

# Часть 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ И ФУНДАМЕНТОСТРОЕНИЯ

УДК 624.131

*Миронов В.А., д-р техн. наук, проф.,*

*Софьин О.Е., канд. техн. наук, доц.*

*Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия*

## *Взаимодействие жесткого штампа с упругопластическим основанием*

### *Interaction of the rigid stamp with elasto-plastic basis*

Проведено численное моделирование взаимодействия жесткого квадратного штампа с песчаным основанием, описываемым моделью неассоциированного пластического течения.

Numerical modelling interaction of a rigid square stamp with the sandy basis described by model of elasto-plastic deformation of is lead.

При расчетах оснований и грунтовых сооружений используют математические модели, описывающие механическое поведение грунтов при нагружении с различной степенью физической достоверности, что приводит к расхождению теоретических величин прочности и деформируемости с экспериментом. Точность таких расчетов в значительной степени зависит от учета в математической модели наиболее существенных особенностей деформирования грунтов.

В настоящее время для описания нелинейного деформирования грунтов предпочтение отдается теории пластического течения. При этом главной проблемой является нахождение условия текучести и соответствующей ему поверхности нагружения в пространстве напряжений, при достижении которой возникают пластические деформации.

Ниже приводится решение задачи о вдавливании жесткого штампа в упругопластическое основание, описываемое моделью неассоциированного пластического течения грунта.

Согласно этой модели условие текучести связывает нормальную  $s$  и касательную  $t$  силы на октаэдрической площадке

$$f_q(q_i, K, \chi) = t - sK = 0, \quad (1)$$

где  $K$  – коэффициент внутреннего трения;

$\chi$  – параметр упрочнения;

$$s = 1/3(q_1 + q_2 + q_3);$$

$$t = 1/3 \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2}.$$

Здесь введены новые переменные напряжений

$$q_1 = \frac{\sigma_1 l}{l_{окт}} = \sqrt{3} \sigma_1 l, \quad q_2 = \frac{\sigma_2 m}{m_{окт}} = \sqrt{3} \sigma_2 m, \quad q_3 = \frac{\sigma_3 n}{n_{окт}} = \sqrt{3} \sigma_3 n, \quad (2)$$

где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  – главные напряжения;

$$l = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_1}}, m = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_2}}, n = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_3}}, \quad (3)$$

направляющие косинусы нормали площадки пространственной мобилизации [1];

$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$ ;  $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  – инварианты напряженного состояния;

$l_{окт} = m_{окт} = n_{окт} = 1/\sqrt{3}$  – направляющие косинусы нормали октаэдрической площадки.

Полные приращения деформации складываются из упругих и пластических приращений деформации. Для главных приращений деформации имеем

$$d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Главные приращения упругой деформации связаны с главными приращениями напряжений законом Гука

$$d\varepsilon_i^e = \frac{1}{E} [(1 + \mu)d\sigma_i - 3\mu d\sigma], \quad (5)$$

где  $E$  – модуль упругости;

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$d\sigma = 1/3(d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)$  – приращение среднего напряжения.

Определяющие уравнения пластического деформирования получены путем привлечения дополнительно к условию текучести независимого условия дилатансии [2]:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_i^p, \Lambda, \chi) = d\varepsilon^p - \Lambda d\gamma_{окт}^p = 0, \quad (6)$$

где  $d\varepsilon^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p$  – приращение объемной пластической деформации;

$d\gamma_{окт}^p = 2/3 \sqrt{(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)^2 + (d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)^2}$  – приращение сдвиговой пластической деформации на октаэдрической площадке;

$\Lambda$  – коэффициент дилатансии.

Из (1) и (6) следуют соотношения для главных приращений пластической деформации

$$d\varepsilon_i^p = \left[ q_i - \left( 1 - \frac{2}{3} \Lambda K \right) s \right] d\lambda, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

то есть  $d\varepsilon_i^p$  пропорциональны соответствующим разностям  $(q_i - s)$  и имеет место равенство

$$\mu_q = \mu_{d\varepsilon^p}, \quad (8)$$

где  $\mu_q = (2q_2 - q_1 - q_3)/(q_1 - q_3)$ ,  $\mu_{d\varepsilon^p} = (2d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p)/(d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)$ .

Для случая деформационно упрочняющейся (разупрочняющейся) среды коэффициенты трения  $K$  и дилатансии  $\Lambda$  являются функциями параметра упрочнения (разупрочнения)  $\chi$ . В качестве такого параметра примем объемную пластическую деформацию  $\varepsilon^p$ .

Зависимости  $K = K(\varepsilon^p)$ ,  $\Lambda = \Lambda(\varepsilon^p)$  определяются по результатам испытаний образцов грунта при сложном напряженном состоянии и для разупрочняющихся грунтов могут быть заданы в виде

$$\Lambda = a - bK, \quad (9)$$

$$K = c - d \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_{kp}^p}, \quad (10)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\varepsilon_{kp}^p$  – характеристики грунта.

Рассмотрим действие жесткого штампа на упругопластическое разупрочняющееся основание. Решение краевой задачи проводится в пространственной постановке методом конечных элементов.

Выражения (1) и (7) вместе с уравнениями равновесия, геометрическими соотношениями и граничными условиями образуют замкнутую систему уравнений достаточную для решения поставленной задачи. В алгоритме используется метод начальных напряжений [3]. На каждой ступени нагрузки решается система линейных уравнений вида

$$[K(\Delta u_n)]\{\Delta u_{n+1}\} = \{\Delta F_{n+1}\}, \quad (11)$$

где  $\{\Delta u_{n+1}\} = \{u_{n+1} - u_n\}$ ;  $\{u_n\}$ ,  $\{u_{n+1}\}$  – перемещения узлов после  $n$ -й и  $(n+1)$ -й ступеней нагрузки;

$[K(\Delta u_n)]$  – матрица жесткости системы;

$\{\Delta F_{n+1}\}$  – вектор приращений внешних узловых сил на  $(n+1)$ -й ступени нагрузки.

В соответствии с методом начальных напряжений для каждой ступени нагрузки строится итерационный процесс

$$[K_0]\{\Delta u'_{n+1}\} = \{\Delta F_{n+1}\} + [K_0]\{\Delta u'_{n+1}\} - [K(\sigma_{ij,n}, \varepsilon_n^p, \Delta u'_{n+1})]\{\Delta u'_{n+1}\}, \quad (12)$$

что позволяет однократно формировать и обращать упругую матрицу жесткости  $[K_0]$ .

Начальные узловые силы в (12) определяются по формуле

$$[K]\{\Delta u\} = \int [B]^T \{\Delta \sigma\}^H, \quad (13)$$

где  $[B]^T$  – геометрическая матрица конечного элемента;

$\{\Delta \sigma\}^H$  – приращение начальных напряжений от перемещений  $\{\Delta u\}$ . Величина  $\{\Delta \sigma\}^H$  определяется для каждого элемента в следующей последовательности.

На каждом шаге нагрузки, определяются упругие напряжения  $\{\Delta \sigma\}^Y$  в каждом элементе. Полученные напряжения прибавляются к накопленным на предыдущем шаге напряжениям в данном элементе и вычисляются главные суммарные напряжения  $\{\sigma\}^C$ , которые сравниваются с границами поверхности текучести.

Если действующие напряжения не выходят за пределы поверхности нагружения (2.3), ограничивающей зону I (рис. 1), то деформации грунта являются упругими. В этом случае полученные напряжения корректировать не требуется. Если точка заданных напряжений находится за пределами поверхности нагружения в зоне II, то теоретическая точка лежит на пересечении прямой  $M_{II}M_{II}^T$  с поверхностью нагружения. Направление прямой в пространстве новых переменных напряжений  $q_1, q_2, q_3$  определяется законом пластического течения.

Положение точки  $M_{II}$  определяется координатами  $[q_1^C, q_2^C, q_3^C]$ , точки  $M_{II}^T$  –  $[q_1^T, q_2^T, q_3^T]$ , а в пространстве главных напряжений соответственно координатами  $[\sigma_1^C, \sigma_2^C, \sigma_3^C]$  и  $[\sigma_1^T, \sigma_2^T, \sigma_3^T]$ .

Уравнение поверхности нагружения записывается через главные напряжения:

$$\sqrt{(\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2})^2 + (\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_3})^2 + (\sqrt{\sigma_3} - \sqrt{\sigma_1})^2} - (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3})K = 0. \quad (14)$$

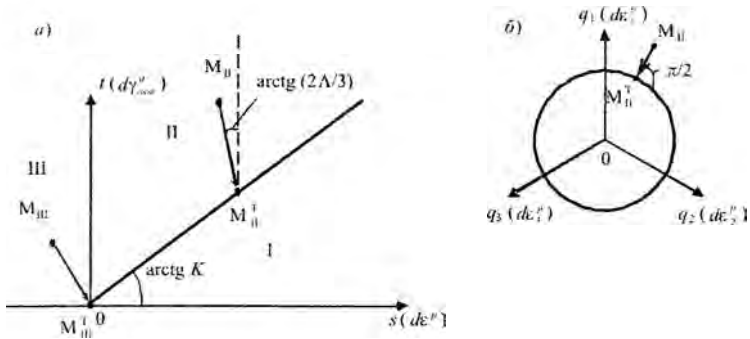


Рис. 1. Определение теоретических напряжений:  
*a* – поверхность нагружения; *б* – сечение поверхности нагружения  
 плоскостью  $q_1 + q_2 + q_3 = \text{const}$

При известных координатах  $[\sigma_1^C, \sigma_2^C, \sigma_3^C]$  и уравнение прямой  $M_{II} M_{II}^T$  имеет вид

$$(1-2\mu)(\sigma_1^C + \sigma_2^C + \sigma_3^C - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = \frac{2(1+\mu)}{3} \Lambda \sqrt{(\sigma_1^C - \sigma_2^C - \sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2^C - \sigma_3^C - \sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_3^C - \sigma_1^C - \sigma_3 + \sigma_1)^2}. \quad (15)$$

Равенство (8) записывается уравнением

$$\frac{2(\sigma_2^C - \sigma_2) - \sigma_1^C - \sigma_3^C + \sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1^C - \sigma_3^C - \sigma_1 + \sigma_3} = \frac{2\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_3}}{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_1}}. \quad (16)$$

Совместное решение уравнений (14)–(16) относительно  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  методом Ньютона позволяет получить координаты точки  $M_{II}^T$  – главные теоретические напряжения  $\sigma_1^T$ ,  $\sigma_2^T$  и  $\sigma_3^T$ . Коэффициенты  $K$  и  $\Lambda$  определяются по формулам (9) и (10) при значении накопленной объемной пластической деформации, полученном на предыдущих ступенях нагрузки.

Если точка заданных напряжений находится в зоне III, т.е. хотя бы одно из главных напряжений меньше либо равно нулю, то элемент среды будет разрушен по трем направлениям и  $\sigma_1^T = \sigma_2^T = \sigma_3^T = 0$ .

Разница между суммарными  $\{\sigma\}^C$  и теоретическими напряжениями  $\{\sigma\}^T$  принимается за начальные напряжения.

На основе разработанного алгоритма составлена вычислительная программа, с помощью которой проводилось моделирование процесса упругопластического деформирования грунтового основания жестким шероховатым штампом.

В качестве примера рассмотрено нагружение основания квадратным штампом размером  $20 \times 20$  м. Размеры расчетной области приняты  $60 \times 60 \times 80$  м. Вследствие осевой симметрии задачи рассматривалась только одна четвертая ее часть, разбитая на тетраэдрические элементы (рис. 2).

Граничные условия задавались в перемещениях и силах. На вертикальных границах задавались равными нулю горизонтальные перемещения в узлах, а на нижней границе обеспечивалось закрепление узлов в трех направлениях. Внешняя нагрузка на штамп моделировалась узловыми силами.

В качестве основания штампа принят грунт со следующими характеристиками:  $\rho = 0,017$  МН/м<sup>3</sup>;  $E = 300$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $a = 1,33$ ;  $b = 4,44$ ;  $c = 0,35$ ;  $d = 0,05$ ;  $\varepsilon_{кр}^p = -1,0$  %. Теоретические кривые деформируемости грунта основания по траекториям с  $s = \text{const}$  представлены на рис. 3. Упругие и прочностные характеристики штампа задавались из условия обеспечения его жесткости и упругой работы в процессе нагружения.

На первом шаге численного решения определялось напряженно-деформированное состояние от собственного веса грунта, а на сле-

дующих шагах к штампу прикладывалась ступенчатая вертикальная нагрузка. Величина ступени составляла 1,0 МПа.

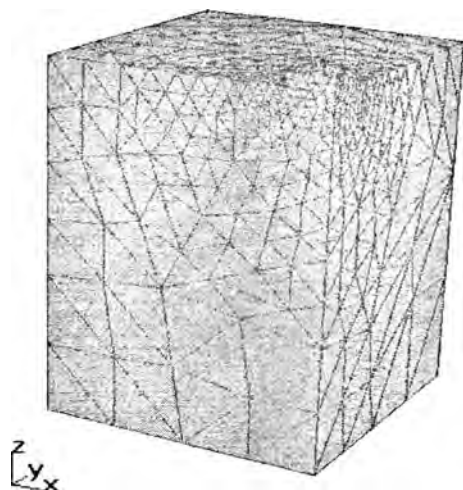


Рис. 2. Конечно-элементная схема расчетной области

Результаты расчета в виде графика зависимости осадки  $S$  от давления под фундаментом  $P$  представлены на рис. 4. Для сравнения на нем приведено упругопластическое решение для грунта, пластическое поведение которого описывается константами  $K = 0,3$  и  $\Lambda = 0$ , соответствующими критической пористости грунта, а также упругое решение.

Анализ зависимости «осадка-давление» показывает, что при малых нагрузках наблюдается практически линейная зависимость между осадкой и давлением. При ее увеличении зависимость отклоняется от линейной вследствие значительного развития зон пластической деформации в основании штампа. Предельное давление под подошвой штампа  $P$  для разупрочняющегося грунта равно 8 МПа, для несжимаемого грунта  $P = 5$  МПа и несколько ниже несущей способности по СНиП 2.02.01-83\*. За предельное давление в расчете принималось значение, при превышении которого итерационный процесс численного решения начинал расходиться. Пиковой проч-



ности грунта ( $K = 0,35$ ) соответствует угол внутреннего трения по Мору-Кулону  $36,7^\circ$ , а прочности в критическом состоянии ( $K = 0,3$ ) –  $32,1^\circ$ . Несущая способность основания по СНиП  $p_u = 10,12$  МПа при  $\varphi_m = 36,7^\circ$ ;  $p_u = 6,38$  МПа при  $\varphi_m = 32,1^\circ$ .

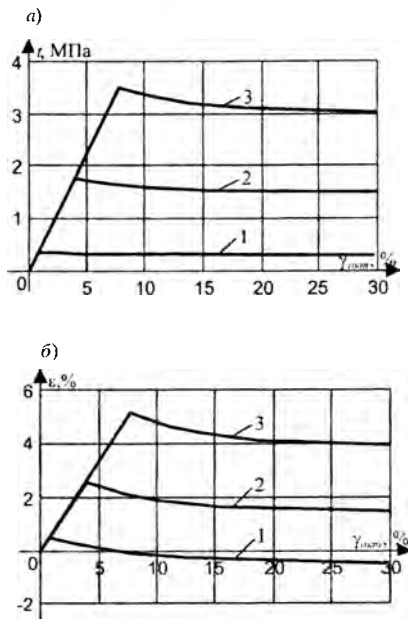


Рис. 3. Теоретические кривые деформируемости грунта при  $\sigma_z$  равном:  
1 – 1,0 МПа; 2 – 5,0 МПа; 3 – 10,0 МПа

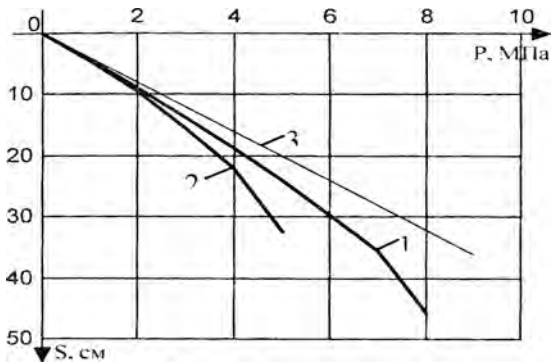


Рис. 4. Графики зависимости  $S$ - $P$ :  
 1 – упругопластическое решение с учетом разупрочнения грунта; 2 – упругопластическое решение для несжимаемого грунта; 3 – упругое решение

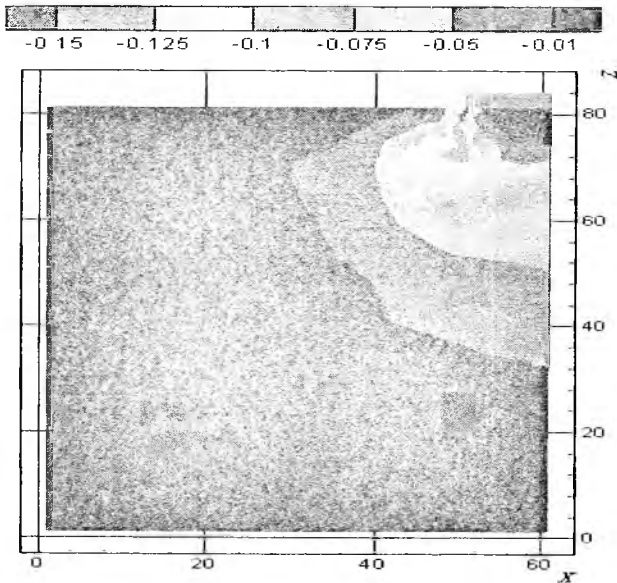


Рис. 5. Изолинии объемной пластической деформации  $\varepsilon^p$  для разупрочняющегося грунта при предельном давлении  $P = 8$  МПа. в %

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миронов, В.А., Софьин О.Е., Гудий А.Н. Прочность и деформируемость грунтов при сложном напряженном состоянии/ Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 4. – С. 5–9.
2. Николаевский В.Н., Сырников Н.М., Шефтер Г.М. Динамика упругопластических дилатирующих сред / Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 397–413.
3. Фадеев, А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.