УДК 539:374.002.62

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук; К.А. ГОРЕЛЫЙ, канд. техн. наук;
С.В. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук; А.В. САХОНЕНКО
Белорусский национальный технический университет

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЕПРЕГЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПРОЦЕССЕ НАМОТКИ

Рассмотрена намотка цилиндрической оболочки тканью, пропитанной связующим. Натяжение ткани создает в материале оболочки напряженное состояние. Оно найдено с учетом того, что связующее находится в жидком состоянии. В силу того, что в формулах присутствует трансверсальный модуль упругости оболочки, необходимость в его определении становится очевидной. Для нахождения величины модуля предложен экспериментальный метод исследования.

Ключевые слова: *композит, ткань, препрег, напряжение, константы упругости, деформация*

В процессе намотки цилиндрических оболочек препрегами из тканого материала связующее находится в жидком состоянии с относительно большой вязкостью. Наружный слой прикатывается валом, имеющим температуру 110 °С. При этом технология намотки построена так, что фильтрация связующего происходит только во внешних слоях ткани. Это обеспечивает более глубокую пропитку наружных слоев как между слоями ткани, так и внутри комплексных нитей, которые состоят из более чем 1000 элементарных нитей. Внутренние слои ткани после намотки имеют температуру не менее 60 °С.

Армирующий материал в результате намотки находится в растянутом состоянии, а связующее — в сжатом. Наружные слои ткани несколько уменьшают первоначальное растяжение внутренних слоев армирующего материала, а в связующем давление сжатия увеличивается. Так как связующее находится в жидком состоянии, то давление сжатия в нем имеет одинаковую величину в разных направлениях. Напомним, что технология намотки построена так, что при намотке фильтрация связующего во внутренних слоях наружу практически отсутствует. Иначе это могло бы привести к уменьшению связующего в препреге и, как результат, к уменьшению механических свойств готового материала оболочки после полимеризации связующего.

Связующее находится между слоями ткани, вокруг и внутри комплексных нитей. Для простоты исследования армирующий материал и связующее в препреге можно представить как совокупность тонких колец. Связующее в каждом кольце испытывает всестороннее сжатие. При этом размеры такого кольца в осевом и кольцевом направлениях практически не меняются.

Рассмотрим условия равновесия и совместности деформаций слоев наполнителя и связующего после намотки. Поставленную задачу будем решать с помощью уравнений, которые получены из условий равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего [1–3], когда связующее находится в жидком состоянии.

В результате с учетом принятых гипотез имеем:

$$\begin{gathered}\varepsilon_r = m\varepsilon_{rc} + (1-m)\varepsilon_{rH};\\ \sigma_\theta = m\sigma_{\theta c} + (1-m)\sigma_{\theta H};\\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta H};\\ \sigma_{rH} = \sigma_r = \sigma_{rc} = \sigma_{\theta c}.\end{gathered} \tag{1}$$

В этих формулах ε_r — усредненная деформация препрега в радиальном направлении; σ_r и σ_θ — усредненные напряжения в радиальном и кольцевом направлениях соответственно; ε_{rc} и ε_{rH} — деформации связующего и наполнителя в радиальном направлении; $\varepsilon_{\theta c}$ — деформация связующего в осевом направлении; σ_{rH} и $\sigma_{\theta H}$ — напряжения в наполнителе в радиальном и кольцевом направлениях; m — относительное содержание связующего в препреге.

Предполагается, что материал наполнителя (нити) является изотропным и подчиняется закону Гука

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rH} &= \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{rH} - \nu_H\sigma_{\theta H}\right) = \frac{1}{E_H}\left(\sigma_r - \nu_H\sigma_{\theta H}\right);\\ \varepsilon_{\theta H} &= \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{\theta H} - \nu_H\sigma_{rH}\right) = \frac{1}{E_H}\left(\sigma_{\theta H} - \nu_H\sigma_r\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь E_H и ν_H — модуль упругости и коэффициент Пуассона наполнителя.

Для связующего, представляющего собой двухкомпонентную систему из полимерной массы и воздушных включений (пузырьки воздуха и области непропитки), закон Гука в условиях сжатия записывается в виде

$$\varepsilon_{rc} = \varepsilon_{\theta c} = \frac{1-\nu_c}{E_c}\sigma_r. \tag{3}$$

где E_c и ν_c — модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего, находящегося в условиях сжатия; зависимости (3) получены с учетом (1).

Связь между усредненными напряжениями и деформациями имеет вид, характерный для ортотропного тела [3, 4]

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta r}\frac{\sigma_r}{E_r};\\ \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{r\theta}\frac{\sigma_\theta}{E_\theta}.\end{aligned} \tag{4}$$

К уравнениям (1)–(4) следует добавить уравнение равновесия [2]

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial_r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0. \tag{5}$$

Путем взаимной подстановки зависимостей (1)–(4) в первое уравнение из (1) получим

$$b_{11}\sigma_r + b_{12}\sigma_\theta = 0, \tag{6}$$

где

$$b_{11} = \frac{1}{E_r} - \frac{m(1-\nu_c)}{E_c} - \frac{(1-m)(1-\nu_H^2)}{E_H} - \frac{(1-m)\nu_H\nu_{\theta r}}{E_r};$$

$$b_{12} = \frac{(1-m)\nu_H - \nu_{r\theta}}{E_\theta}.$$

Аналогично второе уравнение из (1) превращается в

$$b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta = 0, \qquad (7)$$

где

$$b_{21} = m - (1-m)\nu_{\theta r}\frac{E_H}{E_r} + \nu_H;$$

$$b_{22} = (1-m)\frac{E_H}{E_\theta} - 1.$$

Таким образом, решение системы уравнений (1)–(5) сводится к решению следующей системы

$$\begin{aligned} &b_{11}\sigma_r + b_{12}\sigma_\theta = 0;\\ &b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta = 0;\\ &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Первые два уравнения из (8) представляют собой линейную зависимость с нулевой правой частью. Решение возможно только в четырех случаях, когда

$$\frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{b_{12}}{b_{22}},$$

$$b_{11} = b_{12} = 0,\ \ b_{21} \neq 0,\ \ b_{22} \neq 0,$$

$$b_{21} = b_{22} = 0,\ \ b_{11} \neq 0,\ \ b_{22} \neq 0,$$

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0.$$

Первые три случая сводятся к тому, что

$$\sigma_\theta = -\frac{b_{11}}{b_{12}}\sigma_r \quad \text{или} \quad \sigma_\theta = -\frac{b_{21}}{b_{22}}\sigma_r.$$

Подставим это в уравнение равновесия (третье уравнение из (8)). В результате получим

$$\sigma_r' + k_1\frac{\sigma_r}{r} = 0,$$

где

$$k_1 = 1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \quad \text{или} \quad k_1 = 1 + \frac{b_{21}}{b_{22}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_r = c \cdot r^{-k_1};\\ &\sigma_\theta = -(k_1 - 1)c \cdot r^{-k_1}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Так как оправку, на которую наматывается ткань, можно считать абсолютно жесткой, то должно выполняться следующее равенство

$$u\big|_{r=a} = 0. \qquad (10)$$

Из (4) найдем

$$\begin{aligned} &\sigma_r = E_r'(\varepsilon_r + \nu_{r\theta}\varepsilon_\theta);\\ &\sigma_\theta = E_\theta'(\varepsilon_\theta + \nu_{\theta r}\varepsilon_r), \end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$E_r' = \frac{E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}};\quad E_\theta' = \frac{E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}};\quad 1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r} \neq 0.$$

В условиях симметричной деформации зависимости между радиальным перемещением u и компонентами деформации ε_r и ε_θ имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{a}\frac{du}{dp};\quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{ap};\quad \rho = \frac{r}{a}.$$

В результате с учетом (10) и (12)

$$\varepsilon_\theta\big|_{r=a} = 0.$$

Принимая во внимание (9) и (12) получим, что $c = 0$. Отсюда следует, что напряжения σ_r и σ_θ тоже равны нулю. Это приводит к нулевому напряженному состоянию и противоречит условиям задачи.

Рассмотрим теперь четвертый случай. В развернутом виде он представляется следующим образом

$$\begin{aligned} &E_r = \frac{E_c}{m(1-\nu_c)};\quad \nu_{r\theta} = (1-m)\nu_H;\\ &\frac{\nu_{\theta r}}{E_r} = \frac{m+\nu_H}{E_\theta};\quad E_\theta = (1-m)E_H. \end{aligned} \qquad (13)$$

Таким образом, в зависимостях (8) с учетом (13) первые два уравнения удовлетворяются тождественно. В таком случае воспользуемся преставлениями (12). Тогда зависимости (11) должны удовлетворять уравнению равновесия (8). В результате получим

$$u'' + \frac{u'}{\rho}\left(\nu_{r\theta} + 1 - \frac{E_\theta}{E_r}\nu_{\theta r}\right) - \frac{E_\theta}{E_r}\frac{u}{\rho^2} = 0.$$

С учетом (13) и предположения о том, что $E_r << E_\theta$ [2], предыдущее уравнение можно записать в виде

$$u'' - \beta^2\frac{u}{\rho^2} = 0, \qquad (14)$$

где

$$\beta^2 = \frac{E_\theta}{E_r}.$$

Решение уравнения (14) представляется равенством

$$u = c_1\rho^\beta + c_2\rho^{-\beta}. \qquad (15)$$

Для примера рассмотрим напряженное состояние цилиндра с внутренним радиусом a и наружным b, намотанного тканью на абсолютно жесткую оправку. Напряжение в наружном слое ткани равно σ_0. Определим вначале напряженное состояние препрега в рассматриваемом цилиндре от действия нагрузки в виде натяжения последнего слоя ткани. Для решения последней задачи воспользуемся найденной зависимостью для радиального перемещения u, представленного зависимостью (15).

Постоянные c_1 и c_2 находим из условий

$$\Delta u_r\big|_{r=a} = 0;\quad \sigma_r\big|_{r=b} = -\frac{T}{R} = -\frac{\sigma_0 h}{R},$$

где h — толщина слоя ткани.

Первое граничное условие дает следующую зависимость

$$c_1 + c_2 = 0. \qquad (16)$$

Путем подстановки в (12) находим ε_r и ε_θ

$$\varepsilon_r = \frac{1}{a}\left(c_1\beta\rho^{\beta-1} - c_2\beta\rho^{-\beta-1}\right);$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a\rho}\left(c_1\rho^\beta - c_2\rho^{-\beta}\right).$$

В таком случае из (11) можно найти σ_r и σ_0. В результате с учетом (16) найдем

$$\sigma_r = \frac{c_1 E_r}{a\left(1 - v_{r\theta} v_{\theta r}\right)} \left[\left(\beta + v_{r\theta}\right) \rho^{\beta-1} + \left(\beta - v_{r\theta}\right) \rho^{-\beta-1} \right];$$

$$\sigma_\theta = \frac{c_1 E_\theta}{a\left(1 - v_{r\theta} v_{\theta r}\right)} \left[\left(v_{\theta r}\beta + 1\right) \rho^{\beta-1} + \left(v_{\theta r}\beta - 1\right) \rho^{-\beta-1} \right].$$

Учитывая, что для препрегов $\beta >> v_{r\theta}$ и $v_{r\theta} v_{\theta r} << 1$, предыдущие равенства можно упростить

$$\sigma_r = \frac{c_1 E_r \beta}{a\rho}\left(\rho^{\beta} + \rho^{-\beta}\right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{c_1 E_\theta}{a\rho}\left(\rho^{\beta} - \rho^{-\beta}\right).$$

Удовлетворение второму граничному условию позволяет найти

$$c_1 = -\frac{\sigma_0 h}{E_r \beta\left(\rho_0^{\beta} + \rho_0^{-\beta}\right)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_0 h}{E_r \beta} \cdot \frac{\rho^{\beta} - \rho^{-\beta}}{\rho_0^{\beta} + \rho_0^{-\beta}}; \\ \sigma_r &= -\frac{h\sigma_0}{a\rho} \cdot \frac{\rho^{\beta} + \rho^{-\beta}}{\rho_0^{\beta} + \rho_0^{-\beta}}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{\sigma_0 h \beta}{a\rho} \cdot \frac{\rho^{\beta} - \rho^{-\beta}}{\rho_0^{\beta} + \rho_0^{-\beta}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\rho_0 = \frac{b}{a}.$$

Следует учесть, что натяжение при намотке ткани T_0 определяется формулой

$$T_0 = \sigma_0 h.$$

На этом основании напряжения σ_r и σ_θ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{T}{R} \cdot \frac{\rho^{\beta-1} - \rho^{-\beta-1}}{\rho_0^{\beta-1} + \rho_0^{-\beta-1}}; \\ \sigma_\theta &= -\beta \frac{T}{R} \cdot \frac{\rho^{\beta-1} - \rho^{-\beta-1}}{\rho_0^{\beta-1} + \rho_0^{-\beta-1}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Если над препрегом наружного радиуса b намотано еще

$$n(R) = (R - b) / h$$

витков, то путем суммирования получим

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n} &= -\frac{1}{R}\left(\rho^{\beta-1} + \rho^{-\beta-1}\right) \sum_{j=0}^{n(R)} \frac{T(r_j)}{\rho_j^{\beta-1} - \rho_j^{-\beta-1}}; \\ \sigma_{\theta,n} &= \frac{T(R)}{h} - \frac{\beta}{R}\left(\rho^{\beta-1} - \rho^{-\beta-1}\right) \sum_{j=0}^{n(R)} \frac{T(r_j)}{\rho_j^{\beta-1} + \rho_j^{-\beta-1}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $r_j = jh + r,\ \rho_j = \dfrac{r_j}{a}$.

Необходимо обратить внимание на то, что в формулах (17) в качестве параметров присутствуют модули упругости E_θ, E_H и E_r.

Усредненный модуль упругости E_θ можно определить через модуль упругости наполнителя E_H по формуле (13)

$$E_\theta = (1 - m) E_H.$$

В отношении модуля упругости E_r необходимо проводить специальные экспериментальные исследования. Дело в том, что модуль E_r определяется по формуле (13) через модуль связующего E_c. Однако связующее в составе полимерной массы в качестве компоненты содержит некоторое количество воздуха. Это сильно отражается на величине модуля E_c. Состав воздуха по мере прохождения полимеризации меняется. Таким образом, меняется и величина E_c. В результате никаким другим способом, кроме экспериментальных исследований, определить величину E_c невозможно.

Методика проведения таких исследований может быть представлена следующим образом. Воспользуемся зависимостью для радиальных перемещений.

Полагая в (17) $r = b$, $u = \Delta u_R$, представим это соотношение в виде

$$\beta = \frac{E_\theta \Delta u_R}{T_0} \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta} + 1}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta} - 1}. \tag{20}$$

Уравнение (20) следует использовать для нахождения параметра β, если путем экспериментальных исследований будут определены величины E_θ, T_0 и Δu_R.

Решение удобно проводить итерационным методом Зейделя. Для этого (20) представим в виде

$$\beta_{i+1} = -\frac{E_\theta \Delta u_R}{T_0} \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta_i} + 1}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta_i} - 1}. \tag{21}$$

Начальная точка такого процесса вычисляется по формуле

$$\beta_0 = -\frac{E_\theta \Delta u_R}{T_0}.$$

Вычисления по формуле (21) заканчиваются, если

$$\left|\beta_{i+1} - \beta_i\right| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность проведения расчетов.

Если

$$A = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta} + 1}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\beta} - 1} < 1 + \varepsilon_0, \tag{22}$$

где ε_0 — требуемая точность вычисления, то величину A можно положить равной единице. В таком случае параметр β будет равен β_0. Из (22) найдем

$$2\beta_0 > \frac{\ln\left(1 + \dfrac{2}{\varepsilon_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}.$$

Выполнение последнего неравенства позволяет положить β равным β_0.

После нахождения β модуль упругости E_r находится путем вычисления по формуле

$$E_r = \beta^2 E_\theta. \tag{23}$$

Характеристики закона Гука, E_r, E_θ, vr_θ, $v_{\theta r}$ (23) для цилиндрической оболочки из препрега имеют другие функциональные зависимости в отличие от материала оболочки, находящегося в твердом упругом состоянии, т. к. для твердого упругого тела они имеют вид [3]

$$E_\theta = (1-m)E_H + mE_c; \quad E_r = \frac{E_c}{m(1-\nu_c^2)};$$

$$\nu_{r\theta} = (1-m)\nu_H + m\nu_c; \quad \nu_{\theta r} = \frac{E_r}{E_\theta}\nu_{r\theta}.$$

Вывод. Разработан метод расчета компонент напряжений в цилиндрической оболочке, образованной намоткой ткани, пропитанной связующим. Напряженное состояние в препреге возникает вследствие натяжения ткани. Принято, что связующее находится в жидком состоянии соответствующей вязкости. Поскольку в формулы для расчета напряжений входит трансверсальный модуль упругости материала оболочки, то его определение рекомендовано выполнить на основе описанного экспериментального исследования.

Список литературы

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. — М., 1950. — 483 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 т. / под ред. И.А. Биргера. — М.: Машиностроение, 1968. — Т. 2. — С. 215–225.
3. Лехницкий, С.Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай упругого тела с произвольной анизотропией / С.Г. Лехницкий // Уч. записки Саратовского гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 1938. — Т. 1. Вып. 2. — С. 154–157.

Vasilevich Yu.V., Gorely K.A., Sakhonenko S.V., Sakhonenko A.V.

A calculation of tensions in preprege cylindrical shell resulted in the process of winding with fabric

Winding of the cylindrical shell with fabric saturated with binding substance is studied. The tension of the fabric creates the tense state in material of the shell, which is calculated taking into account that the binding substance is liquid. By the fact that there is the transversal module of resilience of the shell in formulas, the necessity to determine it becomes obvious. The experimental method of research to determine the size of the module is proposed.

Поступил в редакцию 01.08.2016.