

Ольга Леонидовна ВЕРБИЦКАЯ,  
 ассистент кафедры  
 "Сопротивление материалов  
 и теория упругости"  
 Белорусского национального  
 технического университета

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ ПОЛОЖЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ НОРМ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

### NUMERICAL MODELLING OF REINFORCED CONCRETE SLABS IN ACCORDANCE WITH THE PRINCIPLES OF THE BUILDING CODES OF THE REPUBLIC OF BELARUS

В статье приведены результаты исследования зависимости жесткости сечения железобетонной плиты на изгиб от величины изгибающего момента с учетом положений СНБ 5.03.01-02 "Бетонные и железобетонные конструкции". Предложена функция для аппроксимации жесткости плиты.

Рассмотрен пример расчета прямоугольной железобетонной плиты с отверстием методом конечных элементов, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

This article presents the analysis results of the relationship between the flexural rigidity of the reinforced concrete slab section and the value of the bending moment taking into account the principles of SNB 5.03.01-02 "Concrete and Reinforced Concrete Structures". The rigid slab approximation function has been proposed.

An example of designing a rectangular reinforced concrete slab with a hole under uniformly distributed load has been given using a method of finite elements.

#### ВВЕДЕНИЕ

Основным материалом в строительстве является железобетон, который можно рассматривать как композитный материал, состоящий из бетона и стальной арматуры, значительно отличающихся по своим механическим свойствам. Кроме того, для железобетона характерна нелинейность деформирования, а в связи с этим — появляющаяся анизотропия плиты.

В проведенных ранее исследованиях предлагаются различные методы расчета железобетонных плит. Этому вопросу посвящены работы ряда авторов: Н. Н. Баланухина [1]; В. П. Леньшина [2]; В. И. Ершова [3]; Р. М. Киракосьяна [4]; А. А. Трещева и А. И. Артемова [5]; Н. Н. Шапошникова, В. А. Ожерельева и В. С. Наумова [6]; А. М. Проценко и М. А. Яхно [7]; О. В. Пениной [8]; В. Н. Шлянникова [и др.] [9]; В. Г. Теличко и А. А. Трещева [10].

По результатам анализа опубликованных работ, посвященных расчету пластин (плит) с учетом нелинейности закона деформирования материала, можно выделить следующие недостатки.

Во-первых, предлагаемые методы расчета пластин (плит) с учетом нелинейного деформирования материала относятся к частным случаям — это пластины определенной формы, определенным образом закрепленные, с принятым законом деформирования в виде элементарных функций.

Во-вторых, используется упрощенная, не всегда отвечающая реальному поведению конструкции, модель. Например, использование гипотезы ломаной для описания деформированного состояния пластины.

В-третьих, проведенные исследования носят теоретический характер и не всегда учитывают требования нормативных документов, что делает невозможным ис-

пользование результатов исследований для проектирования строительных конструкций.

Поэтому такие исследования решают лишь часть проблемы расчета железобетонных плит. Для эффективного же расчета следует учитывать реальные свойства материалов и, прежде всего, нелинейность закона деформирования.

Целью исследования, проведенного автором, явилась разработка численной модели расчета железобетонных плит с учетом положений СНБ 5.03.01 "Бетонные и железобетонные конструкции" [11].

#### АППРОКСИМАЦИЯ ЗАВИСИМОСТИ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ ОТ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Важным фактором, определяющим прочность плиты, наряду с физической нелинейностью материала является совместность деформирования арматуры и бетона, что связано с такими явлениями как трещинообразование и сцепление. Для статически неопределимых плит учет перечисленных факторов усложняется перераспределением внутренних сил между бетоном и арматурой, а также в различных сечениях самой плиты.

В результате деформации первоначально изотропной плиты за счет нелинейности диаграммы деформирования железобетона в окрестности произвольной точки жесткости по-разному ориентированных поперечных сечений оказываются разными. Поэтому материал в окрестности некоторой точки следует рассматривать как анизотропный (ортотропный). При этом в разных сечениях плиты коэффициент анизотропии будет зависеть от отношения ее кривизны по ортогональным направлениям. Таким образом, причиной появления анизотропии

являются не только свойства железобетона, но и его состояние.

В соответствии с рекомендациями [11] изгибная жесткость плиты с учетом и без учета образования трещин вычисляется по формуле

$$B = \begin{cases} \frac{E_{c,eff} \cdot J_{II}}{1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{sd}}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right)}, & M_{sd} > M_{cr}; \\ E_{c,eff} \cdot J_I, & M_{sd} \leq M_{cr}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_{c,eff}$  — эффективный модуль упругости бетона ( $E_{c,eff} = E_{cm}$ );  
 $E_{cm}$  — модуль упругости бетона;  
 $\beta_1$  — коэффициент, принимаемый согласно указаниям [11];  
 $\beta_2$  — коэффициент, учитывающий длительность действия нагрузки;  
 $M_{cr}$  — момент образования трещин;  
 $M_{sd}$  — расчетный изгибающий момент, вызванный действием нагрузки и установленный в результате расчета плиты;  
 $I_I, I_{II}$  — моменты инерции сечения, соответственно, без трещин и с трещинами.

Как показали результаты расчета по программе STURM, зависимость жесткости железобетонной плиты от изгибающего момента, рекомендуемая [11], имеет нелинейный характер и разрыв (рис. 1). Жесткость плиты при изгибающих моментах, меньших  $M_{cr}$ , не изменяется как у линейно деформируемых тел, а при моментах, больших чем  $M_{cr}$ , изменяется по гиперболическому закону. При условии  $M_{sd} = M_{cr}$  наблюдается разрыв.

Наличие разрыва в законе деформирования железобетонного элемента создает практически непреодолимые сложности при расчете конструкций, связанные с невозможностью обеспечения сходимости решения нелинейной задачи. Поэтому автор предлагает, не нарушая требований [11], представить функцию аппроксимации жесткости железобетонного элемента приближенно. При этом аппроксимирующая функция не должна иметь разрывов:

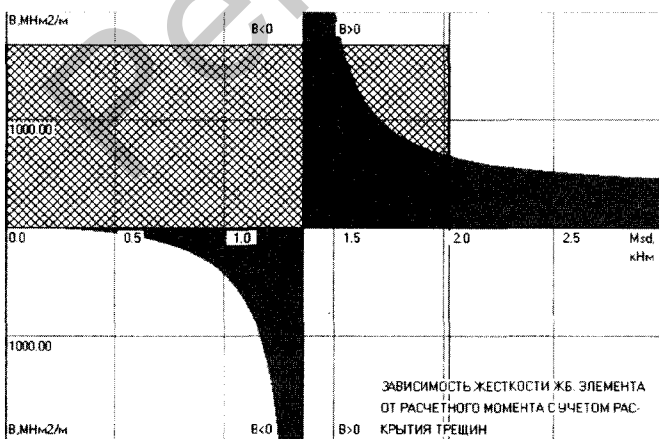


Рис. 1. Зависимость жесткости сечения железобетонной плиты от изгибающего момента, полученная программой STURM

$$B(M) = \begin{cases} k_0 + k_1 \cdot M + k_2 \cdot M^2 + k_3 \cdot M^3 & \text{при } M \leq M_{cr}; \\ \frac{E_{cm} \cdot J_{II}}{1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right)} & \text{при } M > M_{cr}. \end{cases} \quad (2)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $k_0, k_1, k_2, k_3$  найдем производную функции жесткости  $B(M)$ , определенную на интервале  $(M_{cr} \dots \infty)$ . Для этого запишем функцию в виде:

$$B(M) = \frac{a}{1 - d \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2} = \frac{aM^2}{M^2 - dM_{cr}^2} = \frac{aM^2}{M^2 + b}, \quad (3)$$

где  $a = E_{cm} \cdot J_{II}$ ,

$$b = -\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot M_{cr}^2.$$

Представим функцию жесткости как частное от деления. Обозначим:

$$u = aM^2, \quad v = M^2 + b, \quad (4)$$

$$\text{тогда } B = \frac{u}{v}. \quad (5)$$

Производные от числителя и знаменателя выражения (5) соответственно равны:

$$u' = 2aM, \quad v' = 2M. \quad (6)$$

Отсюда получим выражение для производной:

$$\frac{dB}{dM} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(M^2 + b) \cdot 2aM - aM^2 \cdot 2M}{(M^2 + b)^2} = \frac{2abM}{(M^2 + b)^2}. \quad (7)$$

Подставим  $a$  и  $b$  из уравнения (3) в выражение (7). В результате получим:

$$\frac{dB}{dM} = \frac{2E_{cm} \cdot J_{II} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot M_{cr}^2 \cdot M}{\left[M^2 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot M_{cr}^2\right]^2}. \quad (8)$$

Найдем значение производной (8) при условии  $M = M_{cr}$ :

$$\frac{dB}{dM} = \frac{2E_{cm} \cdot J_{II} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot M_{cr}^2 \cdot M}{\left[M_{cr}^2 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot M_{cr}^2\right]^2} = \frac{2\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot E_{cm} \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right) \cdot J_{II}}{\left[1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I}\right)\right]^2} \cdot M_{cr}. \quad (9)$$

Для сокращения записи производную обозначим буквой  $C$ .

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2, k_3$  закона аппроксимации (2), описывающего жесткость на отрезке  $[0 \dots M_{cr}]$ , определим из условий:

1) производная при нулевом значении момента должна быть равна нулю:

$$\left(\frac{dB}{dM}\right)_{M=0} = (k_0 + k_1 \cdot M + k_2 \cdot M^2 + k_3 \cdot M^3)'_{M=0} =$$

$$= (k_1 + 2k_2 \cdot M + 3k_3 \cdot M^2)'_{M=0} = 0, \quad k_1 = 0;$$

2) значение жесткости при нулевом изгибающем моменте равно  $B_0$ :

$$B_{M=0} = (k_0 + k_1 \cdot M + k_2 \cdot M^2 + k_3 \cdot M^3)_{M=0} = B_0,$$

$$k_0 = B_0;$$

3) жесткость при моменте образования трещин  $M_{cr}$  равна  $B_{cr}$ :

$$B_{M=M_{cr}} = B_0 + k_2 \cdot M_{cr}^2 + k_3 \cdot M_{cr}^3 = B_{cr};$$

4) производные обеих функций, аппроксимирующих жесткость плиты, при  $M = M_{cr}$  должны быть равными:

$$\left(\frac{dB}{dM}\right)_{M=M_{cr}} = 2k_2 \cdot M_{cr} + 3k_3 \cdot M_{cr}^2 = C.$$

Условия (12) и (13) образуют систему уравнений относительно неизвестных  $k_2$  и  $k_3$ :

$$\begin{cases} M_{cr}^2 \cdot k_2 + M_{cr}^3 \cdot k_3 = B_{cr} - B_0, \\ 2M_{cr} \cdot k_2 + 3M_{cr}^2 \cdot k_3 = C. \end{cases} \quad (14)$$

Решим систему уравнений (14), используя метод Крамера. Выразим главный и дополнительные определители системы (14):

$$D_0 = \begin{vmatrix} M_{cr}^2 & M_{cr}^3 \\ 2M_{cr} & 3M_{cr}^2 \end{vmatrix} = 3M_{cr}^4 - 2M_{cr}^4 = M_{cr}^4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} B_{cr} - B_0 & M_{cr}^3 \\ C & 3M_{cr}^2 \end{vmatrix} = 3M_{cr}^2 \cdot (B_{cr} - B_0) - M_{cr}^3 \cdot C,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} M_{cr}^2 & B_{cr} - B_0 \\ 2M_{cr} & C \end{vmatrix} = M_{cr}^2 \cdot C - 2M_{cr} \cdot (B_{cr} - B_0).$$

Затем найдем коэффициенты:

$$k_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{3M_{cr}^2 \cdot (B_{cr} - B_0) - M_{cr}^3 \cdot C}{M_{cr}^4} = \frac{3(B_{cr} - B_0) - M_{cr} \cdot C}{M_{cr}^2},$$

$$k_3 = \frac{D_3}{D_0} = \frac{M_{cr}^2 \cdot C - 2M_{cr} \cdot (B_{cr} - B_0)}{M_{cr}^4} = \frac{M_{cr} \cdot C - 2(B_{cr} - B_0)}{M_{cr}^3}.$$

Подставим найденные коэффициенты из уравнений (18) и (19) в выражение для жесткости плиты (2), аппроксимирующее закон изменения жесткости на отрезке  $[0 \dots M_{cr}]$ , и получим:

$$B = B_0 + \frac{3(B_{cr} - B_0) - M_{cr} \cdot C}{M_{cr}^2} \cdot M^2 + \frac{M_{cr} \cdot C - 2(B_{cr} - B_0)}{M_{cr}^3} \cdot M^3, \quad (20)$$

где  $B_0$  — жесткость при нулевом изгибающем моменте;

$B_{cr}$  — жесткость при моменте, равном моменту образования трещин;

$M_{cr}$  — изгибающий момент, соответствующий образованию трещин;

$C$  — производная функции жесткости на интервале  $M \geq M_{cr}$  (9);

$M$  — расчетный изгибающий момент в сечении плиты от нагрузки, обозначаемый в [11] как  $M_{sc}$ .

Составлена процедура программы *STURM* и определены жесткости железобетонной плиты при различных значениях изгибающего момента (рис. 2). В результате анализа установлено, что принятые функции аппроксимации обеспечивают непрерывность закона изменения жесткости. При неограниченном увеличении изгибающего момента жесткость сечения железобетонной плиты уменьшается, экспоненциально стремясь к некоторому пределу.

### ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрен пример расчета прямоугольной железобетонной плиты с отверстием, загруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой. Плита шарнирно опирается по своему контуру. Расчет выполнен методом конечных элементов [12, 13] с помощью авторской программы *STURM*. Для расчета были приняты следующие исходные данные.

Железобетонная плита размерами  $l \cdot b = 5,6 \cdot 5,6$  м, армированная сеткой. В средней части плиты имеется отверстие размерами  $2,4 \times 2,4$  м. Модуль упругости арматуры  $E_s = 200$  ГПа; средняя прочность бетона

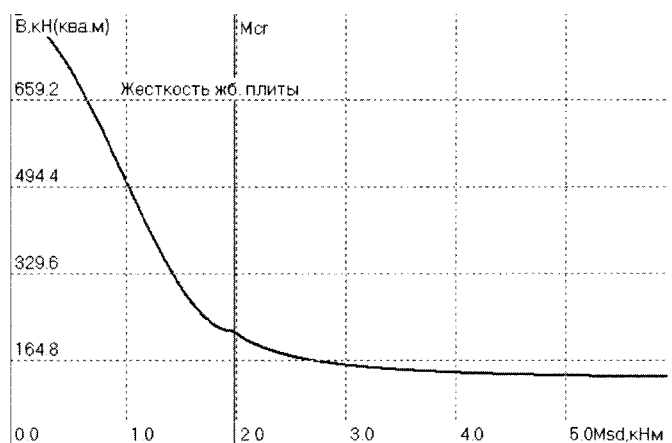


Рис. 2. Изменение жесткости поперечного сечения железобетонной плиты в зависимости от изгибающего момента

на растяжение  $f_{ctm} = 2,2$  МПа; толщина защитного слоя  $c = 25$  мм; нагрузка, равномерно распределенная, принята равной  $p = 20$  кН/м<sup>2</sup>. Модуль упругости и коэффициент Пуассона бетона соответственно равны  $E_b = 29$  ГПа и  $\nu = 0,18$ ; нормальное сопротивление бетона сжатию  $f_{ck} = 20$  МПа. Нормативное сопротивление арматурной сетки растяжению  $f_{yкs} = 400$  МПа. Площадь арматурной сетки  $2,51$  см<sup>2</sup> ( $5\varnothing 8$  S400). Допускаемая ширина раскрытия трещин  $w = 0,4$  мм; допускаемый прогиб  $a_{lim} = 40$  мм. Численная модель построена из 784 КЭ (28x28).

Результаты расчета приведены на графиках рис. 3. По графикам очевидно, что возрастание нагрузки вызывает неограниченное увеличение максимального прогиба плиты. При этом изменение прогиба происходит по сложному нелинейному закону для нелинейно деформируемой плиты (см. рис. 3а, линия 2) и прямо пропорционально нагрузке для линейно деформируемой плиты (см. рис. 3а, линия 1). Для железобетонной плиты изменение нагрузки от 4 до 20 кН/м<sup>2</sup> приводит к увеличению прогибов от 3,38 до 41,80 мм, то есть изменение нагрузки в 5 раз приводит к увеличению прогибов более чем в 12 раз.

Аналогичный характер изменения наблюдается и для максимальных изгибающих моментов  $M_x$ . Для линейно деформируемой плиты максимальный изгибающий момент прямо пропорционален нагрузке (см. рис. 3б, линия 1), а для нелинейно деформируемой он имеет нелинейный характер (см. рис. 3б, линия 2). За счет перерас-

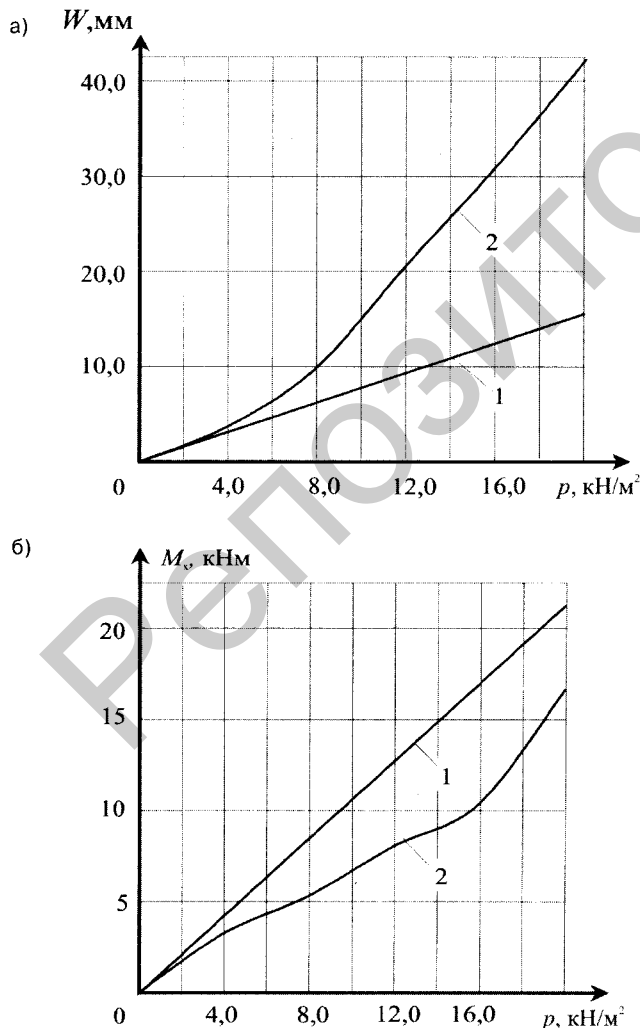


Рис. 3. График зависимости прогибов (а) и изгибающих моментов  $M_x$  (б) от нагрузки, приложенной к плите

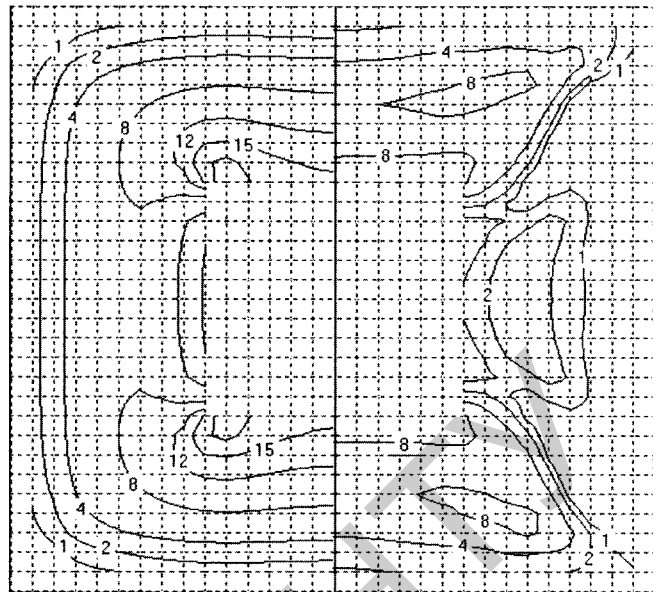


Рис. 4. Карта изолиний изгибающих моментов  $M_x$  для линейно (слева) и нелинейно (справа) деформируемой железобетонной плиты

пределения внутренних сил в нелинейно деформируемой плите максимальный изгибающий момент при всех рассмотренных нагрузках меньше, чем для линейно деформируемой.

На рис. 4 приведены карты изолиний изгибающих моментов, полученные для линейно деформируемой (слева) и нелинейно деформируемой (железобетонной) плиты (справа). Анализ показывает, что учет нелинейности деформации плиты приводит к уменьшению концентрации моментов по краям отверстия. Так, для линейно деформируемой плиты (решение после первой итерации) изгибающие моменты  $M_x$  превышают 20 кНм/м, а для нелинейно деформируемой — близки к 15 кНм/м.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1 Исследована зависимость жесткости сечения железобетонной плиты на изгиб от величины изгибающего момента. Установлено, что зависимость жесткости сечения плиты от изгибающего момента согласно [11] является нелинейной и имеет разрыв, что усложняет получение точного решения задачи в нелинейной постановке. Предложена функция для аппроксимации жесткости плиты на изгиб от момента, отвечающая основным концепциям, заложенным в [11], и являющаяся непрерывной на всем интервале изменения изгибающего момента. Использование этой функции обеспечивает устойчивость численного решения для нелинейно деформируемой железобетонной плиты.
- 2 Рост нагрузки вызывает неограниченное увеличение прогибов железобетонной плиты по сложному нелинейному закону. Так, увеличение нагрузки в 5 раз приводит к увеличению прогибов более чем в 12 раз. Изгибающие моменты для всех рассмотренных нагрузок в нелинейно деформируемой (железобетонной) плите меньше, чем для линейно деформируемой плиты. Анализ также показывает, что учет нелинейности деформирования железобетонной плиты приводит к уменьшению концентрации изгибающих моментов по краям отверстия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баланухин, Н. Н. К вопросу о пластинке равного сопротивления: автореф. дисс. на соискание уч. степ. канд. техн. наук / Н. Н. Баланухин. — М., 1973. — 26 с.
2. Леньшин, В. П. Методические рекомендации по автоматизации расчета железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Методы и алгоритмы / В. П. Леньшин. — М.: НИИЖБ, ЦНИПИАСС, 1981. — 252 с.
3. Ершов, В. И. Многоэлементный метод расчет нелинейно упругой пластинки / В. И. Ершов // Известия вузов. Строительство. — 1992. — №№ 5, 6. — С. 33–36.
4. Киракосян, Р. М. Упруго-пластическое деформирование и несущая способность конструкций: автореф. дисс. на соискание уч. степ. докт. техн. наук / Р. М. Киракосян. — М., 1986. — 32 с.
5. Трещев, А. А. Изгиб армированных плит из физически нелинейного материала / А. А. Трещев, А. И. Артемов // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи / Тул. гос. техн. ун-т. — 1995. — С. 56–62.
6. Шапошников, Н. Н. Расчет многослойных пластин с использованием гипотезы ломаной / Н. Н. Шапошников, В. А. Ожерельев, В. С. Наумов // Строительная механика и расчет сооружений. — 1989. — № 5. — С. 44, 45.
7. Проценко, А. М. Моделирование упругопластических свойств материала при анализе изгибаемой пластины с помощью МКЭ / А. М. Проценко, М. А. Яхно // Строительная механика и расчет сооружений. — 1991. — № 2. — С. 85–87.
8. Пенина, О. В. Применение метода конечных элементов в расчетах нелинейно упругих пластин средней толщины со сложной формой в плане / О. В. Пенина // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: сб. науч. тр. / Сарат. гос. техн. ун-т. — Саратов: Изд-во СГТН, 2005. — С. 85–91.
9. Пластина с отверстием в состоянии упругости, пластичности и ползучести / В. Н. Шлянников [и др.] // Известия вузов. Проблемы энергетики. — 2004. — №№ 1, 2. — С. 107–116.
10. Теличко, В. Г. Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В. Г. Теличко, А. А. Трещев // Известия вузов. Строительство. — 2003. — № 5. — С. 17–23.
11. Бетонные и железобетонные конструкции: СНБ 5.03.01-02. — Минск: Минстройархитектуры, 2003. — 140 с.
12. Вербицкая, О. Л. Исследование напряженно-деформированного состояния шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины / О. Л. Вербицкая // X науч.-метод. межвузов. семинар "Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовка инженерных кадров Республики Беларусь", Гомель, 17–19 сент. 2003 г. / Редкол.: И. А. Кудрявцев [и др.]. — Гомель, 2005. — С. 50–53.
13. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.

Статья поступила в редакцию 07.09.2009.