad \text{при } \Delta_j = 0,\ j \in J_{\text{н}}, \end{cases}$$

вычисляем $l(J_{\text{оп}})$ по (4). Направление l для вектора x найдено. Максимально допустимый шаг θ_0 вдоль найденных направлений $l_0, l, \tilde{l}$ для x_0, x, y соответственно вычисляем так, чтобы:

1) выполнялись прямые опорные и неопорные основные ограничения;

2) оценка $\Delta_0(y)$ сохраняла свой знак.

Следовательно, имеем $\theta_0 = \min\{1, \theta_{j_*}, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}_{j_0}\}$, где

$$\theta_{j_*} = \min \begin{cases} \sqrt{\left(d_j^* - x_j\right)/l_j}, \text{ если } l_j > 0; \\ \sqrt{\left(d_{*j} - x_j\right)/l_j}, \text{ если } l_j < 0; \\ \infty, \quad \text{если } l_j = 0,\ j \in J_{\text{оп}}; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_0(y)}{\alpha'\tilde{l}}, \text{ если } \Delta_0(y) \neq 0 \text{ и } \dfrac{\Delta_0(y)}{\alpha'\tilde{l}} < 0; \\ \infty, \quad \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{j_0} = \min \begin{cases} \left(g_j^* - y_j\right)/\tilde{l}_j, \text{ если } \tilde{l}_j > 0; \\ \left(g_{*j} - y_j\right)/\tilde{l}_j, \text{ если } \tilde{l}_j < 0; \\ \infty, \quad \text{если } \tilde{l}_j = 0,\ j \in L_{\text{оп}}. \end{cases}$$

Строим новый опорный план $\tilde{x}_0 = x_0 + \theta_0 l_0$, $\tilde{x} = x + \theta_0^2 l$, $\tilde{y} = y + \theta_0 \tilde{l}$ [10], на котором выполняются соотношения

$$\begin{gathered} c'x^* + \left(q'y^* + c_0\right)x_0^* - c'x - \left(q'y + c_0\right)x_0 - \\ -\theta_0^2 c'l - \theta_0\left(q'y + c_0\right)l_0 - \theta_0 q'\tilde{l}x_0 - \theta_0^2 q'\tilde{l}l_0 \leq \\ \leq \beta - \theta_0^2 c'l - \theta_0\left(q'y + c_0\right)l_0 - \theta_0 q'\tilde{l}x_0 - \\ -\theta_0^2 q'\tilde{l}l_0 = \overline{\beta} = \left(1 - \theta_0\right)\beta. \end{gathered}$$

Следовательно, при $\overline{\beta} \leq \varepsilon$ процесс решения задачи (1) заканчивается построением ε-оптимального плана $\{\tilde{x}_0,\ \tilde{x},\ \tilde{y}\}$.

Пусть $\overline{\beta} > \varepsilon$. Составим двойственную задачу к задаче (1). В силу билинейности двойственная задача будет состоять из пары двойственных задач относительно *x* и *y*. Поэтому имеем:

$$\begin{gathered} \overline{b}'z' - d_*'\, v + d^{*'} w \to \min; \\ A'z - v + w \geq c,\ v \geq 0,\ w \geq 0; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} a'z - g_*' v + g^{*'} w \to \min; \\ B'z - v + w \geq a,\ v \geq 0,\ w \geq 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\overline{b} = b - \left(c\tilde{y} + a_0\right)\tilde{x}_0$ $z = u$ для (11); $z = \overline{u}$ для (12).

Для уменьшения оценки субоптимальности переходим к улучшению опор $A_{\text{оп}}$ или $B_{\text{оп}}$ в зависимости от выбранного шага [8]. Возможны случаи:

1) $\theta_0 = \theta_{j_*}$ – с помощью решения двойственной задачи (11) улучшаем опору $A_{\text{оп}}$, заменяя ее на новую $\tilde{A}_{\text{оп}}$ [3];

2) $\theta_0 = \tilde{\theta}_{j_0}$ – меняем опору $B_{\text{оп}}$ на $\tilde{B}_{\text{оп}}$, используя оптимальный план двойственной задачи (12);

3) $\theta_0 = \tilde{\theta}$ – здесь $\Delta_0(\tilde{y}) = 0$. Следовательно, новую опору $B_{\text{оп}}$ необходимо подобрать так, чтобы удержать данное условие. Так как $\Delta_0(\tilde{y}) = \alpha'\tilde{y} + \mu$, то вектор Δy должен удовлетворять условиям $B\Delta y = 0$, $\alpha'\Delta y = 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{gathered} B_{\text{оп}}\Delta y\left(L_{\text{оп}}\right) + B\left(I,\ j_s\right)\Delta y_{j_s} + B\left(I,\ \tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right) = 0; \\ \alpha_{\text{оп}}'\Delta y\left(L_{\text{оп}}\right) + \alpha_{j_s}\Delta y_{j_s} + \alpha'\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right) = 0, \end{gathered}$$

где $\tilde{L}_{\text{н}} = L_{\text{н}} \setminus j_s$.

Поскольку $\Delta y\left(L_{\text{оп}}\right) = -B_{\text{оп}}^{-1} \cdot B\left(I,\ L_{\text{н}}\right)\Delta y\left(L_{\text{н}}\right)$, то

$$\begin{gathered} \alpha_{\text{оп}}'\left(-B_{\text{оп}}^{-1}B\left(I,\ \tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right) - B_{\text{оп}}^{-1}B\left(I,\ j_s\right)\Delta y_{j_s}\right) + \\ + \alpha_{j_s}\Delta y_{j_s} + \alpha'\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right) = 0, \end{gathered}$$

или

$$-\overline{\Delta}_{j_s}\Delta y_{j_s} - \overline{\Delta}'\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta y_{j_s} = \frac{-\overline{\Delta}'\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)\Delta y\left(\tilde{L}_{\text{н}}\right)}{\Delta_{j_s}} \text{ при } \overline{\Delta}_{j_s} \neq 0.$$

Строим новую опору $\overline{B}_{\text{оп}}$, полагая $\overline{L}_{\text{оп}} = L_{\text{оп}} \setminus j_0 \bigcup \{j_s\}$, где j_0 определяем по второй группе соотношений оптимальности с учетом их нарушений.

Проверяем опорный план $\{\tilde{x}_0,\ \tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{A}_{\text{оп}},\ \tilde{B}_{\text{оп}}\}$ на оптимальность. За конечное число шагов при невырожденности опорного плана получим ε-оптимальный план исходной задачи.

ВЫВОДЫ

1. Разработан прямой точный метод решения задачи билинейного программирования в случае, когда столбец, соответствующий од-

ной из переменных задачи, не фиксированный, а выбирается из некоторого выпуклого множества.

2. Сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности опорного плана, позволяющие оценить степень приближения полученного решения к оптимальному.

3. Данный метод может применяться при решении прикладных задач в теории управления, исследовании операций и экономике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов, А. В. Биматричные игры и билинейное программирование / А. В. Орлов, А. С. Стрекаловский. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. Васин, А. А. Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. М.: МГУ, 2005. 278 с.
3. Мухамадиев, Б. М. О решении задачи билинейного программирования и отыскания всех ситуаций равновесия в билинейных матричных играх / Б. М. Мухамадиев // Журнал вычислительной математики и математической экономики. 1978. Т. 18, № 2. С. 211–240.
4. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1980. Ч. 3. 368 с.
5. Орлов, А. В. Численное решение задач билинейного программирования / А. В. Орлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 237–254.
6. Данцинг, Дж. Линейное программирование, его применение и обобщение / Дж. Данцинг. М.: Прогресс, 1964. 600 с.
7. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1977. Ч. 1. 176 с.
8. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1978. Ч. 2. 240 с.
9. Матвеева, Л. Д. Об одной задаче билинейного программирования / Л. Д. Матвеева // Материалы 53-й Междунар. науч.-техн. конф. Минск: БГПА, 1999. Ч. 2. 340 с.
10. Матвеева, Л. Д. Решение задачи билинейного программирования с переменным вектором условий / Л. Д. Матвеева // Наука – образованию, производству, экономике: материалы II Междунар. науч.-техн. конф.: в 4 т. Минск: БНТУ, 2011. Т. 3. С. 375.

Поступила 18.08.2019
Подписана в печать 12.11.2020
Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Orlov A. V., Strekalovskii A. S. (2007) *Bimatrix Games and Bilinear Programming*. Moscow, Phismatlit Publ. 223 (in Russian).
2. Vasin A. A., Morozov V. V. (2005) *Game Theory and Models of Mathematical Economics*. Moscow, Publishing House of Moscow State University. 278 (in Russian).
3. Mukhamadiev B. M. (1978) The Solution of Bilinear Programming Problems and Finding the Equilibrium Situations in Bimatrix Games. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 18 (2), 60–66. https://doi.org/ 10.1016/0041-5553(78)90039-3.
4. Gabasov R., Kirillova F. M. (1980) *Methods of Linear Programming. Part 3*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 368 (in Russian).
5. Orlov A. V. (2008) Numerical Solution of Bilinear Programming Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 48 (2), 225–241. https://doi.org/10.1134/s0965542508020061.
6. Dantzig G. (1964) *Linear Programming, its Application and Ge-Neralization*. Moscow, Progress Publ. 600 (in Russian).
7. Gabasov R., Kirillova F. M. (1977) *Methods of Linear Programming. Part 1*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 176 (in Russian).
8. Gabasov R., Kirillova F. M. (1978) *Methods of Linear Programming. Part 2*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 240 (in Russian).
9. Matveeva L. D. (1999) On one Bilinear Programming Problem. *Materialy 53-i Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. Ch. 2 [Proceedings of 53th International Scientific and Technical Conference. Part 2]*. Minsk, Belarusian State Polytechnic Academy. 340 (in Russian).
10. Matveeva L. D. (2011) Solving a Bilinear Programming Problem with a Variable Vector of Conditions. *Nauka – Obrazovaniyu, Proizvodstvu, Ekonomike: Materialy II Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. T. 3 [Science for Education, Industry, Economy: Proceedings of II International Scientific and Technical Conference. Vol. 3]*. Minsk, Belarusian National Technical University, 375 (in Russian).

Received: 18.08.2019
Accepted: 12.11.2020
Published online: 30.03.2021