

Виталий Евгеньевич НОВИКОВ,
старший преподаватель кафедры
"Металлические и деревянные
конструкции"
Белорусского национального
технического университета

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ: ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

STRENGTH AND STIFFNESS OF STEEL-REINFORCED CONCRETE STRUCTURES: PART 1. MATHEMATIC FORMULATION

В первой части статьи рассмотрена деформационная модель нормальных поперечных сечений неоднородных стержней в общей постановке, т. е. с учетом сложного сопротивления. Приведены эффективные численные методы, используемые для решения уравнений расчетной модели. Дана формулировка пространственного физически нелинейного балочного конечного элемента, использующего деформационную модель.

In the first part of this paper the deformation model is described for normal cross-sections of non-homogeneous bars in general placement i. e. taking into account the resistance to combined stress. The effective numerical methods used for solving the design model equations have been considered. A formulation is given for the three-dimensional nonlinear beam finite element which uses the deformation model.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость учета физической и геометрической нелинейностей при расчетах пространственных стержневых строительных конструкций (в том числе комбинированных, например, сталежелезобетонных) неоспорима. Учет физической нелинейности особенно важен для железобетонных и сталежелезобетонных конструкций, содержащих бетон — композитный неоднородный анизотропный дилатирующий материал, неодинаково работающий при растяжении и сжатии и обладающий явно нелинейной зависимостью между прикладываемой нагрузкой и возникающими относительными деформациями.

Прямую краевую задачу пространственной теории пластичности, позволяющую определить напряженно-деформированное состояние стержня (в том числе неоднородного, например, сталежелезобетонного), можно свести к решению физически нелинейной двумерной плоской задачи (2d) для его поперечного сечения и геометрически нелинейной одномерной задачи (1d) для его продольной оси. Для решения двумерной задачи возможно использование деформационной модели (fiber section model), для решения одномерной задачи обычно используется метод конечных элементов (МКЭ). При расчете простейших конструкций (колонн, балок) для решения одномерной задачи можно использовать формулу Мора.

В том или ином виде деформационная модель использовалась в отечественных и зарубежных работах, посвященных расчетам конструкций из железобетона [1–4], сталежелезобетона [5], стали [6–8], композитных материалов [1, 9] и др.

Под названием "деформационная модель" понимается математическая (или расчетная) модель, описывающая напряженно-деформированное состояние произвольного нормального поперечного сечения (рис. 1) неоднородного стержня.

Классическая деформационная модель рассматривает только нормальные напряжения и использует гипотезу плоских сечений, т. е. влияние на напряженно-деформированное состояние сечения поперечных сил и крутящего момента не учитывается [3, 4].

Автором статьи разработана физически нелинейная расчетная модель сечения неоднородного стержня, на-

ходящегося в условиях сложного напряженного состояния, т. е. подвергающегося растяжению-сжатию, поперечному сдвигу, свободному кручению и косому изгибу. Расчетная модель реализована в виде алгоритма и компьютерной программы.

При использовании деформационной модели совместно с МКЭ появляется возможность расчета пространственных стержневых строительных конструкций с учетом физической нелинейности. В статье приводятся возможные формулировки физически нелинейного балочного конечного элемента.

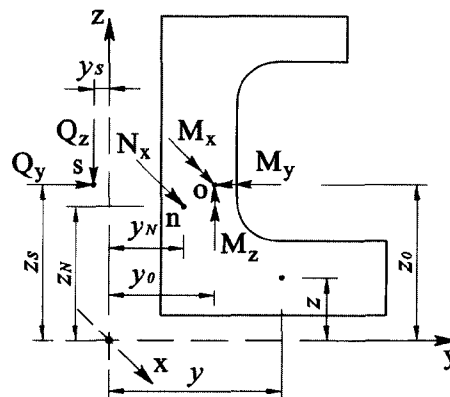
Исследования проводились в рамках Государственной программы ориентированных фундаментальных исследований "Строительство и архитектура 30", № ГР 2006751.

1 РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

1.1 Общие положения

Деформационная модель поперечного сечения представляет собой систему нелинейных уравнений, образованных:

— из уравнений равновесия внешних (внутренних для стержня) и отпорных усилий в сечении;



c — центр тяжести сечения; n — точка приложения силы N_x ;
 s — центр изгиба сечения

Рис. 1. Поперечное сечение стержня

— из кинематических законов распределения относительных деформаций в сечении в упругой и упруго-пластической стадиях работы конструкции;

— из зависимостей между деформациями и напряжениями (диаграмм деформирования) $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, в общем виде немонокотных и негладких;

— из зависимостей деформационной теории пластичности.

Система уравнений деформационной модели устанавливает связь между вектором внешней нагрузки \mathbf{f} и вектором параметров деформаций \mathbf{u} ; она может не иметь решений либо иметь их несколько. Возможны две постановки задачи: определение множества деформаций (и напряжений) по заданной внешней нагрузке — прямая задача, либо определение усилий при заданной деформации — обратная задача. Решение обратной задачи однозначно и проще, чем прямой.

Кинематические законы распределения относительных деформаций в сечении могут быть получены не только исходя из гипотезы плоских сечений, но и с использованием классической теории кручения стержней Сен-Венана, теории изгиба стержней с учетом поперечного сдвига С. П. Тимошенко, теории стесненного кручения В. З. Власова и любых других, в том числе полученных вариационно-асимптотическими методами [1, 9].

При расчетах строительных конструкций появляется ряд особенностей, которые необходимо учитывать. Например, для железобетонных конструкций немаловажным фактором является трещинообразование в бетоне. Для сталежелезобетонных конструкций необходимы оценка и учет стадийности работы. Учет названных особенностей в рамках деформационной модели не вызывает затруднений.

Технически расчет процесса трещинообразования материала (например, бетона) осуществляется обнулением модулей упругости и сдвига, при этом наступление момента разрушения определяется с использованием критерия прочности.

При учете стадийности работы расчет ведется на каждой стадии для соответствующего сечения, при этом принимается допущение, состоящее в предположении о суммируемости относительных деформаций каждой стадии [5].

Предлагаемая расчетная модель позволяет:

— выполнить расчет произвольного поперечного сечения (в т. ч. многосвязного);

— выполнить расчет неоднородных сечений (в т. ч. бистальных, железобетонных, сталежелезобетонных и др.);

— учесть нелинейную работу материалов (физическая нелинейность), упругая задача является частным случаем;

— использовать произвольные диаграммы деформирования (негладкие и немонокотные — полиномиальные, кусочно-линейные и другие функции с ограниченной областью определения, с ниспадающей ветвью и т. д.);

— учесть сложное напряженное состояние (сжатие-растяжение, изгиб в двух плоскостях, сдвиг в двух плоскостях и кручение в любом сочетании);

— найти несколько решений для заданной нагрузки, исследовать "закрытую" работу материала;

— учесть стадийность работы (для расчета сталежелезобетонных конструкций, а также усиливаемых под нагрузкой железобетонных конструкций).

1.2 Математическая формулировка

Рассмотрим физически нелинейную плоскую задачу определения напряженно-деформированного состояния поперечного сечения стержня при сложном сопротивлении.

В качестве допущения принимается, что распределение относительных деформаций в упруго-пластической стадии эквивалентно их распределению в упругой стадии. Для продольных относительных деформаций это подтверждено экспериментально. Распределение относительных деформаций сдвига в упруго-пластической стадии, как показывают эксперименты [8], сохраняется в меньшей степени, чем распределение продольных деформаций.

Также справедливы гипотезы деформационной теории пластичности, в том числе упруго-пластические деформации считаются малыми, рассматривается только активное простое нагружение, т. е. не учитывается зависимость решения от истории нагружения, присущая неконсервативным системам.

Уравнения равновесия внешних и опорных усилий в сечении записываются в виде:

$$\begin{cases} N_x - \langle \sigma_x \rangle = 0 \\ Q_y - \langle \tau_{xy} \rangle = 0 \\ Q_z - \langle \tau_{xz} \rangle = 0 \\ M_x - Q_y z_s + Q_z y_s - \langle \tau_{xy} z \rangle + \langle \tau_{xz} y \rangle = 0 \\ M_y - N_x (z_n - z_c) + \langle \sigma_x z \rangle = 0 \\ M_z - N_x (y_n - y_c) + \langle \sigma_x y \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{f} - \mathbf{f}_r(\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{f} = \{N_x, Q_y, Q_z, M_x^0, M_y^0, M_z^0\}^T$ — вектор-столбец нагрузок на сечение;

$\mathbf{f}_r(\mathbf{u})$ — вектор-функция опорных усилий в сечении;

$\mathbf{u} = \{\varepsilon_{ox}, k_{xy}, k_{xz}, k_x, k_y, k_z\}^T$ — вектор-столбец параметров деформаций (обобщенных деформаций);

$M_x^0 = M_x - Q_y z_s + Q_z y_s$ — внешний крутящий момент относительно начала координат;

$M_y^0 = M_y - N_x (z_n - z_c)$ — внешний изгибающий момент относительно OY;

$M_z^0 = M_z - N_x (y_n - y_c)$ — внешний изгибающий момент относительно OZ;

$\sigma_x = \sigma_x(y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$, $\tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z)$ — функции нормальных и касательных напряжений;

y, z — координаты рассматриваемой точки сечения, $(y, z) \in \Omega$;

y_n, z_n — координаты точки приложения продольного усилия N_x ;

y_c, z_c — координаты центра тяжести сечения;

y_s, z_s — координаты центра изгиба сечения и точки приложения поперечных усилий.

Здесь и далее в угловых скобках принято обозначение интегрирования по поперечному сечению Ω : $\langle \bullet \rangle = \int_{\Omega} \bullet d\Omega$.

Параметры деформаций зависят от уровня нагрузки \mathbf{f} и геометрических характеристик сечения, они являются коэффициентами пропорциональности к функциям распределения относительных деформаций в поперечном сечении. В упругой стадии справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & \{\varepsilon_{ox}, k_{xy}, k_{xz}, k_x, k_y, k_z\}^T = \\ & = \left\{ \frac{N_x}{EA}, \frac{Q_y}{GA_y}, \frac{Q_z}{GA_z}, \frac{M_x}{GI_t}, \frac{M_y}{EI_y}, \frac{M_z}{EI_z} \right\}^T, \end{aligned} \quad (2)$$

где $EA, GA_y, GA_z, GI_t, EI_y, EI_z$ — соответственно, продольная, сдвиговые, крутильная и изгибные жесткости исходного сечения.

Распределение относительных деформаций сдвига в сечении записывается выражениями:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(y, z) &= k_x f_{y, kx} + k_{xy} f_{y, kxy} + k_{xz} f_{y, kxz}; \\ \gamma_{xz}(y, z) &= k_x f_{z, kx} + k_{xy} f_{z, kxy} + k_{xz} f_{z, kxz}.\end{aligned}\quad (3)$$

Функции $f_{i,j}(y, z)$ можно определить с использованием теории кручения Сен-Венана и теории поперечного изгиба С. П. Тимошенко [10] по формулам:

$$\begin{aligned}f_{y, kx} &= -\partial\varphi / \partial y + (z - z_c), & f_{z, kx} &= -\partial\varphi / \partial z - (y - y_c), \\ f_{y, kxy} &= \partial\chi_1 / \partial y - (y - y_s)^2, & f_{y, kxz} &= \partial\chi_2 / \partial y - 2\mu(y - y_s)(z - z_s), \\ f_{z, kxy} &= \partial\chi_1 / \partial z - (z - z_s)^2, & f_{z, kxz} &= \partial\chi_2 / \partial z - 2\mu(y - y_s)(z - z_s),\end{aligned}\quad (4)$$

где $\varphi = \varphi(y, z)$ — функция кручения Сен-Венана (функция депланации);
 χ_1, χ_2 — функции сдвига С. П. Тимошенко.

Функции кручения и сдвига определяются из решения краевых задач [10, 11]. Следует заметить, что с помощью функции кручения также определяются координаты центра изгиба (y_s, z_s).

При наличии поперечной силы плоские до деформации поперечные сечения не остаются плоскими (искривляются), но закон изменения продольных относительных деформаций, как и ранее, остается линейным:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{cx} - k_y z - k_z y, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x.\end{aligned}\quad (5)$$

Функция интенсивности деформаций определяется по формуле

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(y, z) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)}.\quad (6)$$

Интенсивности напряжений определяются по диаграммам деформирования материалов $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Функции нормальных и касательных напряжений в упругопластической стадии записываются выражениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_0), \\ \tau_x &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \cdot \gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \cdot \gamma_{xz},\end{aligned}\quad (7)$$

где ε_0 — средняя деформация.

В случае прямой постановки задачи (неизвестными являются деформации при заданной нагрузке) алгоритм ее решения состоит в следующем. На первой итерации задаются вектором параметров деформаций \mathbf{u} . Далее по формулам (3) и (5) определяется распределение деформаций в сечении и по формуле (6) — функция интенсивности деформаций. Затем по известным диаграммам деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ находят распределение интенсивности напряжений и по формуле (7) — распределение напряжений в сечении. Окончательно напряжения подставляются в уравнения равновесия (1). Если условие равновесия не выполняется, то корректируется вектор \mathbf{u} , и расчет повторяется.

1.3 Используемые численные методы

Основные задачи, возникающие при численной реализации расчетной модели, следующие:

- разбиение сечения на треугольники (конечные элементы);
- нахождение определенного двумерного интеграла по поперечному сечению;
- решение стационарных двумерных краевых задач на поперечном сечении;
- решение системы нелинейных уравнений.

После проведения сравнительного анализа различных методов были выбраны наиболее эффективные.

Из наиболее эффективных алгоритмов триангуляции следует отметить итеративные алгоритмы — динамическое кэширование и послойного сгущения; двухпроходные алгоритмы — невыпуклого полосового слияния и ленточный алгоритм.

Численная задача нахождения определенного двумерного интеграла (1) по поперечному сечению решается с помощью квадратурных формул Гаусса для треугольника. Максимальное реализованное в программе, предложенной автором, FPLASTIC число узлов Гаусса в треугольнике равно 13, что обеспечивает высокую точность значения определенного интеграла для подинтегральной функции в виде полинома 7-й степени и позволяет уменьшить число треугольников. В большинстве случаев для достижения приемлемой точности достаточно шести точек Гаусса на треугольнике.

Решение краевых двумерных задач (4) выполняется методом конечных элементов. Для достижения приемлемой точности решения функции формы на треугольном конечном элементе приняты в виде полинома второй или третьей степени.

Для решения системы нелинейных уравнений расчетной модели (1) используются методы дискретного или непрерывного продолжения по параметру. Методы дискретного продолжения по параметру являются итерационными,

в рассматриваемом случае используется обычный или модифицированный метод Ньютона-Рафсона. Методы непрерывного продолжения по параметру более медленные, но позволяют проследить напряженно-деформированное состояние сечения на всей истории нагружения. Некоторые из них позволяют исследовать работу поперечного сечения, определяемую ниспадающей частью диаграммы деформирования, и найти все возможные решения [12]. В случае, рассматриваемом в статье, в качестве параметра используется длина кривой множества решений [13, 14], что является наиболее эффективным.

Из имеющихся в настоящее время компьютерных программ, реализующих деформационную модель сечений в чистом виде, следует отметить: БЕТА (www.psu.by), XTRACT (www.imbsen.com), ETAP-D и FPLASTIC¹ (helpstud2.narod.ru).

2 ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ БАЛОЧНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

2.1 Формулировка конечного элемента в терминах метода перемещений

Использование деформационной модели совместно с МКЭ возможно как в форме метода перемещений, так и в форме метода сил, при этом в каждой из форм есть свои преимущества и недостатки [1, 15, 16].

В случае пространственного двухузлового балочного конечного элемента, работающего на сжатие-растяжение, сдвиг, кручение и изгиб, он имеет 12 степеней свободы. При использовании МКЭ в форме метода перемещений на уровне конечного элемента необходимо определить его узловые реакции F_i по заданным узловым перемещениям U .

Распределение параметров деформаций $u(x)$ в стержне, выраженное через узловые перемещения U , имеет вид:

$$u(x) = a(x)U, \quad (8)$$

где $a(x)$ — матрица функций, преобразующих узловые перемещения в вектор-функцию параметров деформаций;

$u(x) = \{\varepsilon_{ox}(x), k_{xy}(x), k_{xz}(x), k_x(x), k_y(x), k_z(x)\}^T$ — вектор функций параметров деформаций.

Уравнения равновесия усилий в сечении имеют вид:

$$f_r(x) = k(x)u(x), \quad (9)$$

где $f_r(x)$ — вектор функций отпорных усилий в стержне;

$k(x)$ — матрица функций изменения жесткостей сечений по длине стержня, определяемая из решения уравнений расчетной модели.

Матрица жесткости поперечного сечения имеет вид:

$$k = \int_A B(K^{-1}G) dA, \quad (10)$$

где G — матрица законов распределения относительных деформаций в сечении;

K — касательная матрица упругости, получаемая заменой в обычной матрице упругости K' модуля упругости $E = const$ на функцию $E(y, z) = \sigma_y/\varepsilon_y$;

B — матрица уравнений равновесия.

Матрица G устанавливает связь между относительными деформациями и параметрами деформаций в соответствии с выражениями (3) и (5):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & -y \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & \mu z & \mu y \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & \mu z & \mu y \\ 0 & f_{y,kxy} & f_{y,kxz} & f_{y,kx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{z,kxy} & f_{z,kxz} & f_{z,kx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ k_{xy} \\ k_{xz} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \varepsilon = Gu. \quad (11)$$

Матрица упругости K' обычного изотропного тела связывает векторы-столбцы относительных деформаций и напряжений (закон Гука):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \varepsilon = K'\sigma, \quad (12)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

¹ Разработка автора.

Матрица \mathbf{B} связывает вектор нагрузки с вектором напряжений, т. е. входит в уравнения равновесия (1):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_z^0 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & -y \\ -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega \Leftrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} d\Omega. \quad (13)$$

Вектор узловых реакций стержня имеет вид:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_r = \int_0^L \mathbf{a}^T(x) \mathbf{f}_r(x) dx, \quad (14)$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости стержневого конечного элемента, определяемая по формуле:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{a}^T(x) \mathbf{k}(x) \mathbf{a}(x) dx. \quad (15)$$

Недостатком данной формулировки конечного элемента является сложность получения аппроксимирующих функций $\mathbf{a}(x)$. Поскольку данные функции приближенные, то для снижения погрешности необходимо увеличить число конечных элементов и/или использовать функции формы для перемещений $\mathbf{a}(x)$ более высокого порядка [16].

Преимуществом данной формулировки является решение однозначной обратной задачи в сечении, т. е. определение опорных усилий в сечении по заданным параметрам деформаций. Еще одним преимуществом данной формулировки является простота внедрения конечного элемента в современные программные комплексы, подавляющее большинство которых использует МКЭ в форме метода перемещений.

2.2 Формулировка конечного элемента в терминах метода сил

При использовании МКЭ в форме метода сил на уровне конечного элемента необходимо определить его узловые перемещения \mathbf{U} , по заданным узловым силам \mathbf{F} .

Распределение внутренних усилий $\mathbf{f}(x)$ в стержне, выраженное через узловые силы \mathbf{F} , имеет вид:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{b}(x) \mathbf{F}, \quad (16)$$

где $\mathbf{b}(x)$ — матрица функций, преобразующих узловые силы в вектор-функцию внутренних усилий в стержне.

Уравнения равновесия усилий в сечении имеют вид:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{d}(x) \mathbf{f}(x), \quad (17)$$

где $\mathbf{d}(x)$ — матрица функций изменения податливостей сечений по длине стержня.

Вектор узловых перемещений имеет вид:

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{D}\mathbf{F}, \quad (18)$$

где \mathbf{D} — матрица податливости стержневого конечного элемента, определяемая по формуле:

$$\mathbf{D} = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{d}(x) \mathbf{b}(x) dx. \quad (19)$$

Окончательно для определения вектора узловых перемещений можно получить зависимость:

$$\mathbf{U}_r = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{u}(x) dx. \quad (20)$$

Приведенная зависимость известна также как формула Мора для определения перемещений; в ней $\mathbf{b}(x)$ — матрица функций внутренних усилий в стержне от действия единичной нагрузки по заданному направлению.

Преимуществом данной формулировки конечного элемента является простота определения функций $\mathbf{b}(x)$ из условий равновесия стержня. При нелинейном поведении материала использование функции $\mathbf{b}(x)$ не вносит погрешности в расчет по сравнению с использованием функции $\mathbf{a}(x)$.

В качестве недостатков отметим решение прямой задачи в сечении (определение параметров деформаций по заданным нагрузкам), что приводит к необходимости решения системы нелинейных уравнений. Кроме этого, использование приведенного конечного элемента в МКЭ (в форме метода перемещений) требует дополнительной итерационной процедуры на уровне стержневого конечного элемента.

Интегрирование по длине стержня выполняется численно с использованием формул Гаусса или Гаусса-Лобатто (Маркова).

Из компьютерных программ, использующих деформационную модель совместно с МКЭ, следует отметить: ANSYS, ЛИПА-WINDOWS, RADUGA, BIAХ-2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1 Предложена расчетная модель произвольных поперечных сечений стержневых строительных конструкций, базирующаяся на деформационной модели, пригодная для любых сечений из произвольных материалов, учитывающая реальную работу материалов под нагрузкой (физическую нелинейность) и ориентированная на использование вычислительной техники. Расчетная модель позволяет учесть влияние на напряженно-деформированное состояние сечения стержня поперечных сил и крутящего момента.
- 2 Сформулирован физически нелинейный пространственный балочный конечный элемент, пригодный к использованию совместно с методом конечных элементов. Использование деформационной модели совместно с методом конечных элементов дает возможность выполнять расчет пространственных стержневых строительных (стальных, бистальных, железобетонных, сталежелезобетонных, деревянных и др.) конструкций с учетом физической нелинейности, что позволит снизить материалоемкость, повысить надежность и безопасность строительных конструкций.
- 3 Сравнительный анализ результатов численных расчетов по предложенной модели с аналитическими решениями и результатами экспериментов будет приведен в следующей публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spacone, E. Fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation. II: Applications / E. Spacone, F. Filippou, F. Taucer // *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*. — 1996. — № 25(7). — P. 711–742.
2. Алявдин, П. В. Решение негладких задач расчета элементов железобетонных конструкций / П. В. Алявдин, В. Н. Симбиркин // *Будаўніцтва. Стrojitel'stvo. Construction*. — 2000. — № 1. — С. 11–20.
3. Байков, В. Н. Общий метод расчета железобетонных конструкций / В. Н. Байков, М. И. Додонов, Б. С. Расторгуев // *Бетон и железобетон*. — 1987. — № 5. — С. 13–17.
4. Залесов, А. С. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил / А. С. Залесов, Е. А. Чистяков, И. Ю. Ларичева // *Бетон и железобетон*. — 1996. — № 5. — С. 16–18.
5. Мартынов, Ю. С. Расчет прочности сталежелезобетонных сечений комбинированным методом с учетом физической нелинейности / Ю. С. Мартынов, В. Е. Новиков // *Металеві конструкції*. — Макеевка, 2003. — Т. 6, № 1. — С. 55–60.
6. Мартынов, Ю. С. Физически нелинейная расчетная модель сечений стальных стержней при сложном сопротивлении / Ю. С. Мартынов, В. Е. Новиков // *Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее: сб. тр. VIII Укр. науч.-технич. конф., Киев, 18–22 окт. 2004 г. / УкрНИИпроектстальконструкция им. В. Н. Шимановского; под ред. А. В. Шимановского*. — Киев: Сталь, 2004. — Ч. 1. — С. 376–385.
7. Новиков, В. Е. Физически нелинейная модель прямолинейных стержневых стальных элементов произвольного сечения / В. Е. Новиков // *Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовки инженерных кадров Республики Беларусь: материалы XI Междунар. науч.-метод. межвуз. семинара, Брест, 25–27 ноября 2004 г. / Вестник Брестского государственного технического университета — Строительство и архитектура; редкол. Н. П. Блещик [и др.]*. — Брест, 2005. — Ч. 1. — С. 68–73.
8. Чернов, Н. Л. Прочность сечений стальных тонкостенных стержней при ограниченных пластических деформациях / Н. Л. Чернов [и др.] // *Известия вузов. Строительство и архитектура*. — 1990. — № 4. — С. 1–5.
9. Yu, W. Elasticity solutions versus asymptotic sectional analysis of homogeneous, isotropic, prismatic beams / W. Yu, D. Hodges // *J. of Applied Mechanics*. — 2004. — № 71(1). — P. 15–23.
10. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
11. Разработка физически нелинейной теории анизотропных стержней с учетом сдвига и кручения: отчет о НИР / БНТУ; рук. темы Ю. С. Мартынов, отв. исп. В. Е. Новиков. — Минск, 2005. — 78 с. — № ГР 2005628.
12. Мартынов, Ю. С. Деформационная модель в расчетах сечений стержневых строительных конструкций / Ю. С. Мартынов, В. Е. Новиков // *Современные архитектурно-конструктивные решения для снижения стоимости и повышения качества строительства. Энерго- и ресурсосбережение при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений: сб. науч. тр. II Междунар. науч.-практ. семинара по реализации задач государственной программы ориентированных фундаментальных исследований "Строительство и архитектура", Минск, 19–21 сент. 2007 г.: в 3 т.* — Минск, 2008. — Т. 1. — С. 103–118.
13. Martynov, Yu. S. Arc-length Method in the Physically Nonlinear Section Model of a Steel Rod / Yu. S. Martynov, V. E. Novikov // *Nowe Osiagniecia Nauki i Techniki w Budownictwie: VII sympozjum, Rzeszow, 3–4 lutego 2005 r. / Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej; pod redakcja A. Reichharta*. — Rzeszow, 2005. — P. 245–254.
14. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашили. — М.: Наука, 1988. — 232 с.
15. Limkatanyu, S. Reinforced concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based and mixed formulations. II: State determinations and numerical validation / S. Limkatanyu, E. Spacone // *J. Struct. Eng. ASCE*. — 2002. — № 128(3). — P. 346–364.
16. Neuenhofer, A. Evaluation of nonlinear frame finite-element models / A. Neuenhofer, F. Filippou // *J. Struct. Eng. ASCE*. — 1997. — Vol. 123, № 7. — P. 958–966.

Статья поступила в редакцию 01.02.2010.