УДК 624.131

Костюкович Петр Николаевич, д-р техн. наук, проф.
Белорусский национальный технический университет,
г. Минск, Беларусь

Теория взаимосвязей между деформацией уплотнения $\varepsilon(\sigma)$ *и сдвиговой прочностью* $\tau(\sigma)$ *дисперсных грунтов*

The theory of interrelations between compaction strain $\varepsilon(\sigma)$ *and shear strength* $\tau(\sigma)$ *of disperse soils*

На основе сопоставления предельных напряжений, действующих в области сжимающих и сдвигающих деформаций, установлены основные закономерности, формирующиеся в грунте при взаимодействии как линейных (прямо пропорциональных и обобщенных законов Гука и Кулона), так и нелинейно-затухающих моделей деформации и сдвига. Показано, что взаимодействие линейных законов в всех случаях приводит к тому, что функциональные связи между деформацией уплотнения $\varepsilon(\sigma)$ и сдвиговой прочностью $\tau(\sigma)$ грунта – с одной стороны, и между деформативными и прочностными характеристиками грунта – с другой так же являются линейными.

In terms of correlation of ultimate strengths which works in the sphere of compressive and shearing deformations the main mechanisms are found which form in soil during the interaction of both linear (directly proportional and integrated Hooke's law and Coulomb's law) and non-linear damping models of deformation and deviation. It is shown that cooperation of linear laws give rise to the fact that functional bracing between deformation of compaction $\varepsilon(\sigma)$ and shear resistance $\tau(\sigma)$ of soil – on the one hand and between deformative and strengthening characteristics of soil – on the other hand also are linear.

Аналитические взаимосвязи между фазовыми характеристиками, составляющими основу линейной фазовой модели дисперсных грунтов, уже установлены и служат теоретической базой корреляционных соотношений между этими параметрами [1, 2]. Для методологии инженерно-геологических изысканий и геотехнического проектирования не менее актуальна задача о раскрытии функциональных зависимостей, существующих между механическими свойствами грунтов и прежде всего их деформативными и прочностными показателями. Значение этих закономерностей имеет исключительно важное научное и прикладное значение: создается теоретическая основа для диагностики и классификации инженерно-геологических элементов (ИГЭ) с позиции их прочности и несущей способности; открываются пути для аналитической обработки массивов опытных данных и построения корреляционных соотношений между механическими свойствами грунтов; методология инженерно-геологической оценки геооснований приобретает научно обоснованные критерии и вероятность проявления инженерно-геологических рисков снижается. Предлагаемое решение проблемы является следствием линейности двух систем исходных уравнений (законов Кулона и Гука), характеризующих соответственно прочность и деформируемость (сжимаемость) грунтов.

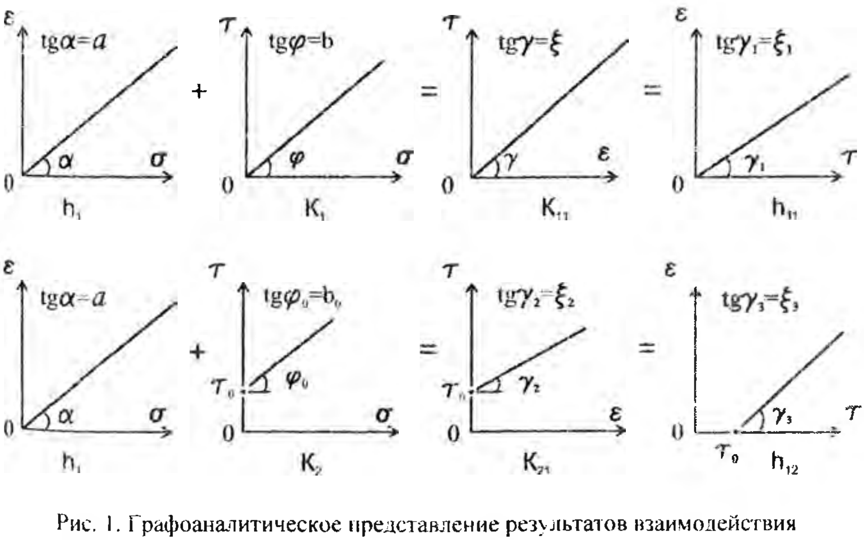

Рис. 1. Графоаналитическое представление результатов взаимодействия в грунтах прямо пропорционального закона Гука (h_i) с линейными законами Кулона (κ_1; κ_2)

Прочность грунтов, как известно, измеряется их сопротивляемостью соответствующим деформациям [3–5]. Из-за переплетения преобладающих форм межчастичного трения и сцепления, а так же переупаковки зерен в предельных областях все виды грунтовых деформаций достаточно условно подразделяются на элементарные и сложные. Последние представляют собой различные, преимущественно неустойчивые соотношения и комбинации элементарных деформаций и потому не всегда поддаются точным оценкам и прогнозам. Данный фактор и определил выбор главного критерия классификации прочности грунтов. В основу критерия положен тот или иной вид элементарных деформаций. Поскольку среди этих деформаций превалируют два вида, то соответственно им различают прочность грунта на сдвиг («кулоновская» прочность) и прочность его на сжатие («гуковская» прочность).

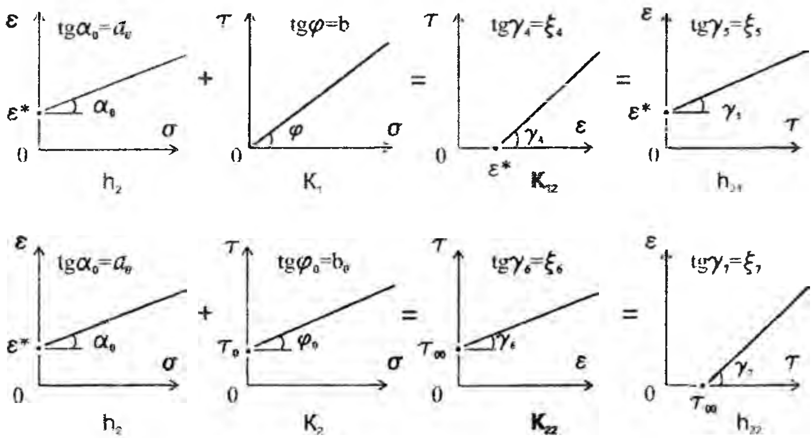

Рис. 2. Графоаналитическое представление результатов взаимодействия в грунтах обобщенного закона Гука (h_2) с прямо пропорциональным (κ_1) и обобщенным (κ_2) законами Кулона

Названные виды прочности грунтов по физике протекающих в них микродеформаций и свойствах порождаемых ими сопротивлений разнятся существенно и потому характеризуются совершенно различными законами и соответственно параметрами. К примеру, «гуковская» прочность грунтов или их сопротивляемость сжатию описывается законом Гука и построенной на нем теорией линейно-деформируемой среды с присущими ей деформативными параметрами: модулем общей деформации (E_0, кг/см^2) и коэффициентом относительной деформации (a, см^2/кг); «кулоновская» прочность грунтов или их сопротивляемость сдвигам характеризуется законом Кулона и базирующейся на нем *теорией линейных сдвигов* с принадлежащими ей двумя прочностными характеристиками: удельным сцеплением ($c = \tau_0$, кг/см^2) и коэффициентом внутреннего трения грунта ($tg\varphi$, где φ – угол внутреннего трения, градусы).

Во многих инженерно-геологических процессах и геотехнических технологиях (движение оползней, выпор грунтов, осадка фундаментов, работа мостовых опор, свай и подпорных стенок и т.д.) «гуковская» и «кулоновская» прочности проявляются и действуют одновременно. Поэтому важно, особенно для *теории косвенных методологий* установить как теоретическую, так и опытную корреляцию между сопротивляемостью грунтов различным внутренним трениям и соответствующим деформациям.

С геотехнических позиций большой интерес представляет сопротивляемость грунтов сжатию (уплотнению) и сдвигу. Эта сопротивляемость, как известно, для сыпучих грунтов в определенном интервале сжимающих нагрузок σ подчиняется законам соответственно Гука (рис. 1, h_l):

$$\varepsilon(\sigma) = (tg\alpha)\sigma = a\sigma = (\beta_0 / E_0)\sigma \tag{1}$$

и Кулона (рис. 1, κ_l):

$$\tau(\sigma) = (tg\varphi)\sigma = b\sigma = (1/E_\varphi)\sigma, \tag{2}$$

где

$$a = tg\alpha = \varepsilon_1/\sigma_1 = \varepsilon_2/\sigma_2 = ... = \varepsilon/\sigma = \beta_0/E_0 - \tag{3}$$

угловой коэффициент прямой $\varepsilon(\sigma)$ по (1), называемый коэффициентом относительного сжатия грунта;

β_0 – функция бокового расширения грунта;

$$b = tg\varphi = \tau_1/\sigma_1 = \tau_2/\sigma_2 = ... = \tau/\sigma = 1/E_\varphi - \qquad (4)$$

угловой коэффициент прямой $\tau(\sigma)$ по (2), называемый *коэффициентом внутреннего трения грунта*;

$\tau(\sigma)$ – сдвиговая прочность грунта;

$\varepsilon(\sigma)$ – относительная деформация (сжатие или уплотнение) грунта при нагрузке σ;

$$E_0 = \beta_0(\sigma/\varepsilon) = \beta_0/a = \beta_0/tg\alpha = \beta_0 ctg\alpha - \qquad (3,a)$$

модуль общей деформации грунта в законе Гука (1);

$$E_\varphi = \sigma/\tau = 1/b = 1/tg\varphi = ctg\varphi - \qquad (4,a)$$

модуль внутреннего трения в законе Кулона (2).

Предположим, что имеем два образца одного и того же грунта (напр., мелкого песка). Один испытываем на компрессионное сжатие и получаем закон Гука (1), который обозначим как h_l, а другой образец испытываем на сдвиг и получаем закон Кулона (2), который обозначим как κ_l (табл. 1). Если таких опытов выполнено большое количество, то мы имеем возможность установить корреляционную связь между деформативными и прочностными параметрами данного грунта или ИГЭ. Но сначала решим эту задачу теоретически.

В процессе сдвига влияние сжимающих σ и касательных τ напряжений на зону деформации проявляется оновременно. В итоге сдвиговая прочность грунта $\tau(\sigma)$ формируется при постоянном и непрерывном взаимодействии уплотняющих σ и сдвигающих τ усилий. Отсюда следует, что *при подчинении грунта законам Гука и Кулона одному и тому же уплотняющему давлению* $\sigma = const$ *соответствуют строго определенные деформации сжатия* $\varepsilon(\sigma)$ *и сдвиговые сопротивления* $\tau(\sigma)$. Поэтому нормальные к поверхности сдвига напряжения σ и являются тем связующим звеном (своего рода «мостиком»), который позволяет установить функциональную связь между «кулоновской» и «гуковской» прочностью грунта и соответственно между его прочностными и деформативными характеристиками (табл. 1).

Таблица 1

Принятая система записи линейных законов сопротивления грунтов уплотняющим (h_1; h_2) и сдвиговым (κ_1; κ_2) деформациям; N-условные обозначения законов Гука (h_1; h_2) и Кулона (κ_1; κ_2)

N	Законы Гука	N	Законы Кулона
h_1	$\varepsilon(\sigma) = a\sigma = (\beta_0/E_0)\sigma$	κ_1	$\tau(\sigma) = (tg\varphi)\sigma$
h_2	$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon^* + a_0\sigma = \varepsilon^* + (\beta_0/E_{00})\sigma$	κ_2	$\tau(\sigma) = \tau_0 + (tg\varphi_0)\sigma$

Следуя данному обоснованию, из (1) находим

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{a}\varepsilon(\sigma) = \frac{E_0}{\beta_0}\varepsilon(\sigma). \quad (5)$$

Поскольку в нашем грунте при одном и том же уплотняющем давлении σ имеют место строго определенные деформации $\varepsilon(\sigma)$ и сдвиговые усилия $\tau(\sigma)$, то вполне корректно значения $\sigma(\varepsilon)$ по (5) можем подставить в закон Кулона (2); в результате получаем исключительно важные зависимости (рис. 1,κ_{11} h_{11}):

$$\tau(\varepsilon) = \frac{tg\varphi}{tg\alpha}\varepsilon(\sigma) = \frac{(tg\varphi)E_0}{\beta_0}\varepsilon(\sigma) = \frac{b}{a}\varepsilon(\sigma) = \xi\varepsilon(\sigma); \quad (6)$$

$$\varepsilon(\tau) = \frac{tg\alpha}{tg\varphi}\tau(\sigma) = \frac{\beta_0}{(tg\varphi)E_0}\tau(\sigma) = \frac{a}{b}\tau(\sigma) = \xi_1\tau(\sigma), \quad (7)$$

отражающие аналитическую связь между прочностными и деформативными характеристиками грунта. Графоаналитически функции $\varepsilon(\tau)$ и $\tau(\varepsilon)$ представляют собой прямые, исходящие из начала координат и обладающие угловыми коэффициентами соответсвенно ξ_1 и $\xi = tg\gamma = 1/\xi_1$; таким образом, данные зависимости идентичны исходным базовым уравнениям – законам Гука h_I и Кулона κ_I (табл. 2; рис. 1, κ_{II}, h_{II}).

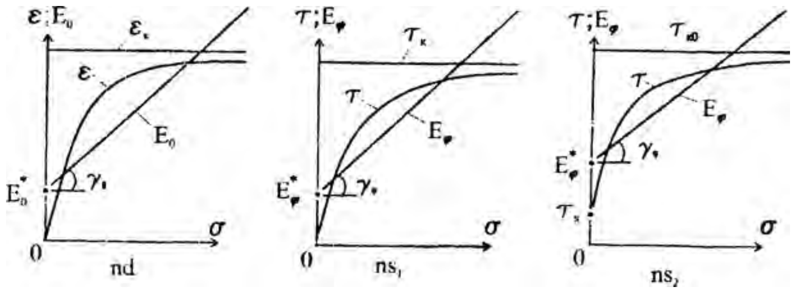

Рис. 3. Графоаналитическое представление нелинейно-затухающих моделей деформативной (*nd*) $\varepsilon(\sigma) = \beta_0\sigma/(E_0^* + a_k\sigma)$ и сдвиговых: для сыпучих грунтов (*ns₁*) $\tau(\sigma) = \sigma/(E_\varphi^* + a_\varphi\sigma)$ и связных (*ns₂*) $\tau(\sigma) = \tau_s + \sigma/(E_\varphi^* + a_\varphi\sigma)$: a_k=tgγ_8; a_φ= tgγ_9; ε_k и τ_k – асимптоты функций соответственно $\varepsilon(\sigma)$ и $\tau(\sigma)$ в моделях *nd* и *ns₁*; $\tau_{k0}=\tau_s+\tau_k$ – асимптота модели *ns₂*; $E_0(\sigma) = \beta_0\sigma/\varepsilon$ и $E_\varphi(\sigma) = \sigma/\tau$ – линейно возрастающие функции модулей осадки и сдвига

Из (6) и (7) устанавливаем, *что при подчинении грунта прямо пропорциональным законам Гука и Кулона отношение его «кулоновской» прочности к присущей ему «гуковской» деформации всегда неизменно и равно константе*

$$\xi = \frac{\tau(\sigma)}{\varepsilon(\sigma)} = \frac{tg\varphi}{tg\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{(tg\varphi)E_0}{\beta_0} = tg\gamma = const, \tag{8}$$

которая может служить достатоно эффективной физико-механической характеристикой грунта, указывая на существование в нем строго определенного соотношения между сдвиговой прочностью $\tau(\sigma)$ и деформацией сжатия или осадки $\varepsilon(\sigma)$. Действительно, из (6)–(8) следует, что *сдвиговая прочность грунта* $\tau(\sigma,\varepsilon)$ *прямо пропорциональна его "гуковской" деформации* $\varepsilon(\sigma,\tau)$, *а последняя* *прямо пропорциональна "кулоновской" прочности* $\tau(\sigma,\varepsilon)$. Кроме того, многократное равенство (8) показывает, что *в сыпучих грунтах, подчиняющихся законам h_I и κ_I, коэффициент внутреннего трения $tg\varphi$ прямо пропорционален коэффициенту относительной сжимаемости a и обратно пропорционален модулю общей деформации E_0* (табл. 2):

$$tg\varphi = \xi tg\alpha = \xi a = \xi(\beta_0/E_0). \qquad (9)$$

где константа ξ представляет собой угловой коэффициент прямой $tg\varphi = f(a)$ и численно $\xi = tg\alpha$ при $a = 1$.

С другой стороны, из (6) видно,что в то же время праметр ξ является угловым коэффициентом

$$\xi = tg\gamma = \tau_1/\varepsilon_1 = \tau_2/\varepsilon_2 = ... = \tau/\varepsilon = const \qquad (10)$$

прямой $\tau(\varepsilon)$ и численно правен τ при $\varepsilon = 1$ (табл. 2, k_{II}). Это значит, что в условиях взаимодействия законов κ_I и h_I сдвиговая прочность грунта $\tau(\sigma)$ прямо пропорциональна его деформации $\varepsilon(\sigma)$. Аналогичными свойствами обладает угловой коэффициент

$$\xi_1 = tg\gamma_1 = 1/\xi = \varepsilon_1/\tau_1 = \varepsilon_2/\tau_2 = ... = \varepsilon/\tau = const \qquad (11)$$

прямой $\varepsilon(\tau)$ (табл. 2; h_{II}).

В связных грунтах закон Кулона имеет вид обобщенной прямой (табл. 1; рис. 1, k_2):

$$\tau(\sigma) = \tau_0 + (tg\varphi_0)\sigma = \tau_0 + b_0\sigma, \qquad (12)$$

где

$$b_0 = tg\varphi_0 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\tau(\sigma) - \tau_0}{\sigma} = const \; - \qquad (13)$$

угловой коэффициент прямой (12), *называемый коэффициентом внутреннего трения связных грунтов*;

τ_0 – аппроксимационная константа прямой $\tau(\sigma)$, равная начальному отрезку этой прямой на оси τ (при $\sigma = 0$), называется *удельным сцеплением грунта*;

φ_0 – угол внутреннего трения связного грунта в обобщенном законе Кулона (12). Из (4) и (13) следует, что углы внутреннего трения φ и φ_0 соответственно в законах Кулона k_1 и k_2, т.е. в сыпучих и связных грунтах, рассчитываются различными методами. Действительно, если оценку $tg\varphi_0$ вести с позиций прямо пропорционального закона Кулона k_1, то вместо искомой константы $tg\varphi_0$ получим убывающую функцию давления σ:

$$tg\varphi = f(\sigma) = \tau/\sigma = tg\varphi_0 + \tau_0/\sigma, \tag{14}$$

асимптотой которой является предел

$$\lim_{\sigma\to\infty} tg\varphi(\sigma) = tg\varphi_0 = b_0. \tag{15}$$

Теперь положим, что параллельно с законом Кулона k_2 в связных грунтах действует закон Гука h_1. В этих условиях аналитическая связь между прочностными $(\tau_0, tg\varphi_0)$ и деформативными (a, E_0) параметрами грунтов так же характеризуется линейными функциями с соответствующими угловыми коэффициентами ($\xi_2 = tg\gamma_2$; $\xi_3 = tg\gamma_3$) и начальным отрезком τ_0 (табл. 2; рис 1, k_{21}, h_{12}):

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 + \xi_2\varepsilon(\sigma) = \tau_0 + \frac{b_0}{a}\varepsilon(\sigma) = \tau_0 + \frac{(tg\varphi_0)E_0}{\beta_0}\varepsilon(\sigma); \tag{16}$$

$$\varepsilon(\tau) = \xi_3[\tau(\sigma) - \tau_0], \tag{17}$$

где

$$\xi_2 = tg\gamma_2 = \frac{b_0}{a} = \frac{(tg\varphi_0)E_0}{\beta_0} = \frac{tg\varphi_0}{tg\alpha}; \tag{18}$$

$$\xi_3 = tg\gamma_3 = 1/\xi_2 = a/b_0 = \beta_0/E_0\, tg\varphi_0 - \qquad (19)$$

угловые коэффициенты прямых соответственно (16) и (17). Это говорит о том, что *в условиях взаимодействия законов h_1 и k_2 сопротивление грунтов сдвигу* $\tau(\sigma)$ *линейно увеличивается с ростом их деформации сжатия* $\varepsilon(\sigma)$.

Таблица 2

Аналитические связи между деформативными (a, a_0, E_0, E_{00}) и прочностными ($tg\varphi, tg\varphi_0, \tau_0, \tau_{00}$) характеристиками грунта при его подчинении законам Гука (h_1; h_2) и Кулона (k_1; k_2); ξ, ξ_2, ξ_4, ξ_6 – угловые коэффициенты прямых соответственно $\tau(\varepsilon)$, $tg\varphi = f(a, a_0)$, $tg\varphi_0 = f(a, a_0)$; $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \xi_7$ – то же, функций $h_{11},...,h_{22}$; $\tau_{00} = \tau_0 - \xi_6\varepsilon^*$; N_0 – возможные сочетания законов Гука (h_1,h_2) и Кулона (k_1,k_2) в одном и том же грунте; N_1 – условное обозначение функций $\tau(\varepsilon)$ и $\varepsilon(\tau)$

N_0	Функции связи $\tau(\varepsilon)$ и $\varepsilon(\tau)$	N_1	Функции связи между прочностными и деформативными характеристиками грунта
h_1+k_1	$\tau(\varepsilon) = \xi\varepsilon$	k_{11}	$tg\varphi = \xi a = \xi(\beta_0/E_0)$
	$\varepsilon(\tau) = \xi_1\tau$	h_{11}	
h_1+k_2	$\tau(\varepsilon) = \tau_0 + \xi_2\varepsilon$	k_{21}	$tg\varphi_0 = \xi_2 a = \xi_2(\beta_0/E_0)$
	$\varepsilon(\tau) = \xi_3(\tau - \tau_0)$	h_{12}	
h_2+k_1	$\tau(\varepsilon) = \xi_4(\varepsilon - \varepsilon^*)$	k_{12}	$tg\varphi = \xi_4 a_0 = \xi_4(\beta_0/E_{00})$
	$\varepsilon(\tau) = \varepsilon^* + \xi_5\tau$	h_{21}	
h_2+k_2	$\tau(\varepsilon) = \tau_{00} + \xi_6\varepsilon$	k_{22}	$tg\varphi_0 = \xi_6 a_0 = \xi_6(\beta_0/E_{00})$
	$\varepsilon(\tau) = \xi_7(\tau - \tau_{00})$	h_{22}	

Из (18) находим, что *и в связных грунтах, подчиняющихся законам h_1 и k_2, коэффициент внутреннего трения* $tg\varphi_0$ *прямо пропор-*

ционален коэффициенту сжимаемости a и обратно пропорционален модулю общей деформации E_0:

$$tg\varphi_0 = \xi_2 a = \xi_2(\beta_0/E_0), \qquad (20)$$

где константа ξ_2 представляет собой угловой коэффициент прямой $tg\varphi_0 = f(a)$ и численно $\xi_2 = tg\varphi_0$ при $a = 1$. Опыты показывают, что в моренных суглинках величина $\xi_2 = E_0 tg\varphi_0$ изменяется в диапазоне $110{,}0 \le \xi_2 \le 180{,}0$ кг/см^2.

Компрессионное уплотнение грунтов, осадка штампов и геооснований часто подчиняются обобщенному закону Гука h_2 – деформативной прямой (см. рис. 2):

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon^* + a_0\sigma = \varepsilon^* + (tg\alpha_0)\sigma = \varepsilon^* + (\beta_0/E_{00})\sigma \qquad (21)$$

с начальным отрезком $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon^*$ на оси деформаций $(\sigma = 0)$ и угловым коэффициентом

$$a_0 = tg\alpha_0 = \frac{\beta_0}{E_{00}} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^*}{\sigma}, \qquad (22)$$

где

$$E_{00} = \frac{\beta_0}{a_0} = \frac{\beta_0\sigma}{\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^*} = \frac{\beta_0}{tg\alpha_0} = \beta_0 ctg\alpha_0 \qquad (23)$$

модуль общей деформации грунта в обобщенном законе Гука (21), обозначенным как h_2 (см. табл. 1);

$a_0 = tg\alpha_c$ – коэффициент относительной сжимаемости грунта в этом законе, численно равный его угловому коэффициенту $tg\alpha_0$ (см. рис. 2).

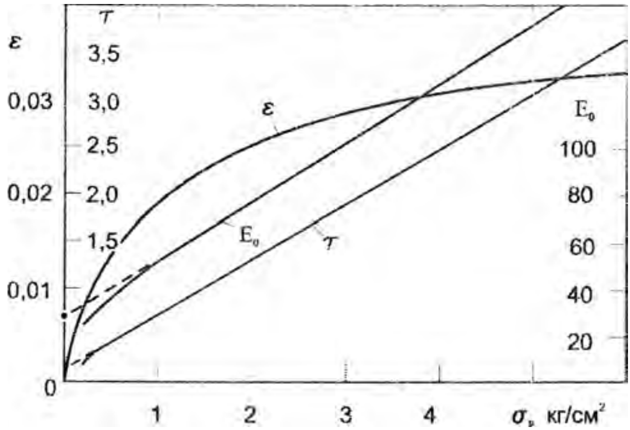

Рис. 4 . Типичное сочетание нелинейно-затухающей (*nd*) $\varepsilon(\sigma)$ и обобщенной кулоновской (k_2) $\tau(\sigma)$ моделей компрессионного сжатия и плоскостного среза в *моренном суглинке* естественной структуры и влажности ($W_l = 50{,}2$; $W_P = 36{,}2$; $J_P = 14{,}0$ %): $\varepsilon(\sigma) = \beta_0\,\sigma/(28{,}0 + 25{,}33\sigma)$; $E_0(\sigma) = \beta_0\,\sigma/\varepsilon = 28{,}0 + 25{,}33\sigma$; $\tau(\sigma) = 0{,}13 + 0{,}60\sigma$. Перед компрессионным испытанием: $\rho_s = 2{,}67$; $\rho = 2{,}05$; $\rho_d = 1{,}79$ г/см³; $W = 14{,}54$ %; σ, τ, E_0 – кг/см²

Чтобы установить связь $\tau(\varepsilon)$, существующую при взаимодействии законов (2) и (21), т.е при условии $h_2 + k_l$, из (21) находим:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^*}{a_0} = \frac{E_{00}[\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^*]}{\beta_0}. \tag{24}$$

Подставляя в (2) вместо σ его значение по (24), имеем (см. табл. 2; рис.2, k_{12}, h_{21}):

$$\tau(\varepsilon) = \xi_4[\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^*]; \tag{25}$$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon^* + \xi_5\tau(\sigma), \tag{26}$$

где

$$\xi_4 = tg\gamma_4 = \frac{tg\varphi}{tg\alpha_0} = \frac{b}{a_0} = \frac{(tg\varphi)E_{00}}{\beta_0}; \tag{27}$$

$$\xi_5 = tg\gamma_5 = \frac{1}{\xi_4} = \frac{tg\alpha_0}{tg\varphi} = \frac{a_0}{b} = \frac{\beta_0}{(tg\varphi)E_{00}} - \tag{28}$$

угловые коэффициенты прямых соответственно (25) и (26);

ε^* – отрезок на оси ε, отсекаемый этими прямыми ($\varepsilon = \varepsilon^*$ при $\tau = 0$). Это значит, что *в условиях взаимодействия законов h_2 и k_1 сопротивляемость грунтов сдвигу $\tau(\sigma)$ линейно увеличивается с ростом их деформации сжатия $\varepsilon(\sigma)$.*

Из (27) следует, что *в несвязных грунтах, подчиняющихся законам k_1 и h_2, коэффициент внутреннего трения $tg\varphi$ прямо пропорционален коэффициенту сжимаемости a_0 и обратно пропорционален модулю общей деформации E_{00}:*

$$b = tg\varphi = \xi_4 a_0 = \xi_4(\beta_0 / E_{00}), \tag{29}$$

где ξ_4 является угловым коэффициентом прямой $tg\varphi = f(a_0)$ и численно $\xi_4 = tg\varphi$ при $\alpha_0 = 1$.

Взаимодействие обобщенных законов Кулона (12) и Гука (21) (см. табл. 2; рис 2, h_2+k_2) также приводит к формированию линейных связей между присущими этим законам прочностными ($\tau_0, tg\varphi_0$) и деформативными ($\varepsilon^*, a_0, E_{00}$) характеристиками грунта. Действительно, подставляя значение $\sigma(\varepsilon)$ из (21), определяемое формулой (24), в (12), имеем (см. табл. 2; рис.2, k_{22}; h_{22}):

$$\tau(\varepsilon) = \tau_{00} + \xi_6\varepsilon(\sigma); \tag{30}$$

$$\varepsilon(\tau) = \xi_7[\tau(\sigma) - \tau_{00}], \tag{31}$$

где

$$\xi_6 = tg\gamma_6 = \frac{tg\varphi_0}{tg\alpha_0} = \frac{b_0}{a_0} = \frac{(tg\varphi_0)E_{00}}{\beta_0}; \tag{32}$$

$$\xi_7 = tg\gamma_7 = \frac{1}{\xi_6} = \frac{tg\alpha_0}{tg\varphi_0} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{\beta_0}{(tg\varphi_0)\mathrm{E}_{00}} - \tag{33}$$

угловые коэффициенты прямых соответственно (30) и (31);

$$\tau_{00} = \tau_0 - \xi_6\varepsilon^* - \tag{34}$$

начальный отрезок на оси τ, отсекаемый прямыми $\tau(\varepsilon)$ и $\varepsilon(\tau)$ (см. рис. 2, k_{22}, h_{22}), графоаналитически зависимость (34) представляет собой линейно убывающую функцию $\tau_{00}(\varepsilon^*)$ с тем же угловым коэффициентом ξ_6.

Из (32) получаем, что *в связных грунтах, подчиняющихся обобщенным законам Гука (h_2) и Кулона (k_2), коэффициент внутреннего трения $tg\varphi_0$ прямо пропорционален коэффициенту относительной сжимаемости a_0 и обратно пропорционален модулю общей деформации E_{00} этих грунтов (см. табл.2; h_2+k_2):*

$$b_0 = tg\varphi_0 = \xi_6 a_0 = \xi_6(\beta_0/\mathrm{E}_{00}), \tag{35}$$

где ξ_6 является угловым коэффициентом прямой $tg\varphi_0 = f(a_0)$ и численно $\xi_6 = tg\varphi_0$ при $a_0 = 1$.

С другой стороны, из (34) следует, что при подчинении грунта обобщенным законам h_2 и k_2 его удельное сцепление по Кулону τ_0 линейно возрастает с ростом «аппроксимационной» деформации ε^*:

$$\tau_0(\varepsilon^*) = \tau_{00} + \xi_6\varepsilon^*, \tag{36}$$

где ξ_6 – угловой коэффициент прямой $\tau_0(\varepsilon^*)$;

τ_{00} – начальный отрезок этой прямой ($\tau_{00} = \tau_0$ при $\varepsilon^* = 0$).

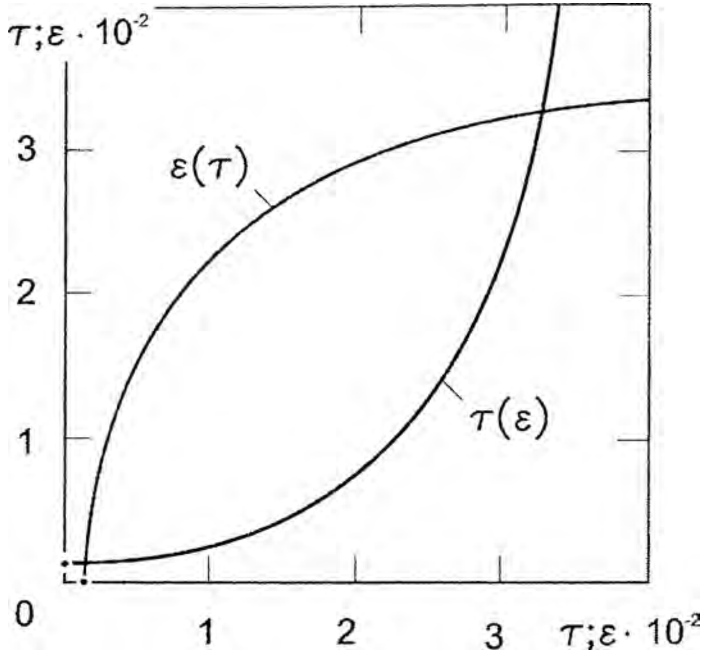

Рис. 5. Аналитические функции связи $\varepsilon(\tau)$ и $\tau(\varepsilon)$ в *моренном суглинке*, компрессионное сжатие $\varepsilon(\sigma)$ и сдвиговая прочность $\tau(\sigma)$ которого подчиняются соответственно нелинейно-затухающей модели (*nd*) и обобщенному закону Кулона $к_2$ (см. рис. 4). Здесь: $\tau(\varepsilon) = 0{,}13 + 16{,}8/(\beta_0/\varepsilon - 25{,}33)$;
$\varepsilon(\tau) = \beta_0/[25{,}33 - 16{,}18/(\tau - 0{,}13)]$; τ – кг/см^2; ε – д.е.

Многочисленные опыты показывают, что копрессионное сжатие дисперсных грунтов, осадка штампов и геооснований часто подчиняются нелинейным моделям, стремящимся к асимптоте. Среди этих моделей преобладает нелинейно-затухающая $\varepsilon(\sigma)$, у которой модуль общей деформации по Гуку $E_0 = \beta_0(\sigma/\varepsilon)$ линейно возрастает с ростом вертикальной нагрузки σ (см. рис. 3, *nd*):

$$E_0(\sigma) = \beta_0\sigma/\varepsilon(\sigma) = E_0^* + a_k\sigma\,, \tag{37}$$

где E_0^* и a_k – аппроксимационные константы прямой $E_0(\sigma)$. Из (37) находим, что нелинейно-затухающая деформативная модель «*nd*» имеет вид

$$\varepsilon(\sigma) = \beta_0\sigma/(E_0^* + a_k\sigma) \tag{38}$$

и обладает пределом (см. рис. 3, модель *nd*)

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_k = \lim_{\sigma\to\infty}\varepsilon(\sigma) = \beta_0/a_k\,. \tag{39}$$

Подчинение геологической среды законам рассеивания, т.е. асимптотического уменьшения в направлении (по пути) распространения напряжений и деформаций, позволяет допустить, что в условиях существования деформативной модели (38) сдвиговая прочность грунтов $\tau(\sigma)$ характеризуется такими огибающими кругов Мора, которые также подчиняются нелинейно-затухающим функциям, стремящимся к асимптоте. Положим, что данные функции идентичны деформативным (38).Тогда по аналогии с (37) для сыпучих грунтов можем записать (см. рис. 3, ns_l):

$$E_\varphi(\sigma) = \sigma/\tau = E_\varphi^* + a_\varphi\sigma = ctg\varphi^* + a_\varphi\sigma\,, \tag{40}$$

где $E_\varphi^* = ctg\varphi^*$ – начальный отрезок оси $E_\varphi(\sigma) = ctg\varphi(\sigma)$ прямой (40);

$$a_\varphi = \frac{E_\varphi(\sigma_2) - E_\varphi(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{E_\varphi(\sigma) - E_\varphi^*}{\sigma} = const - \tag{41}$$

угловой коэффициент этой прямой (см. рис.3, модель ns_l).

Из (40) получаем нелинейно-затухающую модель сдвиговой прочности

$$\tau(\sigma) = \sigma/(E_\varphi^* + a_\varphi\sigma), \tag{42}$$

асимптотой которой является предел

$$\tau_k = \lim_{\sigma\to\infty} \tau(\sigma) = 1/a_\varphi = const\,. \tag{43}$$

Сочетание в грунте нелинейно-затухающих деформативной (38) и сдвиговой (42) моделей приводит к соответствующим взаимосвязям между деформацией сжатия $\varepsilon(\sigma)$ и сдвиговой прочностью сыпучего грунта $\tau(\sigma)$. Чтобы установить их, из (38) и (42) находим общее значение σ:

$$\sigma = \frac{E_0^*\varepsilon}{\beta_0 - a_\kappa\varepsilon} = \frac{E_\varphi^*\tau}{1 - a_\varphi\tau}\,, \tag{44}$$

откуда выводим функциональные связи между сдвиговой прочностью сыпучего грунта и его деформацией сжатия:

$$\tau(\varepsilon) = \frac{E_0^*\varepsilon}{\beta_0 E_\varphi^* + (a_\varphi E_0^* - a_\kappa E_\varphi^*)\varepsilon}\,; \tag{45}$$

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\beta_0 E_\varphi^*\tau}{E_0^* - (a_\varphi E_0^* - a_\kappa E_\varphi^*)\tau}\,. \tag{46}$$

Из (45) и (46) следует, что при подчинении сыпучего грунта нелинейно-затухающим моделям (38) и (42) функциональные связи между сдвиговой прочностью и деформацией сжатия также являются нелинейно-затухающими и обладают соответствующими пределами.

В связных грунтах модель (42) будет иметь вид (см. рис. 3, нелинейная сдвиговая модель ns_2):

$$\tau(\sigma) = \tau_s + \sigma/(E_\varphi^* + a_\varphi\sigma)\,, \tag{47}$$

где τ_s – удельное сцепление грунта, равное $\tau(\sigma)$ при $\sigma = 0$;

$\tau_{k0} = \tau_k + \tau_s$ – асимптота кривой (47).

При подчинении связного грунта моделям *nd* (38) и *ns₂* (47) функции связи между деформацией $\varepsilon(\sigma)$ и сдвиговой прочностью $\tau(\sigma)$ также определяются через общее значение $\sigma = const$

$$f(\varepsilon,\tau) = \frac{E_0^*\varepsilon}{\beta_0 - a_k\varepsilon} = \frac{E_\varphi^*(\tau - \tau_s)}{1 - a_\varphi(\tau - \tau_s)} \tag{48}$$

и характеризуются теми же нелинейно-затухающими моделями, которые присущи исходным уравнениям деформации и сдвига (38) и (47).

Отличительными чертами нелинейно-затухающих моделей деформации (38) и сдвига (42) являются их двухпараметричность и линейная зависимость модулей общей деформации $E_0(\sigma) = \sigma/\varepsilon$ и внутреннего трения $E_\varphi(\sigma) = \sigma/\tau$ от нормального давления σ. Эти свойства моделей (38) и (42) позволяют установить аналитическую связь между деформативными (a_k, E_0^*) и прочностными (a_φ, E_φ^*) параметрами данных моделей. Для решения задачи сначала из (37) и (40) находим общее значение σ:

$$\sigma = \frac{E_0(\sigma) - E_0^*}{a_k} = \frac{E_\varphi(\sigma) - E_\varphi^*}{a_\varphi}, \tag{49}$$

откуда имеем линейную функцию $E_0(E_\varphi)$

$$E_0(E_\varphi) = (E_0^* - \frac{a_k}{a_\varphi}E_\varphi^*) + \frac{a_k}{a_\varphi}E_\varphi = E_0^0 + \frac{a_k}{a_\varphi}E_\varphi, \tag{50}$$

где

$$E_0^0 = E_0^* - (a_k/a_\varphi)E_\varphi^* - \tag{51}$$

начальный отрезок на оси E_0 (при $E_\varphi = 0$), отсекаемый прямой $E_0(E_\varphi)$;

a_k/a_φ – угловой коэффициент этой прямой.

При геотехническом проектировании нелинейная сдвиговая модель «ns_l» (42) аппроксимируется обобщенным законом Кулона «k_2». В этом случае взаимодействие моделей нелинейной деформативной «nd» (38) и линейной кулоновской «k_2» (12) также приводит к нелинейным соотношениям между сдвиговой прочностью грунта τ и его деформацией уплотнения ε. Чтобы убедиться в этом, из (12) и (38) найдем общее значение нормального давления σ:

$$\sigma = \frac{\tau - \tau_0}{b_0} = \frac{E_0^* \varepsilon}{\beta_0 - a_k \varepsilon}, \tag{52}$$

откуда имеем искомые связи (рис.4,5):

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 + \frac{b_0 E_0^* \varepsilon}{\beta_0 - a_k \varepsilon}; \tag{53}$$

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\beta_0(\tau - \tau_0)}{b_0 E_0^* + a_k(\tau - \tau_0)}. \tag{54}$$

Определим взаимосвязи между механическими характеристиками грунта при подчинении его деформативной модели nd (38) и сдвиговой кулоновской k2. Для этого из (12) и (37) находим равенство

$$(\tau - \tau_0)/b_0 = (E_0 - E_0^*)/a_k, \tag{55}$$

из которого следует, что при подчинении грунта формуле «$nd + k_2$» модуль общей деформации по Гуку $E_0(\sigma) = \sigma/\varepsilon$ линейно возрастает с ростом сдвиговой прочности грунта τ:

$$E_0(\tau) = (E_0^* - \frac{a_k}{b_0}\tau_0) + \frac{a_k}{b_0}\tau = \Delta E_\tau + \frac{a_k}{b_0}\tau, \tag{56}$$

где $\Delta E_\tau = E_0^* - a_k \tau_0 / b_0$ – начальный отрезок на оси E_0 прямой $E_0(\tau)$; a_k / b_0 – угловой коэффициент этой прямой.

Выводы: 1. Взаимодействие линейных законов деформации (h_1, h_2) и сдвига (k_1, k_2) во всех 4-х сочетаниях (см. табл. 2) является строго определенным и приводит к двум основным закономерностям. Первая из них гласит: при действии формулы $(h_1;h_2)+(k_1;k_2)$ во всех сочетаниях ее законов сдвиговая прочность грунтов τ линейно возрастает с ростом их уплотняющей деформации ε; при этом только для условия «h_1+k_1» данная линейность приобретает аналитический вид исходных законов (h_1;k_1) и становится прямо пропорциональной (см. рис. 1; табл. 2).

Вторая закономерность, порождаемая действием линейных законов формулы $(h_1;h_2)+(k_1;k_2)$, сводится к правилу: результирующие функции связи между прочностными и деформативными характеристиками грунта ($\tau(\varepsilon), \varepsilon(\tau), tg\varphi(a), tg\varphi_0(a), tg\varphi(a_0), tg\varphi_0(a_0), \tau_0(\varepsilon^*)$ и др.) также являются линейными. Исключение составляют, как следует из (9), (20), (29) и (35), модули общей деформации E_0 и E_{00}, находящиеся в обратно пропорциональной зависимости от коэффициентов внутреннего трения грунта $tg\varphi$ и $tg\varphi_0$:

$$E_0=\frac{\beta_0\xi}{tg\varphi}=\frac{\beta_0\xi_2}{tg\varphi_0};\ \ E_{00}=\frac{\beta_0\xi_4}{tg\varphi}=\frac{\beta_0\xi_6}{tg\varphi_0}. \tag{57}$$

2. При подчинении грунтов нелинейно-затухающим моделям деформации и сдвига (типа “*nd*” (38), “ns_1” (42) и “ns_2” (47)) аналитические связи между сдвиговой прочностью τ и деформацией уплотнения ε также характеризуются нелинейно-затухающими функциями, вытекающими из исходных уравнений деформации и сдвига. В этих случаях соотношения между деформативными и прочностными характеристиками грунтов зависят от параметричности и других свойств исходных моделей $\varepsilon(\sigma)$ и $\tau(\sigma)$ и могут быть как линейными, так и нелинейными.

3. Полученные зависимости справедливы при условии, что грунт подчиняется только одному из линейных (h_1, h_2, k_1, k_2) или нелинейных (*nd*, ns_1, ns_2 и т.д.) законов деформации и сдвига. Однако в природных условиях из-за различной увлажненности (и соответственно фазового состояния [2, 4]) и других факторов (прежде всего

несовершенства строительной и гранулометрических классификаций) один и тот же грунт или ИГЭ может проявлять «непостоянство» и подчиняться различным линейным и нелинейным моделям деформации и сдвига. Такие «взаимодействия» сжимающих и сдвигающих напряжений отличаются неустойчивыми связями и требуют дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крошнер, И.П. Графоаналитическое представление линейной фазовой модели дисперсных грунтов / И.П. Крошнер // Теоретические и практические проблемы геотехники: межвузовский тематический сборник трудов. СПбГАСУ. – СПб, 2005. – С. 161–169.

2. Крошнер, И.П. Теория фазовых моделей грунтов Беларуси / И.П. Крошнер, П.Н. Костюкович // Будаўніцтва. Строительство. Construction. – Минск. – 2002. – № 1-2. – с. 101–122.

3. Крошнер, И.П. Определение прочности грунтов по их сопротивлению стесненному сдвигу / И.П. Крошнер, П.Н. Костюкович // Городские агломерации на оползневых территориях: материалы Международ. научн. конф. ВолгГАСА. – Волгоград, 2003. – Ч. 1. – С. 167–172.

4. Маслов, Н.Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии / Маслов Н.Н. – М.: Высшая школа, 1968. – 630 с.

5. Механика грунтов / под ред. Б.И. Далматова. – СПб., 2000. – Ч. 1. Основы геотехники. – 204 с.