МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Соломахо В.Л., Дадьков К.И.

Статистические методы контроля качества

Курсовое проектирование

Учебное пособие для студентов
инженерно-технических специальностей

Учебное электронное издание

Минск ◊ БНТУ ◊ 2008

УДК 025.17:371.385 (075.8)
ББК 76.400.6я7
С 88

Авторы:
В.Л.Соломахо – первый проректор БНТУ,
доктор технических наук, профессор;
К.И.Дадьков – старший преподаватель кафедры «Стандартизация, метрология и информационные системы» БНТУ

Рецензенты:
В.Л.Гуревич – директор Белорусского государственного института стандартизации и сертификации (БелГИСС);
С.А. Новиков – заместитель директора по научной и инновационной работе Института прикладной физики НАН Беларуси,
кандидат технических наук

Учебное пособие содержит данные о порядке выполнения курсовой работы по дисциплине «Статистические методы контроля качества». Методические указания, приведенные в пособии, могут быть использованы для самостоятельной работы студентов как дневного, так и заочного отделений высших учебных заведений.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 232-77-52 факс (017) 232-91-37
E-mail: kdadzkou@smis-bntu.com
http://www.smis-bntu.com
Регистрационный № _______

Содержание

Введение 4
1 Определение вероятности несоответствующих единиц продукции в выборке 6
2 Определение закона распределения случайной величины 13
3 Статистический анализ возможностей процесса 40
4 Построение комплексной простой контрольной карты 51
5 Построение контрольной карты кумулятивных сумм 58
6 Оперативная характеристика статистического приемочного контроля 63
7 Последовательный статистический приемочный контроль по количественному признаку 73
8 Построение 5М диаграммы Исикавы для предприятия, ...81
производящего машиностроительную продукцию 81
9 Построение диаграммы разброса, расчет коэффициентов корреляции и регрессии 83

Введение

Развертывание статистических методов контроля качества на предприятии в настоящее время является одной из наиболее актуальных задач в белорусской промышленности в области менеджмента качества, решение которой требует наличие в организациях высококвалифицированных специалистов как в области управления качеством, так и в области теории вероятности и математической статистики.

Целью курсовой работы по дисциплине «Статистические методы контроля качества» является закрепление студентами специальности «Метрология, стандартизация и сертификация» практических навыков, полученных при изучении данной учебной дисциплины. При выполнении курсовой работы моделируются этапы внедрения статистических методов контроля качества на производстве, начиная с предварительного анализа и дальнейшего статистического управления процессами и заканчивая статистическим приемочным контролем и качественным и количественным анализом значимых причин изменчивости процесса с целью разработки корректирующих мероприятий, направленных на повышение качества. Успешное выполнение курсовой работы повышает степень готовности будущих молодых специалистов для решения реально существующих задач на организациях промышленных отраслей Республики Беларусь.

Исходным заданием на курсовую работу по дисциплине «Статистические методы контроля качества» являются 6 массивов данных, представляющих совокупность значений показателя качества производимой продукции, измеренных на различных стадиях внедрения статистических методов контроля качества на предприятии. Первый массив используется для определения закона распределения случайной величины, второй массив используется для статистического анализа возможностей процесса, третий массив используется для построения простой контрольной карты средних арифметических и размахов, четвертый массив содержит результаты измерений для построения карты кумулятивных сумм, пятый массив используется для построения приемочной карты последовательного статистического приемочного контроля по количественному признаку, шестой массив содержит результаты измерений для построения диаграммы разброса, корреляционного и регрессинного анализа. Оперативная характеристика двухступенчатого приемочного контроля строится исходя из справочных данных СТБ ГОСТ Р 59779.71-2001.

Курсовая работа содержит следующие разделы:

1. Построение поля допуска.
2. Определение вероятности несоответствующих единиц продукции в выборке
3. Определение закона распределения случайной величины, проверка гипотезы о виде распределения по критериям согласия.
4. Статистический анализ возможностей процесса, расчёт индексов воспроизводимости и пригодности процесса.

5. Построение комплексной простой контрольной карты средних арифметических $\overline{X}$ и размахов R.
6. Построение контрольной карты кумулятивных сумм средних арифметических $\overline{X}$.
7. Построение оперативной характеристики для двухступенчатого статистического приемочного контроля.
8. Построение приемочной карты последовательного статистического приемочного контроля по количественному признаку.
9. Построение 5М диаграммы Исикавы для предприятия, производящего машиностроительную продукцию.
10. Построение диаграммы разброса, расчет коэффициентов корреляции и регрессии.

Данное учебное пособие содержит учебный и справочный материал, необходимый и достаточный для выполнения курсовой работы по дисциплине «Статистические методы контроля качества» при наличии знаний и навыков, полученных при изучении дисциплин «Высшая математика» и «Управление качеством».

1 Определение вероятности несоответствующих единиц продукции в выборке

Центральными понятиями в теории вероятности являются событие и испытание.

Испытанием называется практическое осуществление какого-либо комплекса условий.

Событием называется явление, происходящее в результате осуществления определенного комплекса условий.

События, происходящие при многократном повторении испытаний, называются ***массовыми***. Если при каждом испытании неизбежно происходит события А, то такое событие называется ***достоверным***. Если в условиях данного испытания некоторое событие В заведомо не может произойти, то оно называется ***невозможным***. Если же при испытаниях может произойти либо событие А, либо В (либо С и т.д.), то такие события называются ***возможными*** или ***случайными***.

Следовательно, ***случайным*** называется такое событие, которое при испытании может либо наступить, либо не наступить.

Пример. Если в ящике находится 200 деталей и среди них две детали несоответствующие требованиям технических нормативных правовых актов, то извлечение из ящика несоответствующей детали будет случайным событием, так как оно может наступить или не наступить.

Для количественной оценки возможности осуществления случайного события пользуются термином ***вероятность***. По классическому определению вероятность события *P(A)* представляет собой отношение числа случаев m, благоприятствующих этому событию, к числу всех возможных случаев n данного класса испытаний, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

при этом события должны быть равнозначны, несовместимы и независимы *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10* ***вероятность*** *– это действительное число в интервале от 0 до 1, относящееся к случайному событию).*

Под ***несовместимыми*** понимаются такие события, которые не могут появляться вместе и одновременно; под независимыми событиями понимаются такие, появление которых не зависит от того, какое событие произошло перед этим.

Два события в одном опыте называются ***независимыми***, если вероятность любого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет. В противном случае они называются ***зависимыми***.

Несколько событий называются ***независимыми***, если любые два из них независимы.

Под ***данным классом испытаний*** подразумевается совокупность неизменных условий, осуществление которых приводит к тому или иному событию.

Пример. Пусть А – выпадение четного числа очков при бросании кости один раз. Тогда

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

Вероятность события показывает меру его возможности: чем больше вероятность события, тем событие более вероятно (чаще наблюдается). В данном случае Р(А) = 1/2 означает, что примерно в половине случаев число очков при бросании игральной кости будет четно (и примерно в половине случаев – нечетно).

Пример. При произвольном бросании монеты вероятность того, что она упадет той стороной, где изображен герб, составляет 1/2, так как число случаев, благоприятствующих этому событию, равно 1 (монета имеет только одну сторону с гербом), а число всех возможных случаев данного класса испытаний равно 2 (либо герб, либо надпись). При этом оба случая равновозможны (имеется одинаковая возможность выпасть гербу и надписи), несовместимы (появление герба исключает возможность появления надписи) и независимы, так как появление герба не зависит от того, что перед этим выпало — герб или надпись.

Пример. В ящике имеется 200 деталей, все детали замаркированы с № 1 по № 200. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет иметь № 27.

Очевидно, что число случаев, благоприятствующих данному событию, равно 1, а число всех возможных случаев данного класса испытаний равно 200. При этом все случаи равнозначны, несовместимы и независимы друг от друга. Тогда

$$P(A) = 1/200.$$

Пользуясь классическим определением понятия вероятности, можно вычислить вероятность какого-либо случайного события теоретически, не прибегая к опыту. Однако это не всегда выполнимо, так как на практике не всегда можно соблюдать такие условия, как равновозможность, независимость и несовместимость. По этой причине наравне с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности, согласно которому под ***вероятностью*** понимается отношение частоты появления события f_A к общему количеству испытаний n:

$$P(A) = \frac{f_A}{n}$$

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна 1.

Доказательство: Так как событие достоверно, то благоприятствующими ему будут все элементарные события, т.е. $m=n$ и

$$P(A) = m/n = n/m = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство: Пусть А – невозможное событие, т.е. оно никогда не происходит, а следовательно, оно не происходит ни при каком элементарном событии, т.е. m = 0. Тогда

$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. Если А – случайное событие, то $0 < P(A) <1$.

Доказательство: Ясно, что если A – случайное событие, то при некоторых элементарных событиях оно появляется, а при остальных нет. Таким образом, $0 < m < n$.

Разделим это двойное неравенство на $n > 0$.

Получаем

$$0/n < m/n < n/n\ ,$$

$$0 < m/n < 1.$$

Отсюда получаем

$$0 < P(A) < 1.$$

Свойство 4. Если A и $\overline{A}$ – противоположные события, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Доказательство: Если из n элементарных событий число элементарных событий, благоприятствующих событию А, равно m , то при других n – m, элементарных событиях событие А не появляется, т.е. появляется событие $\overline{A}$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n}$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = 1$$

Сложение и вычитание вероятностей

Суммой А + В ***событий*** А и В в одном опыте называется событие С, состоящее в появления события А или события В, или обоих событий одновременно.

Произведением А х В ***событий*** А и В называется событие С, состоящее в том, что произойдут события А и В.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы событий А + В равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B).$$

Если события А и В несовместны, то Р(А х В) = 0 и, следовательно, теорема сложения вероятностей примет вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность события В, вычисленная в предположениях, что событие А уже наступало, называется ***условной вероятностью*** и обозначается $P_A(B)$.

Если А и В независимы, то

$$P_B(A) = P(A),$$

$$P_A(B) = P(B).$$

Если А и В зависимы, то

$$P_B(A) \neq P(A),\ P_A(B) \neq P(B).$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, т.е.

$$P(A \times B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Если события А и В независимы, то условия вероятности равны безусловным и теорема умножения вероятностей примет вид:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B).$$

Пример. Единица продукции может содержать два вида несоответствий: царапины и сколы. Вероятность появления царапин равна 10%, вероятность появления сколов равна 5%. Необходимо найти вероятность того, что единица продукции будет несоответствующая.

Решение. Рассмотрим события:

А – “единица продукции содержит царапину”;

В – “единица продукции содержит скол”;

С – “единица продукции несоответствующая”.

$$C = A + B,$$

Так как события А и В независимы, то по теореме сложения и умножения вероятностей получаем:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AxB) = P(A) + P(B) - P(A)\ x\ P(B) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}05 - 0{,}1\ x\ 0{,}05 = 0{,}145.$$

Вероятность производства несоответствующей продукции равна 14,5%.

Формула полной вероятности

Пусть имеется группа событий H_1, H_2,..., H_n, обладающая следующими свойствами:

1) все события попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j = 1,2,...,n$; $i \neq j$;

2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n.$$

В этом случае будем говорить, что H_1, H_2,...,H_n образуют ***полную группу событий***. Такие события иногда называют ***гипотезами***.

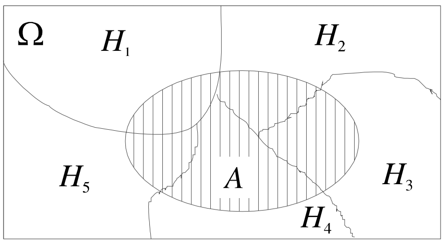

Рисунок 1.1 - Диаграмма Венна

Пусть A – некоторое событие: $A \subset \Omega$, тогда имеет место ***формула полной вероятности***:

$$P(A) = P_{H1}(A)P(H_1) + P_{H2}(A)P(H_2) + ... + P_{Hn}(A)P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P_{H_i}(A)P(H_i)$$

Доказательство. Очевидно, что:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n),$$

причем все события $A \cap H_i$ (i = 1, 2, ..., n) попарно несовместны. Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + ... + P(A \cap H_n)$$

Если учесть, что по теореме умножения

$$P(A \cap H_i) = P_{H_i}(A)P(H_i) \ ,$$

где i = 1,2, ..., n, то из последней формулы легко получить приведенную выше формулу полной вероятности.

Пример. Партия деталей формируется продукцией, произведенной на трех станках, причем доля первого станка - 30%, второго - 50%, третьего - 20%. Доля несоответствующих единиц продукции каждого станка составляет соответственно 3%, 2% и 1%. Какова вероятность того, что случайно отобранная из партии единица продукции окажется несоответствующей?

Пусть событие H_1 состоит в том, что единица продукции произведена на первом станке, H_2 на втором, H_3 - на третьем заводе. Тогда

$$P(H_1) = 3/10,$$
$$P(H_2) = 5/10,$$
$$P(H_3) = 2/10.$$

Пусть событие A состоит в том, что единица продукции оказалась несоответствующей; A/H_i означает событие, состоящее в том, что выбрана несоответствующая лампа из ламп, произведенных на i-ом станке. Из условия задачи следует:

$$P_{H1}(A) = 3/100$$
$$P_{H2}(A) = 2/100$$
$$P_{H3}(A) = 1/100$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{100} + \frac{5}{10}\cdot\frac{2}{100} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{100} = \frac{11}{500}$$

В качестве исходных данных для определения вероятности несоответствующих единиц продукции в выборке для каждого из вариантов указываются доли дефектности нескольких производственных подразделений (рабочих мест одного подразделения) для каждого вида несоответствий продукции по различным показателям качества. Партия формируется из продукции всех производственных подразделений (рабочих мест одного подразделения), при этом количество произведенной продукции каждым производственным подразделением различно. Необходимо определить вероятную долю несоответствующих единиц продукции в выборке.

При определении вероятности несоответствующих единиц продукции в выборке важно выделить базовые события и определить, являются ли они независимыми и несовместимыми. Например, если появление дефектной единицы продукции обусловлено несоответствием продукции по двум показателям качества, то необходимо определить, возможно ли одновременное возникновение двух несоответствий в одной единице продукции, если да, то зависимы ли эти события. Если появление одного несоответствия обуславливает возникновение другого несоответствия, то необходимо рассчитать вероятность произведения событий, если возможно одновременное появление двух независимых событий, то для расчета необходимо использовать формулу вероятности суммы событий. Если все события попарно несовместны, но необходимо определить вероятность полной группы элементарных исходов, необходимо использовать формулу полной вероятности.

2 Определение закона распределения случайной величины

Как правило, при изготовлении продукции на процесс её производства оказывает влияние множество различных факторов, в результате чего наблюдается разброс значений показателей качества продукцию. Таким образом, показатели качества изготовляемой продукции или оказываемых услуг следует рассматривать как случайные величины.

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате испытаний в границах определенного интервала может принимать различные числовые значения *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 случайная величина - переменная, которая может принимать любое значение из заданного множества значений и с которой связано распределение вероятностей*).

Дискретными случайными величинами называются такие, которые в результате испытаний могут принимать лишь отдельные, изолированные значения и не могут принимать значения промежуточные между ними. Например, количество негодных деталей в партии может быть только целым положительным числом 1, 2, 3 и т.д., но не может быть 1,3; 1,7 и т.п.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая в результате испытаний может принимать любые численные значения из непрерывного ряда их возможных значений в границах определенного интервала.

Например, действительные размеры деталей, обработанных на станке, являются случайными величинами непрерывного типа, так как они могут принять любое численное значение в определенных границах.

Возможности случайных величин принимать при испытаниях те или иные численные значения оцениваются при помощи вероятностей.

Совокупность значений случайных величин, расположенных в возрастающем порядке с указанием их вероятностей для каждого из значений, называется ***распределением случайных величин*** *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 распределение – это функция, определяющая вероятность того, что случайная величина примет какое-либо заданное значение или будет принадлежать заданному множеству значений).*

Распределение случайной величины можно представить в табличном, графическом виде и при помощи статистических оценок.

При представлении распределения случайной величины в табличном виде каждому номеру исследуемой единицы продукции (номеру измерения) соответствует значение показателя качества для данной единицы продукции (результат измерения).

При представлении распределения случайной величины в графическом виде строят график распределения в координатах значение случайной величины – вероятность (частота, частость) значения случайной величины.

На рисунке ниже показаны графики распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

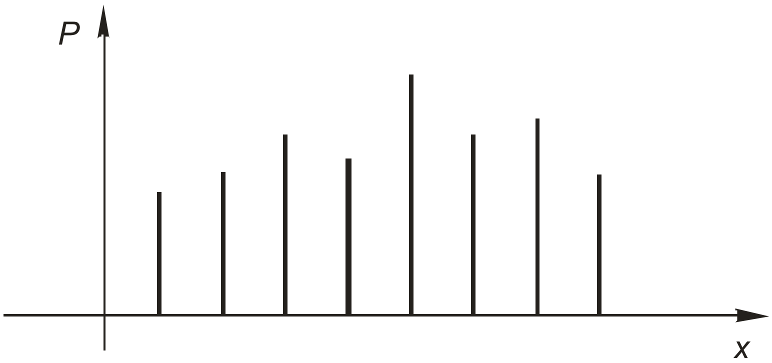

Рисунок 2.1 - График распределения дискретной случайной величины

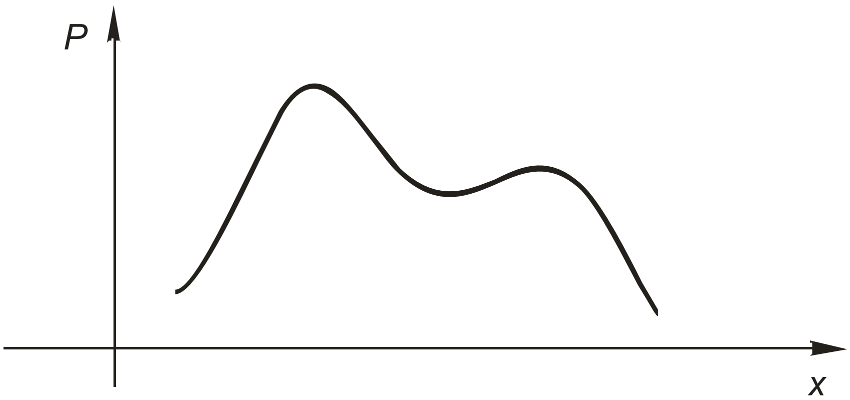

Рисунок 2.2 - График распределения непрерывной случайной величины

Различают теоретические и эмпирические распределения случайных величин. В теоретических распределениях оценка возможных значений случайной величины производится при помощи вероятностей, а в эмпирических — при помощи частот или частостей, полученных в результате испытаний.

Следовательно, ***эмпирическим распределением случайной величины*** называется совокупность экспериментальных ее значений, расположенных в порядке возрастания, с указанием частот или частостей для каждого из значений *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10* ***распределение частот*** *– это эмпирическое отношение между значениями признака и его частотами или его относительными частотами).*

Таблица 2.1 - Пример табличного представления теоретического распределения дискретной случайной величины

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
P(X)	$P(X_1)$	$P(X_2)$	$P(X_3)$	$P(X_4)$	$P(X_5)$	$\Sigma P(X_i)=1$

Таблица 2.2 - Пример табличного представления эмпирического распределения дискретной случайной величины

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
m_x	1/30	3/30	15/30	6/30	5/30	$\Sigma m_{xi}=1$

Графически эмпирическое распределение дискретной случайной величины можно представить в виде ***столбиковой диаграммы***, образуемой набором столбцов равной ширины, высоты которых пропорциональны частотам дискретных значений случайной величины.

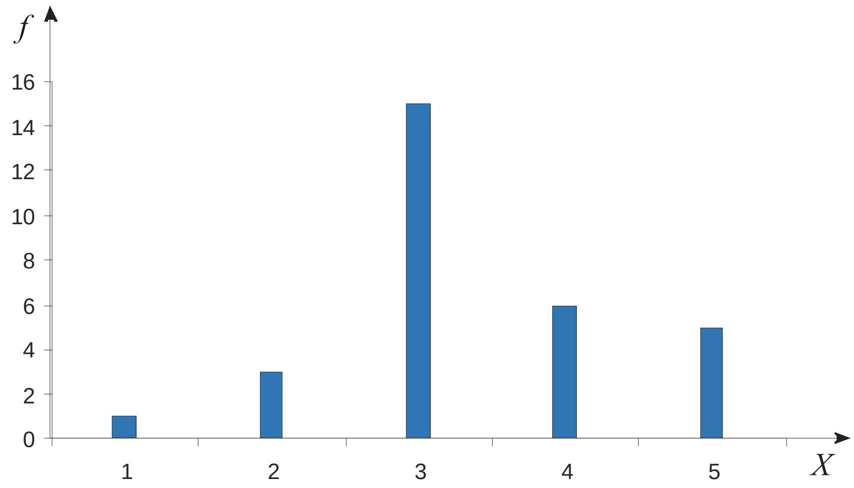

Рисунок 2.3 - Столбиковая диаграмма дискретной случайной величины.

Если случайная величина является непрерывной, то возникают некоторые сложности с представлением ее распределения в виде таблицы или графика. Поэтому на практике при изучении случайных величин непрерывного типа полученные значения разбивают на равные интервалы с таким расчетом, чтобы значение интервала было несколько больше погрешности измерения исследуемой величины. Затем подсчитывают частоты не по действительным значениям случайной величины, а по интервалам. Поэтому таблица эмпирического распределения случайной величины непрерывного типа будет иметь следующий вид.

Таблица 2.3 - Эмпирическое распределение случайной величины непрерывного типа.

Интервал значений *X*	**Среднее арифметическое значение** $\overline{X}_i$	**Частота** f_i	**Частость** m_i
160,031 - 160,033	160,032	3	0,03
160,033 - 160,035	160,034	3	0,03
160,035 - 160,037	160,036	5	0,05
160,037 - 160,039	160,038	26	0,26
160,039 - 160,041	160,040	31	0,31
160,041 - 160,043	160,042	19	0,19
160,043 - 160,045	160,044	8	0,08
160,045 - 160,047	160,046	5	0,05
		$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma m_i = 1$

Эмпирическое распределение случайной непрерывной величины графически может быть представлено в виде гистограммы распределения, полигона частот или полигона кумулятивных частот.

Гистограмма распределения представляет собой совокупность соприкасающихся прямоугольников, основания которых равны интервалам разбиения непрерывной случайной величины, а площади пропорциональны частотам, с которыми значения случайной величины попадают в эти интервалы *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10* ***гистограмма*** *(распределения) – это графическое представление распределения частот для количественного признака, образуемое соприкасающимися прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы классов, а площади пропорциональны частотам этих классов)*.

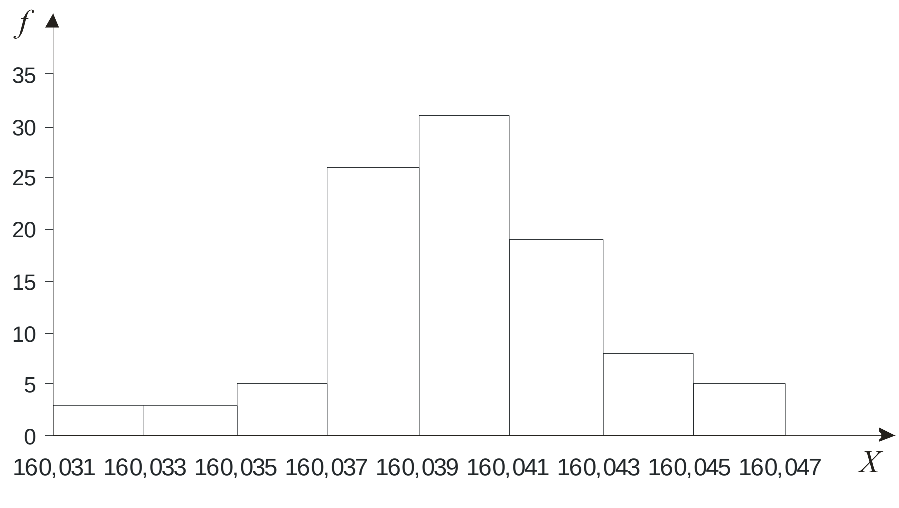

Рисунок 2.4 - Гистограмма распределения случайной непрерывной величины.

Полигон частот – это ломаная линия, получаемая при соединении точек, абсциссы которых равны серединам интервалов разбиения, а ординаты – соответствующим частотам.

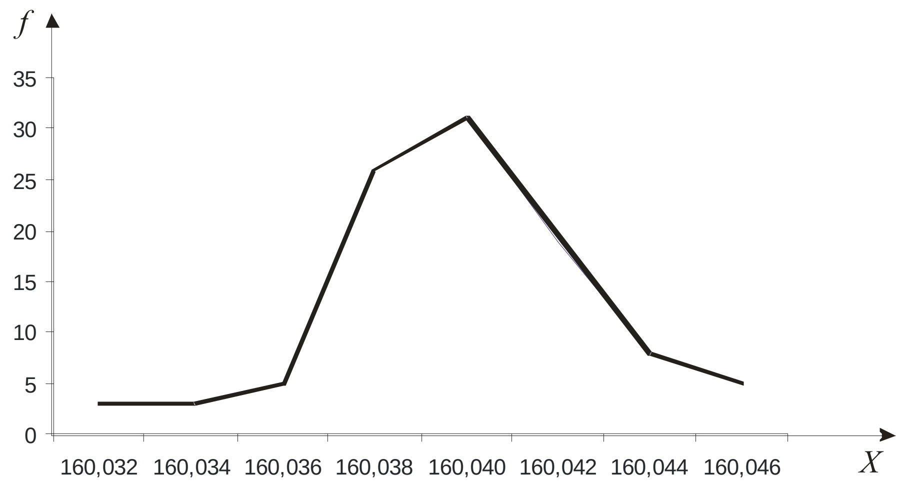

Рисунок 2.5 - Полигон частот случайной непрерывной величины.

Полигон кумулятивных частот – это ломаная линия, получаемая при соединении точек, абсциссы которых равны верхним границам интервалов разбиения, а ординаты – либо кумулятивным частотам, либо кумулятивным частостям (кумулятивным относительным частотам).

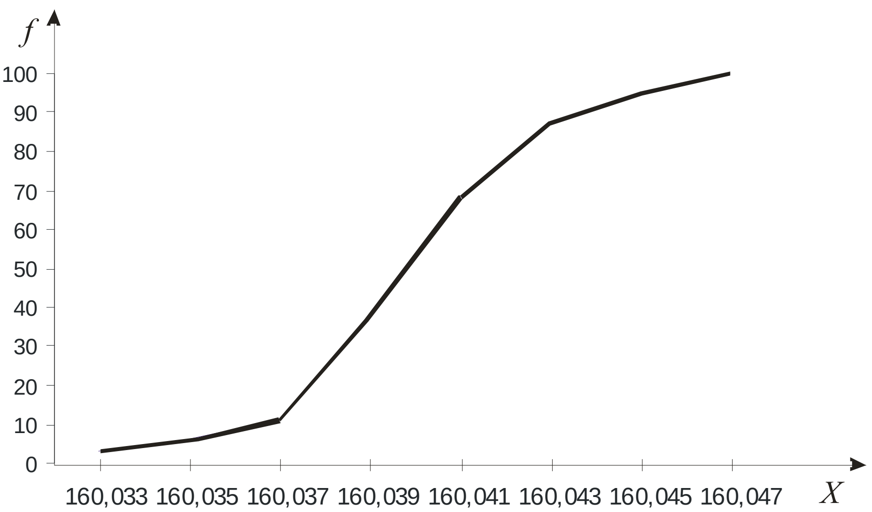

Рисунок 2.6 - Полигон кумулятивных частот случайной непрерывной величины.

При теоретических описаниях случайных величин непрерывного типа используется функция распределения. Теоретическое распределение случайной непрерывной величины графически может быть представлено в виде **ин-**

тегральной, обратной интегральной, дифференциальной функций распределения и функции **интенсивности**.

Пусть X — случайная величина, а x — какое-либо действительное число (при этом $X < x$). Событию X < x отвечает вероятность P(X < x), которая является функцией F(x), т.е.

$$P(X < x) = F(x)$$

F(X) называется ***функцией распределения вероятностей*** случайной величины или интегральной функцией распределения.

Для дискретной случайной величины интегральная функция распределения F(X) легко определяется по таблице или графику.

Таким образом, для приведенного выше примера распределения дискретной случайной величины *(при X < 4):*

$$F(X) = P(_{X<4}) = P(_{X=1}) + P(_{X=2}) + P(_{X=3}) = 1/30 + 4/30 + 15/30 = 19/30$$

График интегральной функции распределения дискретной случайной величины будет иметь вид ступенчатой кривой. Ординаты кривой для любого значения X будут представлять сумму вероятностей предшествующих значений.

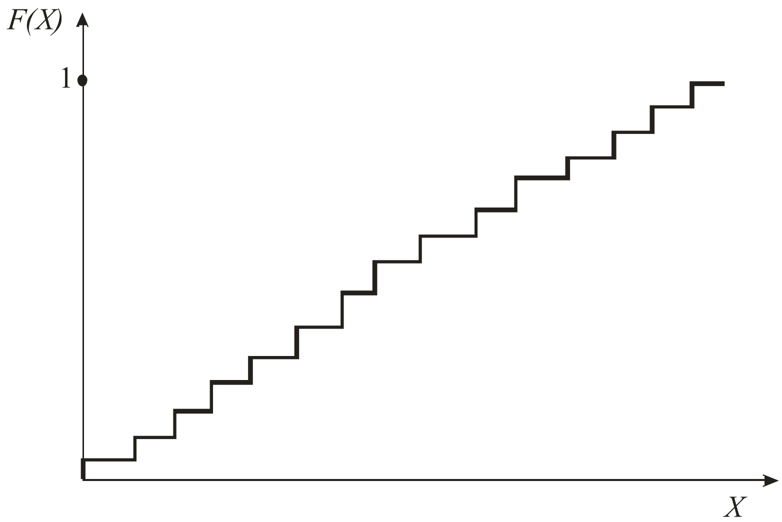

Рисунок 2.7 - Интегральная функция распределения дискретной случайной величины

Вероятность того, что случайная величина при испытаниях окажется в границах двух заданных значений x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$) равна приращению интегральной функции на этом участке, т.е.

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(X < x_2) — P(X < x_1) = F(X_2) — F(X_1)$$

Если обратиться к выше приведенному примеру распределения дискретной случайной величины, то при x1= 2 и x2 = 3:

$$P(2 \le X \le 3) = P(X < 3) — P(X < 2) = F(X2) — F(X1) = 4/30 — 1/30 = 3/30$$

Для непрерывной случайной величины график интегральной функции распределения будет иметь вид монотонно возрастающей кривой. На практике с помощью интегральной функции распределения определяют теоретические частоты распределения.

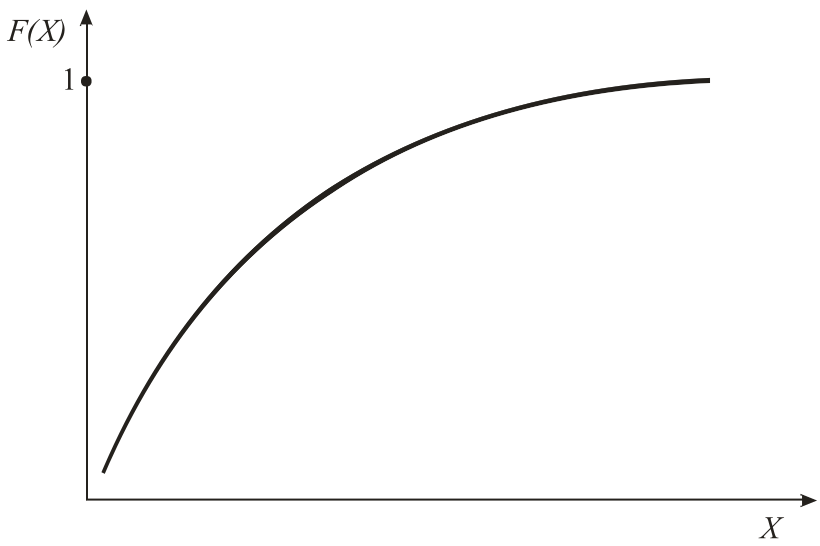

Рисунок 2.8 - Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины

Обратная интегральная функция распределения равна разности между единицей и интегральной функции распределения.

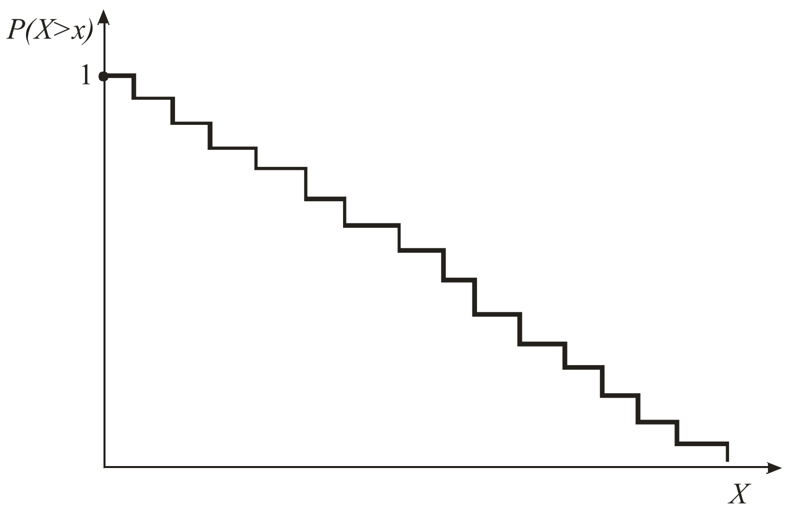

Рисунок 2.8 - Обратная интегральная функция распределения дискретной случайной величины

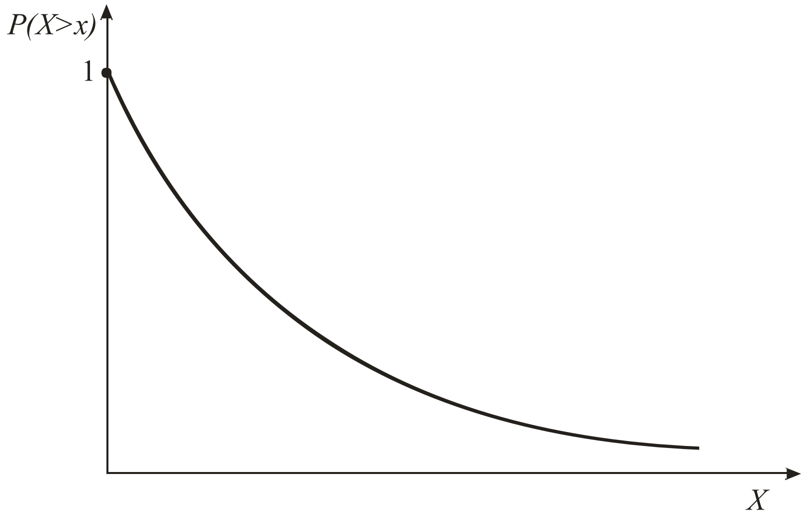

Рисунок 2.9 – Обратная интегральная функция распределения непрерывной случайной величины

Плотностью распределения (дифференциальной функцией распределения) случайной величины называют первую производную от интегральной функции распределения:

$$p(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Для аналитического описания непрерывной случайной величины в теории надежности используют ***функцию интенсивности***, равную отношению дифференциальной функции распределения к обратной интегральной функции распределения:

$$H(x) = \frac{p(x)}{1 - \int_{-\infty}^{x} p(x)dx}$$

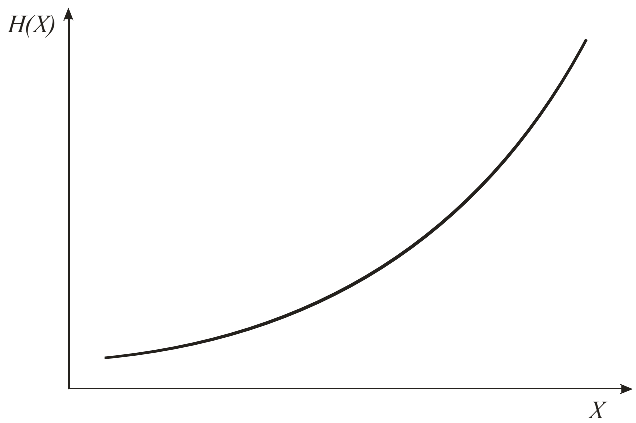

Рисунок 2.10 - Функция интенсивности непрерывной случайной величины.

Для изучения распределений случайных величин в математической статистике пользуются рядом числовых характеристик, определяющих положение центра группирования случайной величины и ее рассеивание около этого центра.

Числовые характеристики положения центра группирования носят общее название мер положения, а числовые характеристики рассеивания — мер рассеивания.

В качестве статистических оценок ***мер положения*** используются при теоретическом распределении: математическое ожидание ***E(X)***; при эмпирическом распределении: среднее арифметическое значение $\bar{X}$, среднее арифметическое взвешенное $\bar{X}_{взвеш}$, среднее гармоническое $\bar{X}_{гарм}$, среднее геометрическое $\bar{X}_{геом}$, среднее геометрическое взвешенное $\bar{X}_{геом\ взвеш}$, среднее квадратическое $\bar{X}_{кв}$, среднее квадратическое взвешенное $\bar{X}_{кв\ взвеш}$, середина размаха, медиана $\tilde{X}$ и мода $\hat{X}$.

В качестве статистических оценок ***мер рассеивания*** используются при теоретическом распределении: дисперсия, коэффициент вариации, квантиль; при эмпирическом распределении: стандартное отклонение и размах.

Математическим ожиданием E(X) дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i p(X_i),$$

где n — число возможных значений случайной величины X.

Математическое ожидание E(X) непрерывной случайной величины *X*, имеющей плотность вероятности *f(X),* рассчитывается как

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\, p(X)\, dX\ ,$$

если интеграл сходится абсолютно.

Пример. Случайная величина имеет следующее распределение:

Таблица 2.4 - Распределение случайной величины

X	0	1	2	3	
p(X)	0,1	0,2	0,5	0,2	$\sum_{0}^{3} p(X_i) = 1$

Математическое ожидание *E(X)* равно

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}8$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется значительно сложнее с использованием интегрального исчисления.

Среднее арифметическое значение $\bar{X}$, среднее гармоническое $\bar{X}_{гарм}$, среднее геометрическое $\bar{X}_{геом}$, и среднее квадратическое $\bar{X}_{кв}$ можно рассчитать по формуле среднего степенного

$$\bar{X}_{ст} = \sqrt[z]{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^z}{n}},$$

где z – показатель степени, позволяющий определить вид среднего;

n — общее число значений X_i.

Среднее арифметическое взвешенное $\bar{X}_{взвеш}$, среднее геометрическое взвешенное $\bar{X}_{геом\ взвеш}$, среднее квадратическое взвешенное $\bar{X}_{кв\ взвеш}$ можно рассчитать по формуле среднего взвешенного

$$\bar{X}_{ст\ взвеш} = \sqrt[z]{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^z \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}},$$

где z – показатель степени, позволяющий определить вид среднего взвешенного;

f_i — частота значений X_i;

n — общее число значений X_i.

Средним арифметическим значением случайной величины называется отношение суммы всех значений случайной величины, полученных в результате конечного числа испытаний, к числу испытаний (*согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 среднее арифметическое – сумма значений, деленная на их число)*:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Среднее арифметическое получают путем подстановки в формулу среднего степенного показателя степени z, равного 1.

Вышеприведенные формулы справедливы при контроле показателей по количественному признаку.

При контроле показателя по альтернативному признаку оцениваемый показатель может принимать только два взаимоисключающих значения, которым сопоставляются два количественных значения: 1 и 0.Частостью варианта 1 (как правило, обозначается p) является доля единиц, обладающих данным признаком в общей статистической совокупности. Разность $1 - p = q$ является частостью варианта 0. Таким образом, среднее арифметическое при контроле по альтернативному признаку вычисляется как:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot p + 0 \cdot q}{p + q} = p\,.$$

Средним арифметическим взвешенным значением случайной величины называется сумма произведений значений случайной величины на их частости (*согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 взвешенное среднее арифметическое – сумма произведений каждого значения на его вес, деленная на сумму весов, где веса – неотрицательные коэффициенты, связанные с каждым значением)*:

$$\overline{X}_{взвеш} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i \cdot f_i}{n},$$

где f_i — частота значений X_i;

n — общее число значений X_i.

$$n = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

m — число дискретных значений X_i.

Для непрерывных случайных величин в качестве X_i принимают середину равных интервалов, на которые разбивается ряд значений X.

Среднее арифметическое взвешенное получают путем подстановки в формулу среднего взвешенного показателя степени z, равного 1.

Довольно часто под средним арифметическим подразумевают среднее арифметическое взвешенное значение.

Среднее гармоническое рассчитывают как

$$\overline{X}_{гарм} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

Среднее гармоническое получают путем подстановки в формулу среднего степенного показателя степени z, равного -1.

Средним геометрическим называют корень n-ой степени из произведения значений случайной величины:

$$\overline{X}_{геом} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}$$

Среднее геометрическое получают путем подстановки в формулу среднего степенного показателя степени z, равного 0.

Среднее геометрическое взвешенное рассчитывают как

$$\overline{X}_{геом\ взвеш} = \sqrt[\sum_{i=1}^{m} f_i]{\prod_{i=1}^{m} X_i^{f_i}}$$

Среднее геометрическое используется для анализа динамики явлений и позволяет определить средний коэффициент роста. При расчете среднего геометрического индивидуальные значения случайной величины представляют собой относительные показатели динамики, полученные как отношения каждого уровня ряда к предыдущему уровню.

Среднее геометрическое взвешенное получают путем подстановки в формулу среднего взвешенного показателя степени z, равного 0.

Средним квадратическим *называют корень n-ой степени из произведения значений случайной величины:*

$$\overline{X}_{кв} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$$

Среднее квадратическое получают путем подстановки в формулу среднего степенного показателя степени z, равного 2.

Среднее квадратическое взвешенное *рассчитывают как*

$$\overline{X}_{кв\ взвеш} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Среднее квадратическое и среднее квадратическое взвешенное применяются при изучении вариации наблюдаемой величины.

Среднее квадратическое взвешенное получают путем подстановки в формулу среднего взвешенного показателя степени z, равного 2.

Согласно правилу мажорантности средних А.Я.Боярского для единой статистической совокупности среднее арифметическое $\overline{X}$, среднее гармоническое $\overline{X}_{гарм}$, среднее геометрическое $\overline{X}_{геом}$, и среднее квадратическое $\overline{X}_{кв}$ связаны между собой следующей зависимостью:

$$\overline{X}_{гарм} < \overline{X}_{геом} < \overline{X} < \overline{X}_{кв}$$

Таким образом, численные значения средних возрастают с ростом показателя степени z.

Серединой размаха называют полусумму наибольшего и наименьшего значений *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 середина размаха – это среднее арифметическое между наибольшим и наименьшим наблюденными значениями количественного признака).*

Если n значений измеряемой величины расположить в порядке их возрастания, то значение, находящееся в самом центре, называют ***медианой*** $\widetilde{X}$ *(согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 медиана – это квантиль порядка р = 0,5).* Если n является нечетным числом, медианой будет значение, которое находится на 1/2(n +1) месте.

Пример. Со станка взято 5 деталей с размерами, в мм: 32,10; 32,05; 31,98; 32,08; 32,03. Расположим полученные размеры в порядке возрастания, в мм: 31,98; 32,03; 32,05; 32,08; 32,10. Так как n = 5, то в качестве медианы берут число, занимающее 1/2(5+1) = 3 место, $\tilde{X}$ = 32,05 мм.

Если n является четным числом, то медианой будет значение, являющееся средним арифметическим из двух соседних значений, находящихся в центре последовательности и занимающих соответственно серединное положение.

Например, если взять 4 детали с размерами, в мм: 32,10; 32,05; 31,98; 32,08 и расположить в порядке возрастания, в мм: 31,98; 32,05; 32,08; 32,10, то

$$\widetilde{X} = (X_2 + X_3)/2 = (32{,}05 + 32{,}08)/2 = 32{,}065 \text{ мм}$$

Модой $\widehat{X}$ называется наиболее часто встречающееся значение в статистической совокупности (*согласно СТБ ГОСТ Р 50779.10 мода – это значение случайной величины, при котором функция распределения вероятностей масс или плотность распределения вероятностей имеет максимум).*

Для эмпирических распределений дискретной случайной величины мода находится непосредственно по классическому определению. Для эмпирических распределений непрерывной случайной величины сначала определяют модальный интервал $h_k = x_k – x_{k-1}$, которому соответствует максимальная частота f_k. Значение моды внутри модального интервала определяют по интерполяционной формуле Р.М.Орженцкого:

$$\widehat{X} = x_{k-1} + h_k \frac{f_k - f_{k-1}}{\left(f_k - f_{k-1}\right) + \left(f_k - f_{k+1}\right)},$$

где x_{k-1} – нижняя граница модального интервала;

h_k – длина модального интервала;

f_{k-1}, f_k, f_{k+1} – частота интервала, соответственно предшествующего модальному, модальному и следующему за модальным.

Математическое ожидание обычно используется в качестве меры положения для теоретических распределений, в которых возможные значения X оцениваются при помощи вероятностей. В эмпирических распределениях, где наблюдаемые значения X оцениваются при помощи частот или частостей, в качестве меры положения используется среднее арифметическое, среднее арифметическое взвешенное, среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее геометрическое взвешенное, среднее квадратическое, среднее квадратическое взвешенное, середина размаха, медиана и мода.

Дисперсией дискретной случайной величины называется сумма произведений квадратов отклонений случайной величины X от ее математического ожидания на соответствующие вероятности

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - E(X)\right)^2 p\left(X_i\right)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(X)$, рассчитывается как

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 p(X) dX,$$

если этот интеграл сходится.

Эта величина применяется в качестве меры рассеивания теоретического распределения, а для эмпирического распределения используется аналогичная величина σ^2, которая определяется как сумма произведений квадратов отклонений значений случайной величины X_i от ее среднего арифметического значения X на соответствующее частости $f_i/(n-1)$. Тогда σ^2 при различных случаях определяется из следующих зависимостей

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i$$

Вышеприведенные формулы справедливы при контроле показателей по количественному признаку.

При контроле показателя по альтернативному признаку оцениваемый показатель может принимать только два взаимоисключающих значения, которым сопоставляются два количественных значения: 1 и 0.Частостью варианта 1 (как правило, обозначается p) является доля единиц, обладающих данным признаком в общей статистической совокупности. Разность $1 - p = q$ является частостью варианта 0. Таким образом, дисперсия эмпирического распределения при контроле по альтернативному признаку вычисляется как:

$$\sigma^2 = \frac{(1-p)^2 p + (0-p)^2 q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq\,.$$

Таким образом, дисперсия эмпирического распределения случайной величины, контролируемой по альтернативному признаку, равна произведению доли единиц, обладающих данным признаком, на долю единиц, не обладающих этим признаком.

Дисперсия эмпирического распределения случайной величины, контролируемой по альтернативному признаку, принимает наибольшее значение $pq = 0,25$ при условии равнозначности p и q, то есть когда $p = q = 0,5$.

На практике используют не саму дисперсию, а квадратный корень из нее, называемый ***стандартным отклонением*** (***средним квадратическим отклонением)***.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}$$

Размерность σ совпадает с размерностью самой случайной величины ***X***.

Коэффициентом вариации называют отношение стандартного отклонения случайной величины к ее математическому ожиданию

$$CV = \frac{\sigma_X}{E(X)}$$

Квантилем z случайной величины ***X*** называется такое значение случайной величины, которому соответствует значение интегральной функции распределения, равное ***z***. (согласно *СТБ ГОСТ Р 50779.10 квантиль – это значение случайной величины X_p, для которого функция распределения принимает значение p (0 < p < 1) или ее значение изменяется скачком от меньшего p до превышающего p).*

Размахом называется разность между наибольшим и наименьшим наблюдаемыми значениями случайной величины.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Размахом пользуются как мерой рассеивания в эмпирических распределениях при малом числе наблюдений (когда $n \leq 10$).

Дл более подробного описания особенностей распределения П.Л.Чебышевым были предложены начальный и центральный моменты n-го порядка.

Начальный момент n-го порядка определяется как

$$\varphi(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^n p(X)\,dX$$

Центральный момент n-го порядка определяется как

$$\varphi(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^n p(X)\,dX$$

При представлении случайной величины при помощи **статистических оценок** важно знать **вид** её **распределения**.

При наличии определенных условий распределения случайных величин могут подчиняться вполне определенным законам. Дискретные случайные величины могут распределяться по закону биноминального распределения (Бернулли), закону редких событий (Пуассона), закону геометрического распределения, закону Паскаля и закону гипергеометрического распределения; непрерывные случайные величины — по закону нормального распределения (Гаусса), закону равной вероятности, закону эксцентриситета (Релея), закону распределения модуля разности, показательному закону и закону Вейбулла.

Закон нормального распределения находит большое применение в различных отраслях техники. Этому закону подчиняются многие непрерывные случайные величины, встречающиеся в технике, например, погрешности измерения, высота микронеровностей обработанной поверхности.

Из математической статистики известно, что если изучаемая величина является результатом действия нескольких независимых случайных факторов, то даже если последние нам не известны, эта величина имеет нормальное распределение.

Это положение дает объяснение тому факту, что при обработке деталей на настроенных станках действительные размеры деталей подчиняются закону нормального распределения, т.к. на разброс размеров оказывает влияние большое количество факторов, зависящих от станка, приспособления, инструмента и заготовки.

Дифференциальная функция распределения случайной величины, подчиняющейся закону нормального распределения, имеет следующее выражение

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(x-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

а интегральная функция распределения

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} \varphi(x)dx$$

Дифференциальная функция нормального распределения графически выражается кривой следующего вида.

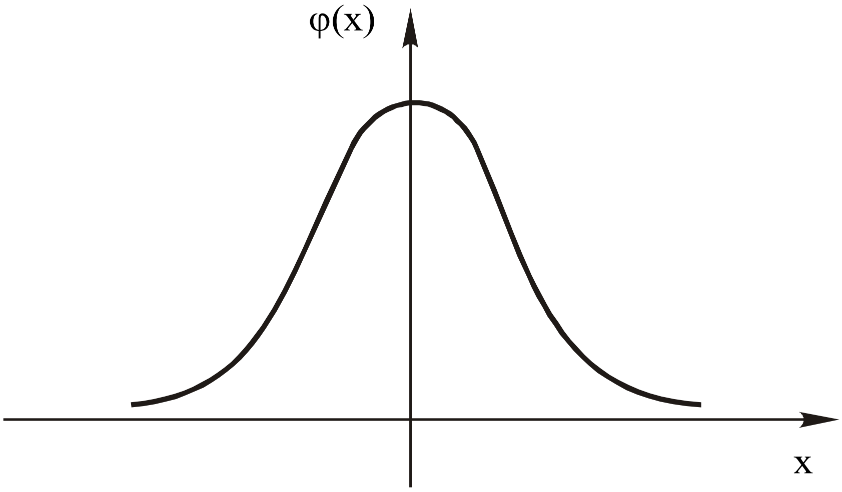

Рисунок 2.11 – Дифференциальная функция нормального распределения

Интегральная функция нормального распределения графически выражается кривой следующего вида.

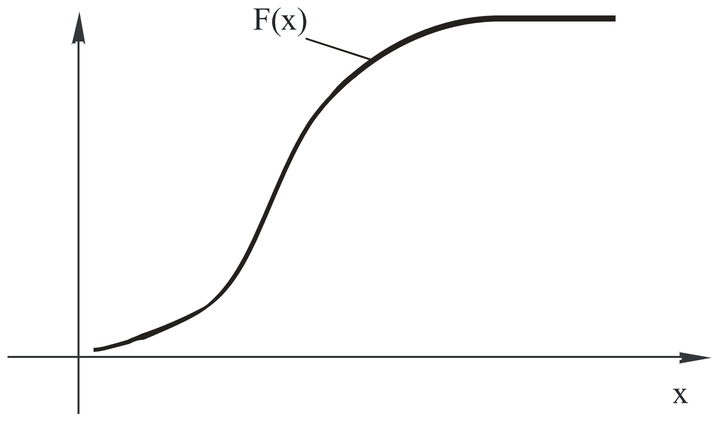

Рисунок 2.12 – Интегральная функция нормального распределения

Вероятность попадания случайной величины в интервал 6σ $(\pm 3\sigma)$ равна 0,9973, т.е. лишь 0,27 % значений может выйти за указанный предел. Поэтому в инженерной деятельности $\pm 3\sigma$ принято считать достаточными пределами распределения случайной величины.

Положение кривой относительно начала координат и ее форма определяются двумя параметрами $\overline{x}$ и σ. С изменением $\overline{x}$ форма кривой не изменяется, но изменяется ее положение относительно начала координат. С изменением σ положение кривой не изменяется, но изменяется ее форма. С уменьшением σ кривая становится более вытянутой, а ветви ее сближаются.

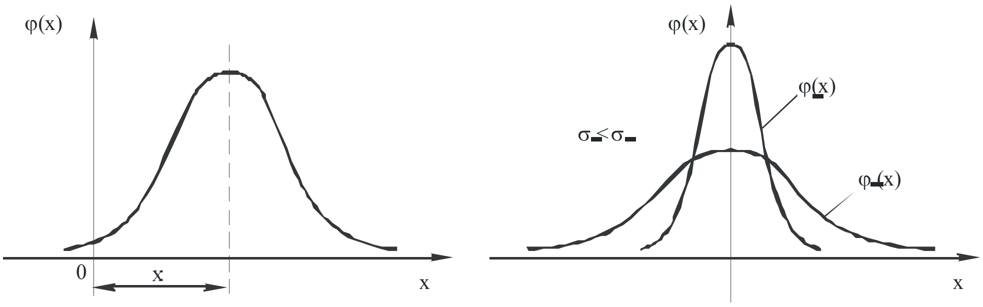

Рисунок 2.13 – Изменение графического вида дифференциальной функции нормального распределения при изменении мер положения и рассеяния

В процессе изготовления деталей машин качество их изготовления зависит от технологических факторов, в большей или меньшей степени влияющих на точность обработки. Часть из этих факторов является причиной систематических погрешностей, которые носят постоянный или переменный характер.

Другая часть факторов, влияющих на точность обработки, является причиной случайных погрешностей, приводящих к рассеянию размеров деталей в пределах поля допуска. Случайные погрешности возникают вследствие колебания величин припусков в различных деталях, различных параметров.

Если после измерения партию деталей разбить на группы с одинаковыми размерами, и отклонениями и построить графическую зависимость, то получим кривую распределения размеров, которая характеризует точность обработки деталей. Случайные погрешности в размерах обрабатываемых деталей подчиняются закону нормального распределения, который графически изображается кривой Гаусса.

Если непрерывная случайная величина X при испытаниях принимает все значения интервала с одинаковой плотностью вероятности $p(x)$, то распределение плотности вероятности имеет следующий вид:

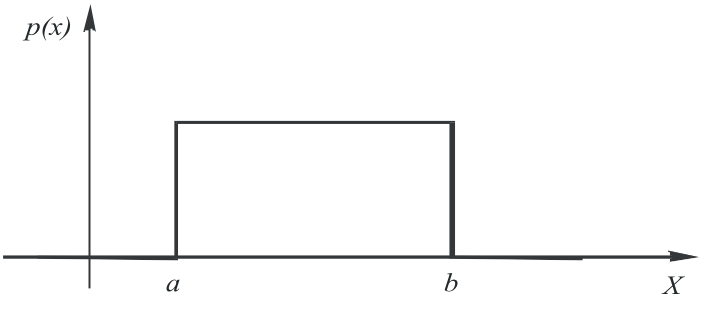

Рисунок 2.14 – Дифференциальная функция распределения закона равной вероятности

Дифференциальная функция распределения закона **равной вероятности** будет определена как:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}$$

Закон равной вероятности имеет два параметра *E(X)* и σ, которые определяются по следующим формулам:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(X) = \frac{1}{2} + \frac{x}{b-a}$$

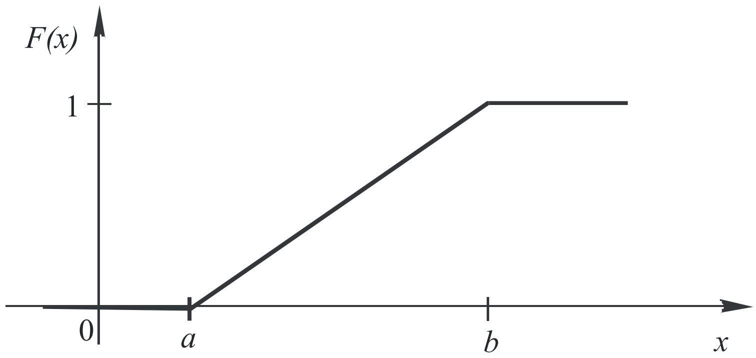

Рисунок 2.15 – Интегральная функция распределения закона равной вероятности

Если рассеивание размеров зависит от только от переменных систематических погрешностей, то распределение действительных размеров партии обработанных заготовок подчиняется закону равной вероятности.

Закон равной вероятности распространяется на распределение размеров заготовок повышенной точности (5-6 квалитет и выше), при их обработке по методу пробных ходов. Из-за сложности получения размеров высокой точности вероятности попадания размера заготовки в узкие допуска становится одинаковой.

Закон распределения эксцентриситета имеет место при отклонениях от соосности осей или биении поверхностей деталей. Также этот закон находит широкое применение в теории стрельбы и статистической теории связи.

Закон распределения Релея однопараметрический и дифференциальная функция его распределения имеет выражение

$$\varphi(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

где r — переменная величина эксцентриситета или биения;

σ — стандартное отклонение значений координат X_1 и X_2 эксцентриситета r.

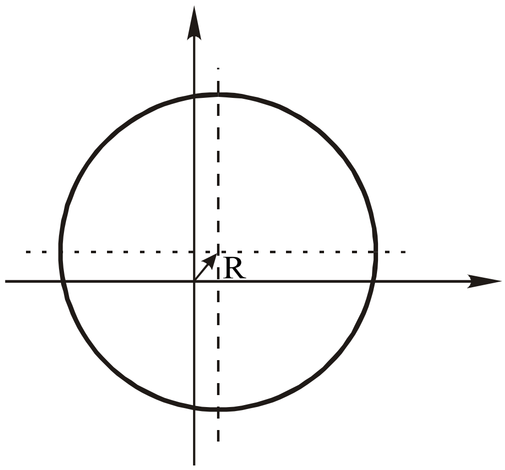

Рисунок 2.16 – Графическая интерпретация эксцентриситета

Интегральный закон распределения эксцентриситета имеет выражение

$$F(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

Графически изображение дифференциальной функции распределения имеет вид.

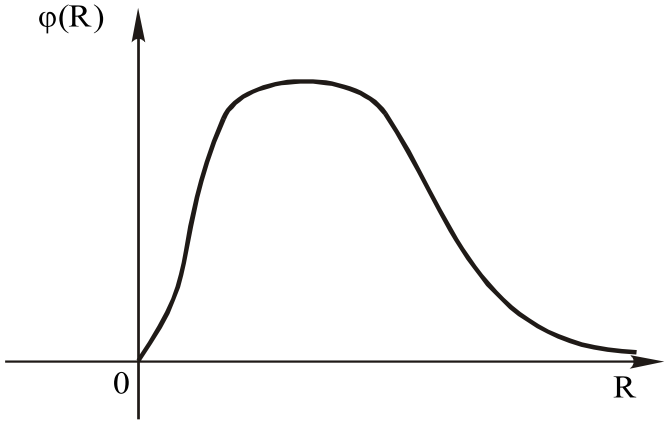

Рисунок 2.17 – Дифференциальная функция распределения эксцентриситета

Особенностью данного закона является то, что координаты X_1 и X_2 положения эксцентриситета r распределены нормально, а само распределение r не является нормальным. Связь между σ_r, $\bar{r}$ и σ выражается следующими зависимостями:

$$\bar{r} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad\qquad \sigma_r = \sigma\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}$$

где $\bar{r}$ — среднее арифметическое значение случайной величины r;

σ_r — стандартное отклонение r от r_0.

Так, например, при механической обработке заготовок на настроенных станках точность получаемых размеров одновременно зависит как от близких по величине и независимых друг от друга случайных причин, обуславливающих распределение размеров по закону Гаусса, так и от систематических погрешностей возникающих со временем вследствие равномерного износа режущего инструмента.

Когда две случайные величины X_1 и X_2 каждая в отдельности имеют нормальное распределение с параметрами $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то модуль разности этих величин $\rho = |X_1 - X_2|$ имеет распределение, которое носит название **закона распределения модуля разности**. Этому закону распределения часто подчиняются, например, погрешности расположения поверхностей и осей, а также погрешности формы деталей: овальность, конусность.

Дифференциальная функция этого распределения имеет вид:

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(\rho+\rho_0)^2}{2}}\right)$$

где

$$\rho = \frac{r}{\sigma_0},$$

$$\rho_0 = \frac{\bar{X}_0}{\sigma_0}, \ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0, \ \bar{X}_0 = |\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$$

($\bar{X}_0$ и σ_0 — параметры распределения модуля разности r).

Вид кривой распределения $\varphi(\rho)$ зависит от значения ρ_0. При $\rho_0 = 0$ кривая резко ассиметрична, при $\rho_0 = 3$ она совпадает с кривой нормального распределения.

Показательный закон распределения является однопараметрическим. Плотность вероятности и функция распределения у него соответственно равны

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

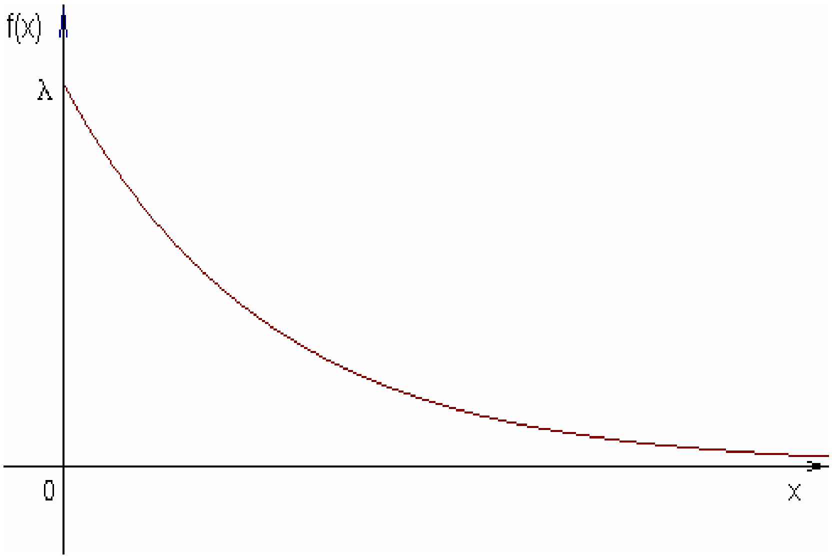

Рисунок 2.18 – Дифференциальная функция показательного распределения.

Плотность вероятности и функция распределения **закона Вейбулла** задаются формулами

$$P(X) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}};$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}$$

Из закона Вейбулла при $\beta = 1$ следует показательный закон, а при $\beta = 2$ – распределение Релея.

Для определения закона распределения случайной величины необходимо выполнить следующие действия:

1. Определить размах результатов измерений.
2. Разбить диапазон разброса значений на 8-12 равных интервалов.
3. Определить частоты для каждого из интервалов. Сумма частот всех интервалов должна быть равна объёму выборки.
4. Определить частости для каждого из интервалов. Сумма частостей всех интервалов должна быть равна единице.
5. Построить гистограмму распределения.
6. Построить полигон частот.

7. Оценить вид эмпирического распределения.
8. Выдвинуть статистическую гипотезу о виде эмпирического распределения.
9. Обосновать выбор критериев согласия для проверки выдвинутой статистической гипотезы.
10. Проверить статистическую гипотезу.

При исследовании закона распределения случайной величины размах делят на m равных интервалов (как правило, m=8..12), при этом количество интервалов разбиения выбирают таким образом, чтобы размах по возможности **нацело делился на m**.

Для каждого из интервалов разбиения определяют границы интервала, среднее арифметическое, частоту и частость. Среднее арифметическое интервала находят как полусумму наибольшего и наименьшего значений в интервале. Все результаты вычислений можно представить в данной таблице:

Таблица 2.5 – Расчет частот.

№ интервала	**границы интервала**	$\overline{X}_i$	f_i	$f_i^{/}$

После заполнения таблицы желательно проверить правильность расчёта частот и частостей. Сумма частот всех интервалов должна быть равна объёму выборки. Сумма частостей всех интервалов должна быть равна единице.

Для оценки вида эмпирического распределения случайной величины строят гистограмму распределения и полигон частот.

После оценки вида эмпирического распределения выдвигают статистическую гипотезу, которая в общем случае записывается как: «Данная эмпирическая совокупность является частью генеральной статистической совокупности, которая при количестве членов, стремящемся к бесконечности, будет распределена по определенному закону распределения».

Для проверки статистической гипотезы пользуются рядом критериев, из которых наиболее широкое применение получили критерии λ Колмогорова и критерий χ^2 Пирсона.

Критерий Колмогорова λ дает достаточно точные результаты даже при объеме выборок, состоящих из нескольких десятков членов и прост для вычисления.

$$\lambda = \frac{\left|N_x^{/} - N_x\right|_{\max}}{n}\sqrt{n}$$

где $N_x^{/}$, N_x — накопленные теоретические и эмпирические частоты ($N_x = \sum_{i=1}^{m} f_i$, f_i — частота).

Результаты вычисления накопленных частот рекомендуется представить в таблице следующего вида:

Таблица 2.6 – Расчет накопленных частот.

Номер интервала	**t**	**z(t)**	$f_i^{/}$	f_i	$N_i^{/}$	N_i	$\lvert N_i' - N_i \rvert$

Функция *P(λ)* табулирована. Если вероятность *P(λ)* ≤ 0,05, то гипотеза отвергается.

Критерий Пирсона χ^2 вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(f_i - f_i^{/}\right)^2}{f_i^{/}},$$

где *m* — число сравниваемых частот.

f_i и $f_i^{/}$ — эмпирическая и теоретическая частоты соответственно i-го интервала значений *X*.

Далее рассчитывается число степеней свободы

$$k = m - p - 1,$$

где *p* — число параметров теоретического распределения (р = 2 для нормального и равновероятного распределения, р = 1 для эксцентриситета).

По величине *k*, используя таблицы можно определить $P(\chi^2)$. Если $P(\chi^2) \leq 0{,}05$, то гипотеза о законе распределения отвергается.

Для нормального закона распределения теоретические частоты $f_i^{/}$ находят по формуле

$$f_i^{/} = \frac{n \cdot R / m}{\sigma} z(t)$$

где z(t) = φ(t) – функция нормированного нормального распределения, рассчитываемая по формуле

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{o}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где t рассчитывается по следующей формуле:

$$t = \frac{\left|\overline{X}_i - \overline{X}\right|}{\sigma}$$

Для расчёта *z(t)* используются табулированные значения.

Для нормального закона распределения теоретические частоты $f_i^{/}$ находят по формуле

$$f' = \frac{n \cdot R / m}{2\sqrt{3} \cdot \sigma}$$

Таблица 2.7 – Плотность распределения z(t) нормированного нормального распределения

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	,39849	,39892	,39886	,39876	,39862	,39844	,39822	,39797	,39767	,39733
0,1	,39695	,39654	,39608	,39559	,39505	,39448	,39387	,39322	,39253	,39181
0,2	,39104	,39024	,38940	,38853	,38762	,38667	,38568	,38466	,38361	,38251
0,3	,38139	,38023	,37903	,37780	,37654	,37542	,37391	,37255	,37115	,36973
0,4	,36827	,36678	,36526	,36371	,36213	,36053	,35889	,35723	,35553	,35381
0,5	,35207	,35029	,34849	,34667	,34482	,34294	,34105	,33912	,33718	,33521
0,6	,33322	,33121	,32918	,32713	,32506	,32297	,32086	,31874	,31659	,31443
0,7	,31225	,31006	,30785	,30563	,30339	,30114	,29887	,29659	,29431	,29200
0,8	,28969	,28737	,28504	,28269	,28034	,27798	,27562	,27324	,27086	,26848
0,9	,26609	,26369	,26129	,25888	,25647	,25406	,25164	,24923	,24681	,24439
1,0	,24197	,23955	,23713	,23471	,23230	,22988	,22747	,22506	,22265	,22025
1,1	,21785	,21546	,21307	,21069	,20831	,20594	,20357	,20121	,19886	,19652
1,2	,19419	,19186	,18954	,18724	,18494	,18265	,18037	,17810	,17585	,17360
1,3	,17137	,16915	,16694	,16474	,16256	,16038	,15822	,15608	,15395	,15183
1,4	,14937	,14764	,14556	,14350	,14146	,13943	,13742	,13542	,13344	,13147
1,5	,12952	,12758	,12556	,12376	,12188	,12051	,11816	,11632	,11450	,11270
1,6	,11092	,10915	,10741	,10567	,10396	,10226	,10059	,09893	,09728	,09566
1,7	,09405	,09246	,09089	,08933	,08780	,08628	,08478	,08329	,08183	,08038
1,8	,07895	,07754	,07614	,07477	,07341	,07206	,07074	,06943	,06814	,06687
1,9	,06562	,06438	,06316	,06195	,06077	,05959	,05844	,05730	,05618	,05508
2,0	,05399	,05292	,05186	,05082	,04980	,04879	,04780	,04682	,04586	,04491
2,1	,04398	,04307	,04217	,04128	,04041	,03955	,03871	,03788	,03706	,03626
2,2	,03547	,03470	,03394	,03319	,03246	,03174	,03103	,03034	,02965	,02898
2,3	,02833	,02768	,02705	,02643	,02582	,02522	,02463	,02406	,02349	,02294
2,4	,02239	,02186	,02134	,02083	,02033	,01984	,01936	,01889	,01842	,01797
2,5	,01753	,01709	,01667	,01625	,01585	,01545	,01506	,01468	,01431	,01394
2,6	,01358	,01323	,01289	,01256	,01223	,01191	,01160	,01130	,01100	,01071
2,7	,01042	,01014	,00987	,00961	,00935	,00909	,00885	,00861	,00837	,00814
2,8	,00792	,00770	,00748	,00727	,00707	,00687	,00668	,00649	,00631	,00613
2,9	,00595	,00578	,00562	,00545	,00530	,00514	,00499	,00485	,00471	,00457
3,0	,00443	,00327	,00238	,00172	,00123	,00087	,00061	,00042	,00029	,00020

Таблица 2.8 – Значения вероятностей Р(λ) для различных λ

λ	***P(λ)***	*λ*	***P(λ)***	*λ*	***P(λ)***	*λ*	***P(λ)***
0,30	1,000	0,70	0,7112	1,20	0,1122	2,00	0,0007
0,35	0,9997	0,75	0,6272	1,30	0,0681	2,10	0,0003
0,40	0,9972	0,80	0,5441	1,40	0,0397	2,20	0,0001
0,45	0,9874	0,85	0,4653	1,50	0,0222	2,30	0,0001
0,50	0,9639	0,90	0,3927	1,60	0,0120	2,40	0,0000
0,55	0,9228	0,95	0,3275	1,70	0,0062	2,50	0,0000
0,60	0,8643	1,00	0,2700	1,80	0,0032		
0,65	0,7920	1,10	0,1777	1,90	0,0015		

Таблица 2.9 – Таблица вероятностей Р для критерия χ^2

χ^2	***k***							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0,3173	0,6055	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	0,1574	0,3679	0,5724	0,7358	0,8491	0,9197	0,9598	0,9810
3	0,0833	0,2231	0,3916	0,5578	0,7000	0,8088	0,8850	0,9344
4	0,0455	0,1353	0,2615	0,4060	0,5494	0,6767	0,7798	0,8571
5	0,0254	0,0821	0,1718	0,2873	0,4159	0,5438	0,6600	0,7576
6	0,0143	0,0498	0,1116	0,1991	0,3062	0,4132	0,5398	0,6472
7	0,0081	0,0302	0,0719	0,1359	0,2206	0,3208	0,4289	0,5366
8	0,0047	0,0183	0,0460	0,0916	0,1562	0,2381	0,3326	0,4335
9	0,0027	0,0111	0,0293	0,0611	0,1091	0,1736	0,2527	0,3423
10	0,0016	0,0067	0,0186	0,0404	0,0752	0,1247	0,1886	0,2650
11	0,0009	0,0041	0,0117	0,0266	0,0514	0,0884	0,1386	0,2017
12	0,0005	0,0025	0,0074	0,0174	0,0348	0,0620	0,1006	0,1512
13	0,0003	0,0015	0,0046	0,0113	0,0234	0,0430	0,0721	0,1119
14	0,0002	0,0009	0,0029	0,0073	0,0156	0,0296	0,0512	0,0818
15	0,0001	0,0006	0,0018	0,0047	0,0104	0,0203	0,0360	0,0591
16	0,0001	0,0003	0,0011	0,0030	0,0068	0,0138	0,0251	0,0424
17	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0045	0,0093	0,0174	0,0301
18		0,0001	0,0004	0,0012	0,0029	0,0062	0,0120	0,0212
19		0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0042	0,0082	0,0149
20		0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0028	0,0056	0,0103
21			0,0001	0,0003	0,0008	0,0018	0,0038	0,0071
22			0,0001	0,0002	0,0005	0,0012	0,0025	0,0049
23			0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0034
24				0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0023
25				0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016
26				0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010
27					0,0001	0,0001	0,0003	0,0007
28					0,0000	0,0001	0,0002	0,0005
29						0,0001	0,0001	0,0003
30						0,0000	0,0001	0,0002

В выводе необходимо указать закон распределения случайной величины и вероятность, с которой подтверждается статистическая гипотеза. Также необходимо охарактеризовать исследованную случайную величину с помощью мер положения и рассеивания. Для эмпирических распределений наиболее представительными являются среднее арифметическое и стандартное отклонение, при этом количество разрядов в среднем арифметическом соответствует количеству разрядов индивидуальных значений, а стандартное отклонение округляют до двух значащих цифр.

3 Статистический анализ возможностей процесса

Внедрение статистических методов управления качества предполагает проведение статистической оценки точности и стабильности процессов. Она традиционно проводится на стадии предварительного анализа технологических процессов и позволяет изучать возможности технологического оборудования и исследовать изменчивость процесса. Под изменчивостью процесса понимают неизбежные различия среди индивидуальных значений процесса, которые возникают вследствие огромного количества факторов, влияющих на качество процесса. Некоторые причины изменчивости процесса порождают кратковременные различия между единицами продукции, другие причины имеют тенденцию создавать изменения в продукте только в течение длительных интервалов времени.

Причины изменчивости процесса принято делить на **обычные** и **особые**. К **обычным причинам** относятся многочисленные источники изменчивости в процессе, которые имеют стабильное и повторяемое распределение во времени. Обычные причины ведут себя как стабильная система случайных факторов. Если присутствуют только обычные причины, и они не изменяются, то выход процесса предсказуем, а сам процесс находится в статистически стабильном состоянии.

Особые причины изменчивости являются факторами, которые воздействуют на процесс нерегулярно. Если все особые причины изменчивости процесса не идентифицированы и не устранены, то они будут влиять на выход процесса непредсказуемым образом. При наличии особых причин выход процесса не стабилен во времени.

В зависимости от причин возникновения изменчивости процесса различают собственную и полную изменчивости процесса.

Собственная изменчивость процесса – это часть изменчивости процесса, вызываемая только обычными причинами. Эта изменчивость оценивается с помощью отношений $\overline{R}/d_2$ или $\overline{s}/c_4$, где $\overline{R}$ – среднее арифметическое значение выборочных размахов, полученных на стадии предварительного анализа процесса при измерении в подгруппах между двумя ближайшими наладками процесса, $\overline{s}$ – среднее арифметическое значение выборочных стандартных отклонений в подгруппах, d_2 и c_4 – стандартные коэффициенты, зависящие от объема выборки.

Значения стандартных коэффициентов d_2 и c_4 приведены в таблице 3.1.

Полная изменчивость процесса – это изменчивость, вызываемая как обычными, так и особыми причинами. Эта изменчивость оценивается с помощью выборочного стандартного отклонения, использующего все индивидуальные значения:

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

Таблица 3.1 – Зависимость коэффициентов d_2 и c_4 от объёма выборки n.

n	d_2	c_4	n	d_2	c_4
2	1,128	0,7979	14	3,407	0,9810
3	1,693	0,8862	15	3,472	0,9823
4	2,059	0,9213	16	3,532	0,9835
5	2,326	0,9400	17	3,588	0,9845
6	2,534	0,9515	18	3,640	0,9854
7	2,704	0,9594	19	3,689	0,9862
8	2,847	0,9650	20	3,735	0,9869
9	2,970	0,9693	21	3,778	0,9876
10	3,078	0,9727	22	3,819	0,9882
11	3,173	0,9754	23	3,858	0,9887
12	3,258	0,9776	24	3,895	0,9892
13	3,336	0,9794	25	3,931	0,9896

При расчете оценок собственной и полной изменчивостей полученные значения необходимо округлить до ***двух значащих цифр***.

Для оценки возможности процесса используют ряд параметров. При этом процесс должен быть сначала доведен до статистически стабильного состояния, кроме того, индивидуальные значения процесса должны образовывать приблизительно нормальное распределение.

Показатели возможностей характеризуют потенциальные и фактические возможности процесса удовлетворять установленным техническим допускам для значений выходного показателя качества, измеряемого по количественному признаку.

Показатели возможностей используют для следующих ***целей***:

- предконтрактный анализ потенциальных возможностей поставщика удовлетворять требования потребителя;
- установление в контрактах (договорах на поставку) требований к процессам;
- планирование качества разрабатываемой продукции;
- приемка процессов на основе опытных партий;
- аттестация процессов;
- планирование приемочного контроля;
- планирование непрерывного улучшения процессов;
- аудиты второй стороной и внутренние аудиты процессов.

Для применения показателей возможностей процесса изменчивость результатов измерений, обусловленная измерительной системой должна быть мала по сравнению с допуском.

Для оценки возможностей статистического управления процессом традиционно используют разновидности индексов воспроизводимости и пригодности процесса, которые характеризуют потенциальные и фактические возможности процесса удовлетворять установленным техническим допускам для значений выходного показателя качества, измеряемого по количественному признаку. Данные показатели возможностей используют в предконтрактном анализе потенциальных возможностей поставщика удовлетворять требования потребителя, при установлении в контрактах (договорах на поставку) требований к процессам, при планировании качества разрабатываемой продукции, при приемке процессов на основе опытных партий, при аттестации процессов, при планировании приемочного контроля и непрерывного улучшения процессов, во время проведения аудитов второй стороной и внутренних аудитов процессов. Для применения показателей возможностей процесса изменчивость результатов измерений, обусловленная измерительной системой должна быть мала по сравнению с допуском.

Суть статистического управления заключается в том, чтобы изменчивость статистически стабильного процесса поддерживать в рамках допуска. Под статистически управляемым процессом понимается статистически стабильный процесс, изменчивость которого на определенную величину меньше допуска.

СТБ ГОСТ Р50779.44 «Статистические методы. Показатели возможностей процессов. Основные методы расчета» устанавливает индексы воспроизводимости (C_p, C_{pk}) и пригодности (P_p, P_{pk}), область их применения и методы расчета. Недостатками данного стандарта являются отсутствие формализованных критериев для определения статистической стабильности и статистической управляемости процессов, при этом все методики расчета показателей возможностей приводятся только для процесса, изменчивость которого подчиняется нормальному закону распределения и оценивается с вероятностью 99,73%. Данные условия характерны для «идеальных» процессов, среди факторов возникновения изменчивости которых отсутствуют доминирующие. В действительности такие процессы встречаются крайне редко. Отличие от нормальности может быть обусловлено или особыми причинами возникновения изменчивости (процесс статистически не стабилен), или стремлением процесса к разладке. Разладка процесса может проявляться в виде дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса, увеличения поля рассеяния или их комбинации. Для статистического регулирования необходимым является условие существенного превышения допуска изменчивости процесса для обеспечения возможности проведения выборочного контроля. Поэтому из-за стремления любого процесса к разладке при наличии дрейфа центра группирования значений показателя качества изменчивость процесса за время между любыми двумя соседними наладками будет распределена по закону, отличному от нормального. При этом, чем более управляем будет процесс, тем в большей степени распределение его изменчивости в пределах допуска будет стремиться к трапециидальному.

Основными, но не единственными направлениями снижения изменчивости процессов могут быть снижение и устранение влияния неслучайных (особых) причин изменчивости (обеспечение стабильности процессов) и снижение влияния случайных (обычных) причин изменчивости (повышение возможностей процессов удовлетворять установленным требованиям).

Используя индексы воспроизводимости и пригодности можно определить статистическую стабильность и статистическую управляемость процессов, что необходимо при внедрении контрольных карт регулирования. Сравнивая между собой значения индексов воспроизводимости (C_p, C_{pk}) и пригодности (P_p, P_{pk}), полученных в различные периоды времени, можно оценить эффективность проведения мероприятий по повышению качества продукции. Корректирующие действия должны повышать стабильность процесса и уменьшать его изменчивость, что предполагает максимальное приближение индекса пригодности P_p к индексу воспроизводимости C_p и последовательное увеличение индекса воспроизводимости. Если после проведения корректирующих мероприятий индексы воспроизводимости и пригодности остались неизменными (или даже уменьшились), то это свидетельствует о принятых неэффективных управляющих решениях.

Наиболее рациональным представляется использование сбалансированной системы показателей возможностей процесса, которая позволяет оценить составляющие изменчивости процесса, исследовать динамику их изменения, повысить качество проектирования дифференцированных корректирующих мероприятий по улучшению качества продукции. Кроме традиционно используемых индексов воспроизводимости и пригодности рассчитывают индекс стабильности, индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости, индекс нелинейности смещения центра группирования выборочной изменчивости, индекс динамики рассеяния, индекс нестабильности рассеяния выборочной изменчивости, индекс наибольшего выборочного рассеяния.

Индекс воспроизводимости C_p рассчитывают как отношение допуска к оценке собственной изменчивости процесса без учёта его центровки:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{k\sigma_{\bar{R}/d_2}}$$

где USL — верхняя граница поля допуска;

LSL — нижняя граница поля допуска;

k — коэффициент, зависящий от закона распределения показателя качества процесса и достоверной вероятности.

Верхний индекс воспроизводимости CPU определяется как отношение отклонения среднего уровня процесса от верхнего предела поля допуска к действительному верхнему разбросу процесса:

$$CPU = \frac{USL - \overline{\overline{X}}}{k/2\, \sigma_{\overline{R}/d_2}}$$

Нижний индекс воспроизводимости CPL определяется как отношение отклонения среднего уровня процесса от нижнего предела поля допуска к действительному нижнему разбросу процесса:

$$CPL = \frac{\overline{\overline{X}} - LSL}{k/2\, \sigma_{\overline{R}/d_2}}$$

Индекс воспроизводимости C_{pk} учитывает центровку процесса и определяется как минимальное из CPU и CPL. Он связывает разность между средним процесса и ближайшим пределом поля допуска с половиной присущей процессу изменчивости.

По известным значениям C_p и C_{pk} можно определить интервал, в котором находится ожидаемый уровень несоответствий. По значению C_{pk} определяют максимально возможное значение ожидаемого уровня несоответствий, по значению C_p – минимально возможное. Вследствие использования выборочных оценок для получения C_p и C_{pk} и ограниченности объемов наблюдения полученные значения ожидаемых уровней несоответствий могут заметно отличаться от фактически наблюдаемых уровней несоответствий действующих процессов, поэтому значение ожидаемых уровней несоответствий используют только для предварительных оценок качества процессов и мониторинга улучшений.

Таблица 3.2 – Связь индексов воспроизводимости C_p и C_{pk} стабильных процессов с ожидаемым уровнем несоответствий продукции

Значение C_p или C_{pk}	Уровень несоответствий продукции в		Значение C_p или C_{pk}	Уровень несоответствий продукции в	
	процентах несоответствующих единиц продукции, %	числе несоответствующих единиц на миллион единиц продукции, *ppm*		процентах несоответствующих единиц продукции, %	числе несоответствующих единиц на миллион единиц продукции, *ppm*
0,33	32,2	322 000	1,00	0,27	2700
0,37	26,7	267 000	1,06	0,15	1 500
0,55	9,9	99000	1,10	0,097	970
0,62	6,3	63000	1,14	0,063	630
0,69	3,8	38000	1,18	0,040	400
0,75	2,4	24000	1,22	0,025	250
0,81	1,5	15000	1,26	0,016	160
0,86	0,99	9900	1,30	0,0096	96
0,91	0,64	6400	1,33	0,0066	66
0,96	0,40	4000			

Индекс пригодности P_p определяют как отношение допуска к оценке полной изменчивости процесса без учёта его центровки:

$$P_p = \frac{USL - LSL}{k\sigma_s}$$

Индекс пригодности P_{pk} учитывает центровку процесса и определяется как минимальное из $\frac{USL - \bar{\bar{X}}}{k/2\,\sigma_s}$ и $\frac{\bar{\bar{X}} - LSL}{k/2\,\sigma_s}$. Он связывает разность между средним процесса и ближайшим пределом поля допуска с половиной полной изменчивости процесса. Данный показатель, как и индекс пригодности P_p, должен использоваться только для сравнения или вместе с C_p и C_{pk}, а также для измерения и выбора приоритетов усовершенствования во времени.

Индексы воспроизводимости C_{pk} и пригодности P_{pk} могут применяться при измерении результатов непрерывного усовершенствования с использованием временных трендов и при выборе приоритетного направления, в котором процессы должны совершенствоваться. По известным значениям C_p и C_{pk} можно определить интервал, в котором находится ожидаемый уровень несоответствий. По значению C_{pk} определяют максимально возможное значение ожидаемого уровня несоответствий, по значению C_p – минимально возможное.

Регулирование на базе статистических методов может осуществляться в отношении управляемых процессов, то есть статистически стабильных, коэффициент воспроизводимости которых превышает единицу. Изменчивость процесса в этом случае меньше допуска показателя качества, и при настройке процесса на оптимальное значение возможно получение 100% годных единиц продукции (рисунок 2.1). Статистически управляемым считается статистически стабильный процесс, коэффициент воспроизводимости которого C_p >1,33 (в ряде стран, уделяющих большое внимание повышению качества на национальном уровне, коэффициент воспроизводимости должен быть не менее 2). Такой процесс при правильной настройке дает возможность получения 100% годных единиц продукции за межнастроечный период.

Индексом стабильности $P_{стаб}$ называют отношение индекса пригодности к индексу воспроизводимости или отношение оценки собственной изменчивости к оценке полной изменчивости процесса, т.е.:

$$P_{стаб} = \frac{P_p}{C_p} = \frac{T}{k\sigma_S} \times \frac{k\sigma_{R/d_2}}{T},$$

$$P_{стаб.} = \frac{\sigma_{\bar{R}/d_2}}{\sigma_S}$$

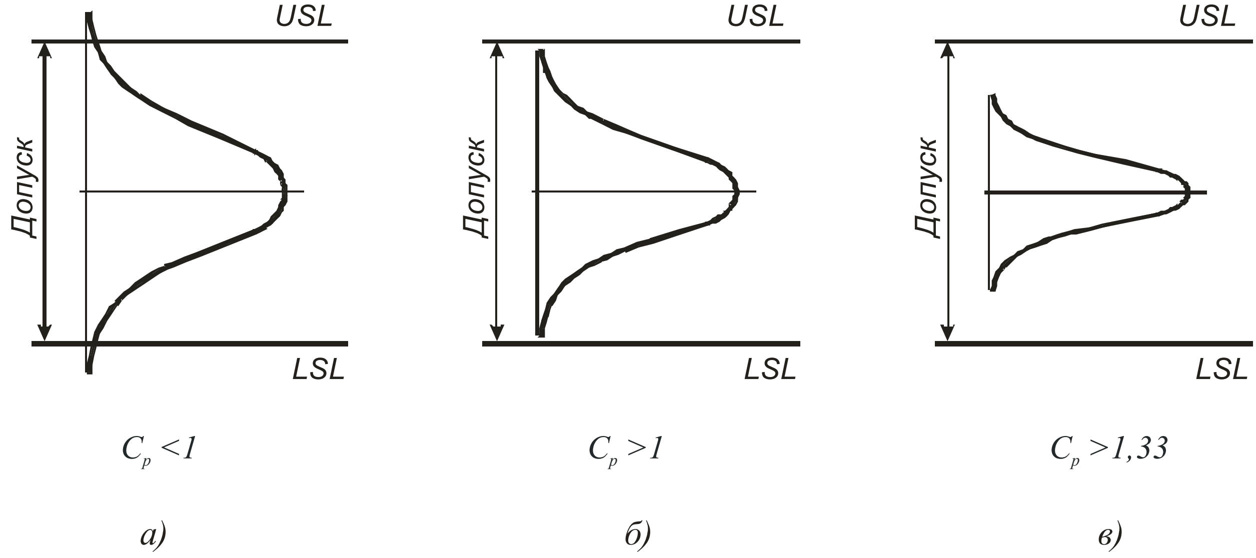

Рисунок 3.1 – Статистическая управляемость процессов:
а) статистически стабильный процесс не управляем;
б) статистически стабильный процесс управляем;
в) статистически стабильный процесс статистически управляем.

Необходимость использования данного индекса обусловлена тем, что в методической литературе и технических нормативных правовых актах отсутствуют формализованные критерии определения стабильности процесса. Так как статистически стабильным считается процесс, изменчивость которого преимущественно обусловлена обычными причинами возникновения изменчивости, то воздействие особых причин на полную изменчивость такого процесса пренебрежимо мало. К пренебрежимо малым величинам, как правило, относят величины второго порядка малости, из чего можно сформулировать условие стабильности процесса:

$$P_{стаб.} \geq 0{,}9 .$$

Приведенный коэффициент 0,9 является условным, различные предприятия могут устанавливать его для себя в диапазоне (0,8; 0,95).

На рисунке 3.2 представлена графическая интерпретация дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса. ***Индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса*** оценивают следующим образом:

$$P_{дрейфа} = \frac{\max\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right|}{T},$$

где $\bar{X}_i$ - среднее арифметическое i-й выборки;

$\bar{X}_j$ - среднее арифметическое *j*-й выборки;

T – допуск.

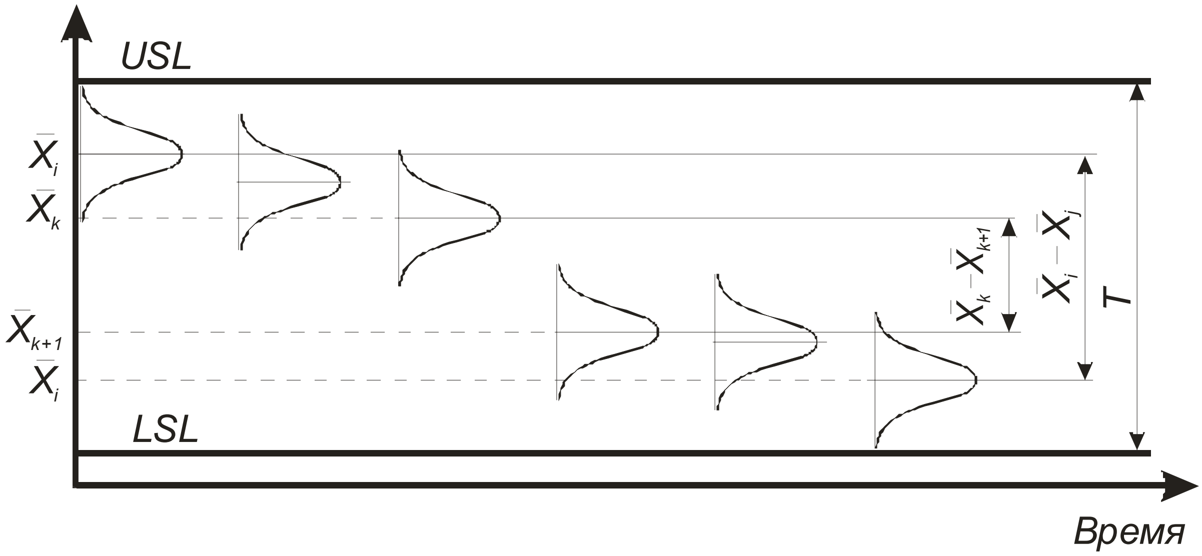

Рисунок 3.2 – Графическая интерпретация дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса

Индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса рассчитывается как отношение максимальной разности средних арифметических двух выборок к допуску.

В качестве ***индекса нелинейности смещения центра группирования выборочной изменчивости процесса*** (рисунок 3.2) понимают отношение максимальной разности средних арифметических двух соседних выборок к допуску.

$$P_{нелин} = \frac{\max\left|\bar{X}_k - \bar{X}_{k+1}\right|}{T},$$

где $\bar{X}_k$ - среднее арифметическое *k*–й выборки;

$\bar{X}_{k+1}$ - среднее арифметическое *k+1*–й выборки.

Следует отметить, что индексы дрейфа и нелинейности оценивают смещение центра группирования выборочной изменчивости процесса, при этом индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса обусловлен обычными причинами изменчивости процесса, а индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости процесса – особыми причинами.

Под ***индексом динамики рассеяния выборочной изменчивости процесса*** (рисунок 3.3) понимают отношение максимальной разности статистических оценок рассеяния двух выборок к значению большей меры рассеяния этих выборок:

$$P_{дин.рас.} = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max}},$$

где R_{max} – наибольший размах выборки;
R_{min} – наименьший размах выборки.

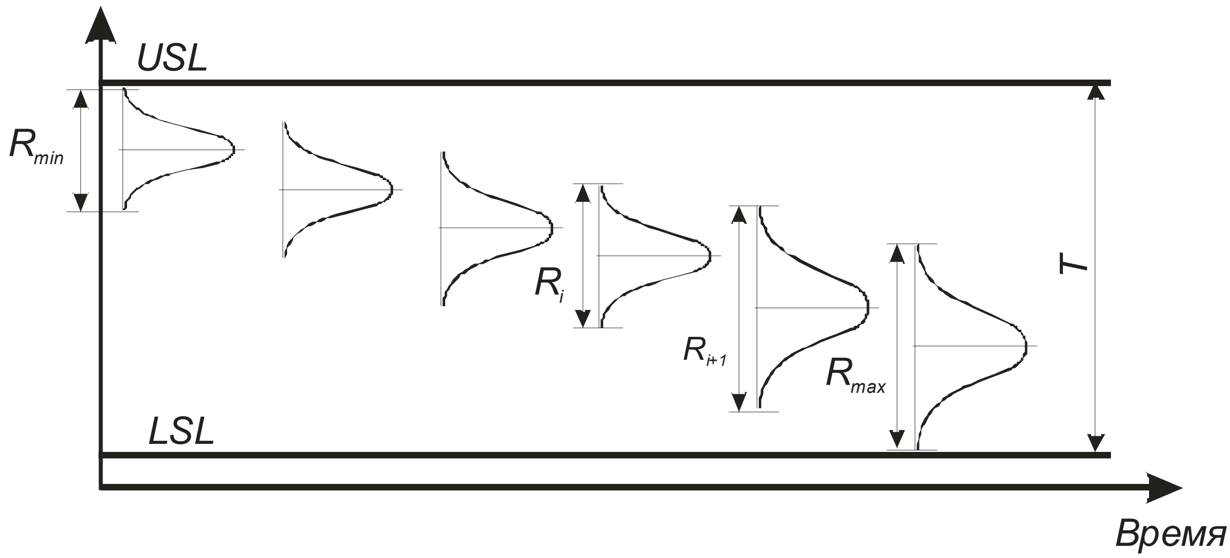

Рисунок 3.3 – Графическая интерпретация динамики рассеяния выборочной изменчивости процесса

В качестве **индекса нестабильности рассеяния выборочной изменчивости процесса** (рисунок 3.3) понимают отношение максимальной разности размахов двух соседних выборок к большему значению размаха этих выборок:

$$P_{нест.рас.} = \frac{\max|R_i - R_{i+1}|}{R_i},$$

где R_i – размах i-й выборки;
R_{i+1} – размах $i+1$-й выборки.

Под ***индексом наибольшего рассеяния выборочной изменчивости*** понимают отношение максимального размаха выборки к допуску:

$$P_{наиб.рас.} = \frac{R_{\max}}{T}.$$

Значения показателей возможностей процесса округляют до ***двух знаков после запятой***.

Индексы динамики и нестабильности рассеяния, а также наибольшего выборочного рассеяния определяют изменение рассеяния выборочной изменчивости процесса, при этом индекс динамики рассеяния выборочной изменчивости процесса обусловлен обычными причинами возникновения изменчивости процесса, индекс нестабильности рассеяния выборочной изменчивости процесса – особыми причинами, индекс наибольшего рассеяния выборочной изменчивости в совокупности с индексом воспроизводимости может быть использован для оценки статистической управляемости процесса.

Область применения предлагаемых показателей возможностей процесса представлена в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Система показателей возможностей процесса

№	**Показатель возможностей процесса**	**Обозначение**	**Характеризует причины изменчивости**		**Выявляет следствие влияющих факторов, проявляющихся в виде**	
			обычные	**особые**	**дрейфа центра группирования**	**увеличения рассеяния**
1	Индекс воспроизводимости	C_p	+	-	-	-
2	Индекс воспроизводимости, учитывающий центровку процесса	C_{pk}	+	-	-	-
3	Индекс пригодности	P_p	+	+	-	-
4	Индекс пригодности, учитывающий центровку процесса	P_{pk}	+	+	-	-
5	Индекс стабильности	$P_{стаб}$	-	+	-	-
6	Индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости	$P_{дрейфа}$	+	-	+	-
7	Индекс нелинейности смещения центра группирования выборочной изменчивости	$P_{нелин}$	-	+	+	-
8	Индекс динамики рассеяния выборочной изменчивости	$P_{дин.рас.}$	+	-	-	+
9	Индекс нестабильности рассеяния выборочной изменчивости	$P_{нест.рас.}$	-	+	-	+
10	Индекс наибольшего рассеяния выборочной изменчивости	$P_{наиб.рас.}$	+	+	-	+

Данную систему статистических показателей возможностей процесса рекомендуется рассчитывать периодически для получения полной статистической информации о состоянии процесса и составляющих его изменчивости. Она может использоваться как инструментарий исследования конкретных причин изменчивости процесса, что позволит их дифференцировать и повысить эффективность разрабатываемых мероприятий по улучшению качества продукции или услуг.

При проведении статистического анализа возможностей процесса в рамках выполнения курсовой работы необходимо выполнить следующее:

1. Произвести двадцать выборок объёмом равным 5.
2. В каждой из выборок определить размах и среднее арифметическое.
3. Определить средний размах и среднее арифметическое процесса.
4. Оценить изменчивость, присущую процессу.
5. Оценить полную изменчивость процесса.
6. Рассчитать индекс воспроизводимости.
7. Рассчитать индекс пригодности.
8. Рассчитать индекс воспроизводимости, учитывающий центровку процесса.
9. Рассчитать индекс пригодности, учитывающий центровку процесса.
10. Рассчитать отношение воспроизводимости.
11. Рассчитать отношение пригодности.
12. Рассчитать индекс стабильности.
13. Рассчитать индекс дрейфа центра группирования выборочной изменчивости.
14. Рассчитать индекс нелинейности смещения центра группирования выборочной изменчивости.
15. Рассчитать индекс динамики рассеяния.
16. Рассчитать индекс нестабильности рассеяния выборочной изменчивости.
17. Рассчитать индекс наибольшего выборочного рассеяния.
18. Сделать вывод о статистической стабильности процесса.
19. Сделать вывод о статистической управляемости процесса.

4 Построение комплексной простой контрольной карты

Посредством статистического регулирования качества можно предупреждать брак в производстве и таким образом непосредственно вмешиваться в производственный процесс изготовления изделий.

Техническим вспомогательным средством статистического регулирования является контрольная карта, позволяющая наглядно отразить ход производственного процесса на диаграмме и таким образом выявить нарушения технологии.

В зависимости от назначения готовой продукции и методов ее изготовления разработаны соответствующие виды контрольных карт. Различают карты по количественным и качественным признакам качества в зависимости от того, поддается ли количественному измерению или же допускает только качественную оценку.

Статистическое регулирование технологических процессов удобно осуществлять с помощью контрольных карт, на которых отмечают значения определенной статистики, полученной по результатам выборочного контроля. Такими статистиками являются: ***количественные*** — среднее арифметическое $\bar{X}$, медиана $\tilde{X}$, стандартное отклонение σ, размах R и ***альтернативные*** — доля несоответствующих единиц продукции p, количество несоответствующих единиц np, количество несоответствий c и количество несоответствий на единицу продукции u.

На контрольной карте отмечают границы регулирования, ограничивающие область допустимых значений статистики. Контрольная карта является наглядным графическим средством отражающим состояние технологического процесса. Выход точки за границу регулирования (и появление ее на самой границе) служит сигналом о разладке технологического процесса. Контрольная карта служит документом, который может быть использован для принятия обоснованных решений по улучшению качества продукции. На основании анализа результатов контрольной карты может быть принято, например, решение о пересмотре допуска на контролируемый параметр, либо это может послужить достаточным основанием для замены или модернизации оборудования.

По чувствительности к разладке процесса контрольные карты можно разделить на три группы:

1) ***простые контрольные карты*** (в иностранной литературе их называют картами Шухарта по имени американского ученого, впервые применившего их для регулирования технологического процесса);
2) ***контрольные карты с предупреждающими границами***, являющиеся модификацией простых контрольных карт;
3) ***контрольные карты кумулятивных сумм***.

Простые контрольные карты ***наименее чувствительны к разладке***. Это объясняется тем, что статистики, определяющие состояние технологического процесса, рассматриваются независимо друг от друга, т.е. каждый по-следующий результат выборочного контроля никак не учитывает предыдущую информацию.

Контрольные карты кумулятивных сумм наиболее чувствительны к разладке процесса. Так как для оценки состояния технологического процесса здесь не используются накопленные суммы выборочных статистик, например, кумулятивные суммы выборочных средних или кумулятивные суммы выборочных дисперсий. Таким образом, здесь учитывается не только результат контроля текущей выборки, но также используются результаты контроля предыдущих выборок. Решение, принимаемое на основании информации по многим выборкам, является более достоверным, чем решение, основанное на результате лишь одной выборки. По чувствительности к разладке контрольные карты кумулятивных сумм обычно превосходят простые контрольные карты примерно в 2-3 раза.

Контрольные карты с предупреждающими границами являются модификацией простых контрольных карт и отличаются от последних наличием, помимо границ регулирования, предупреждающих границ, построенных в зоне границ регулирования. По чувствительности к разладке они занимают промежуточное место между простыми контрольными картами и контрольными картами кумулятивных сумм.

Чувствительность контрольной карты к разладке определяется ***средней длиной серии (СДС) выборок***, которая определяется как среднее число выборок, предшествующих наладке технологического процесса при неизменном распределении вероятностей контролируемого параметра.

При налаженном процессе предпочтительным является максимально возможное значение СДС выборок L_0. Чем больше возможное значение L_0, тем более экономичным является план контроля. При разлаженном процессе, наоборот, предпочтительным является возможно меньшее значение СДС выборок L_1. Чем меньше значение L_1, при разлаженном процессе, тем выше вероятность обнаружения разладки процесса.

СДС определяет эффективность плана контроля и соответственно схемы контрольной карты. Наиболее эффективным планом контроля будет тот, который обеспечит, при равных исходных условиях, наибольшие значение СДС выборок налаженного процесса L_0 и наименьшее значение СДС выборок разлаженного процесса.

При принятии одной из двух гипотез — нулевой H_0 — процесс налажен или альтернативной H_1 — процесс разлажен возможны ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что налаженный процесс будет принят за разлаженный и он будет необоснованно остановлен для корректировки, когда в этом нет необходимости.

Ошибка второго рода в этой задаче состоит в том, что разлаженный процесс будет принят за налаженный, что приведет к выпуску бракованной продукции.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать α и называть ***риском излишней наладки***, а вероятность совершить ошибку второго рода — через β и называть ***риском незамеченной разладки***.

Критическими точками (границами) называют точки (линии), отделяющие критическую область от интервала — области принятия гипотезы. Различают одностороннюю и двустороннюю критические области. Для определения критической точки задаются достаточно малым значением α.

Чем меньше вероятность ошибок первого и второго рода, тем регулирование чувствительнее к разладке. Однако при заданном объеме выборки уменьшить одновременно α и β невозможно. Если, например, уменьшить а, то β будет возрастать. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода состоит в увеличении объема выборок. Если же объем выборок задан, то значения α и β следует выбирать, учитывая тяжесть последствий ошибок для каждой конкретной задачи. Например, если риск незамеченной разладки β повлечет большие потери из-за увеличения доли дефектной продукции, а риск излишней наладки а повлечет существенно меньшие потери от необоснованной остановки процесса, то значение β следует выбирать возможно меньшим, невзирая на увеличение значения α.

Для простых контрольных карт L_0 и L_1 связаны с α и β следующими зависимостями

$$L_0 = \frac{1}{\alpha} \qquad L_1 = \frac{1}{1-\beta}$$

Таким образом, для внедрения статистических методов регулирования технологических процессов необходимо решить следующие задачи:

- при каком значении выбранной характеристики технологический процесс считается налаженным и при каком значении этой характеристики процесс считается разлаженным;
- как расположить границы регулирования на контрольной карте;
- каков объем выборки;
- каков период отбора выборки.

Значение характеристики, при котором технологический процесс признается налаженным, должно быть оптимальным в смысле получения наилучшего показателя качества продукции. Обычно в качестве такого значения используется номинальные значения показателя качества при его допустимом двухстороннем отклонении или значение, соответствующее середине поля допуска при его одностороннем отклонении. Этому значению на контрольной карте соответствует исходная линия (иногда ее называют целевым значением процесса или «голосом процесса»). Значение статистической характеристики, при котором технологический процесс признается разлаженным, определяется исходя из влияния этого значения на долю дефектной продукции. Эта доля дефектной продукции не должна превышать значение допускаемого уровня дефектности, которое устанавливается из экономических соображений. Под допускаемым уровнем дефектности понимается максимальный уровень дефектности, установленный техническими нормативными правовыми актами. Границы регулирования определяют область принятия нулевой гипотезы и вычисляют по соответствующим формулам. При этом можно использовать таблицы планов контроля, входом в которые являются установленные значения СДС выборок для налаженного и разлаженного состояния исследуемого технологического процесса.

Период отбора выборок может устанавливаться опытным путем на основании наблюдений за разладкой процесса в предшествующем периоде. При этом следует принимать во внимание организационно-технические условия протекания процесса. Период отбора выборок можно также определить на основе экономических показателей. Такой способ является более объективным, но и более сложным.

К важнейшим видам контрольных карт по количественному признаку относится карта размахов. По внешнему виду контрольная карта представляет собой некоторое поле, ограниченное, как правило, с двух сторон (сверху и снизу). Однако для карты размаха достаточно следить за увеличением рассеивания.

Объем выборки рассчитывают по формуле

$$n = \left[\frac{z_\alpha + z_\beta}{z_{p_1} - z_{p_0}} \right]^2$$

где z_α — квантиль риска излишней наладки;

z_β — квантиль риска незамеченной разладки;

z_{p0} — квантиль стандартного нормального закона распределения с нулевым средним арифметическим и стандартным отклонением, равным 1, уровня p_0 (для приемлемой доли или процента несоответствующих единиц продукции);

z_{p1} — квантиль стандартного нормального закона распределения с нулевым средним арифметическим и стандартным отклонением, равным 1, уровня p_1 (для неприемлемой доли или процента несоответствующих единиц продукции).

Для нахождения ***границ регулирования*** используются следующие формулы:

$$UCL_R = D_4\overline{R} \qquad LCL_R = D_3\overline{R}$$

где UCL_R – верхняя граница регулирования;

LCL_R – нижняя граница регулирования;

D_3, D_4 – коэффициенты, зависящие от объёма выборки;

$\overline{R}$ – среднее арифметическое размахов, измеренных ***в процессе предварительного анализа***.

Таблица 4.1 – Зависимость коэффициентов D_3 и D_4 от объёма выборки n

n	D_3	n	D_4
2	-	2	3,27
3	-	3	2, 57
4	-	4	2,28
5	-	5	2,11
6	-	6	2,00
7	0,076	7	1,92
8	0,136	8	1,86
9	0,184	9	1,82
10	0,223	10	1,78
11	0,256	11	1,74
12	0,283	12	1,72
13	0,307	13	1,69
14	0,328	14	1,67
15	0,347	15	1,65

Примечание: для объёмов выборки меньше семи значение LCL_R отрицательно. В таких случаях LCL_R не строится.

Для нахождения границ регулирования карта средних арифметических $\overline{X}$ используются следующие формулы:

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} \qquad\qquad LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$

где $UCL_{\overline{X}}$ – верхняя граница регулирования;

$LCL_{\overline{X}}$ – нижняя граница регулирования;

A_2 – коэффициент, зависящий от объёма выборки;

$\overline{\overline{X}}$ – среднее арифметическое значение средних арифметических, измеренных в процессе предварительного анализа;

$\overline{R}$ – среднее арифметическое размахов, измеренных ***в процессе предварительного анализа.***

Таблица 4.2 – Зависимость коэффициента A_2 от объёма выборки n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_2	1,88	1,02	0,73	0,58	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31

Для принятия однозначного решения о разладке процесса значения границ регулирования рекомендуется округлять до количества разрядов, превышающих на единицу количество разрядов индивидуальных значений контролируемого показателя качества. Границы регулировния выражаются в тех же единицах измерения, что и показатель качества, по которому производят статистическое управление.

Следует отметить, что предлагаемые формулы расчета контрольных границ справедливы для случайных величин, которые подчиняются закону нормального распределения.

Значение *n* фиксируются. На практике обычно используются величины n=4, 5, 6 или 7 (как правило, n выбирается от 3 до 10). Следует сознательно выбирать небольшие объемы проб n в целях сокращения до минимума объема вычислительных операций после взятия каждой пробы. Значение α (вероятности ошибки 1-го рода или риска поставщика) выбирается специалистом, который проводит измерения и оценивает их результаты. Величина ее зависит от поставленной задачи и ее экспериментальных условий и осуществляется до начала проверки. Практически целесообразно работать со значениями 0,05; 0,01 и даже 0,001. При статистическом контроле качества чаще всего используется величина $\alpha = 0{,}0027$, которая соответствует вероятности оценки $P = 99{,}73\%$ ($P = 1 - \alpha$). Если задана некоторая величина α, то в 100*α % случаев результат измерений может быть оценен неверно, а это значит, что будет отвергнута правильная гипотеза о том, что процесс налажен.

При построении комплексной простой контрольной карты необходимо выполнить следующее:

1. Определить среднюю длину серии выборок налаженного процесса.
2. Определить среднюю длину серии выборок разлаженного процесса.
3. Обосновать выбор статистической оценки центра группирования.
4. Обосновать выбор статистической оценки рассеяния.
5. Рассчитать объём выборки.
6. Определить границы регулирования.
7. Извлечь рассчитанное количество выборок (единицы продукции в каждой выборке выбираются в определенном порядке).
8. Для каждой из выборок оценить положение центра группирования и рассеивание значений.
9. Отобразить полученные оценки на графической части простой контрольной карты.
10. Сделать вывод о состоянии технологического процесса.

При расчете границ регулирования необходимо использовать статистические оценки, полученные в разделе «Статистический анализ возможностей процесса».

Пример оформления контрольной карты средних арифметических/размахов приведен на рисунке 4.1.

Следует отметить, что при построении контрольной карты средних арифметических/размахов важно соблюдать координатную связь между табличной и графической частями, то есть значения статистических оценок, отображаемые в виде точек (маркеров) на графической части, должны находиться над соответствующими числовыми оценками в табличной части карты.

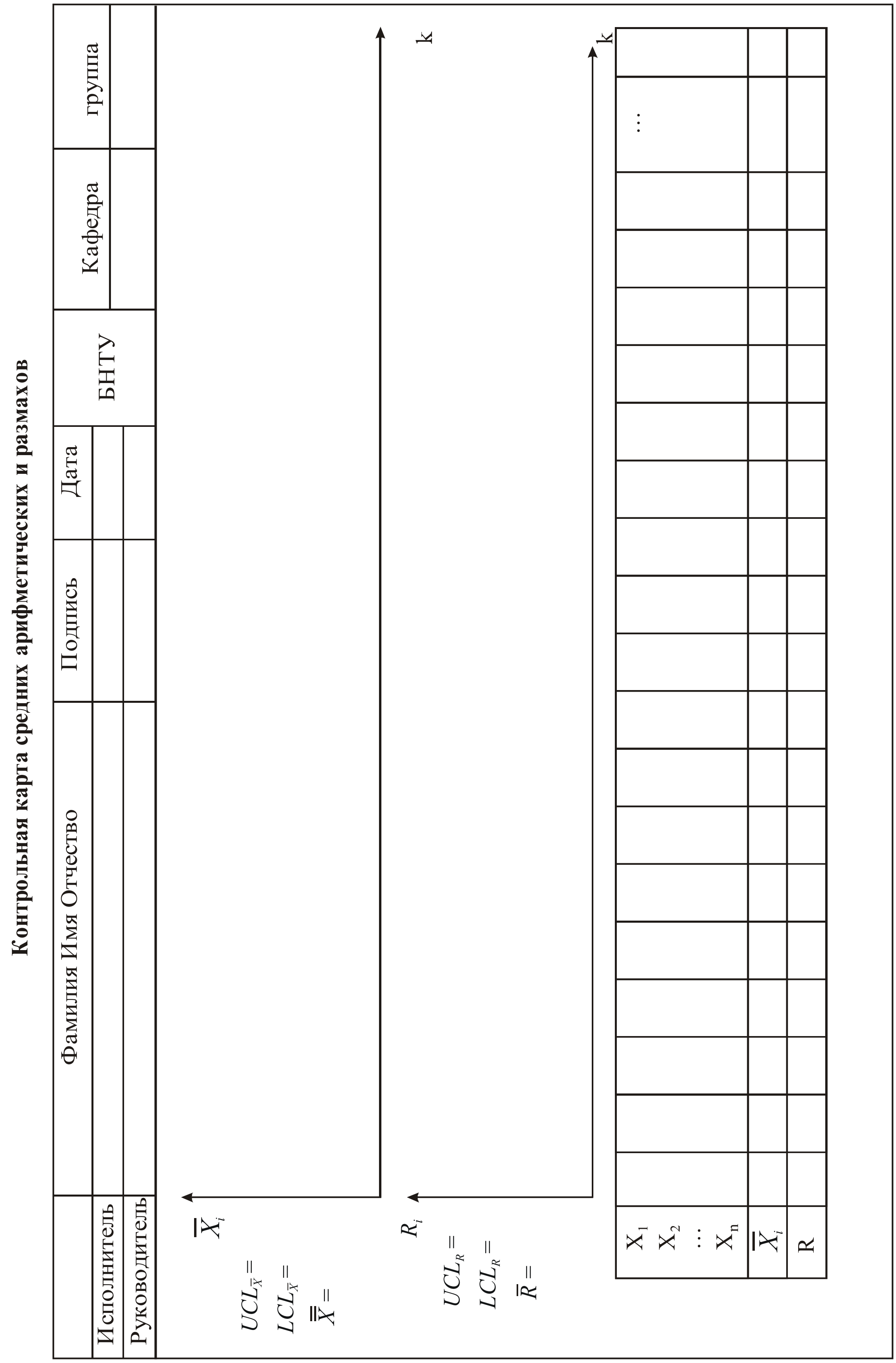

Рисунок 4.1 – Простая контрольная карта средних арифметических/размахов

5 Построение контрольной карты кумулятивных сумм

Контрольные карты кумулятивных сумм отличаются от простых контрольных карт тем, что вместо выборочных статистик $y_1, y_2,..., y_m$ при их построении рассчитываются кумулятивные суммы этих величин:

$$Z_m = \sum_{j=1}^{m} Y_j$$

Таким образом, отличительной особенностью метода кумулятивных сумм является тот факт, что решение относительно налаженности технологического процесса принимается с учетом предыдущей информации. Такая схема использования выборочных результатов контроля обеспечивает значительное уменьшение средней длины серии выборок разлаженного процесса L_1. А это значит, что разладка процесса будет обнаружена значительно быстрее, чем при обычной схеме использования выборочных статистик, которые представляют собой независимые результаты контроля.

Положение границ регулирования на контрольной карте кумулятивных сумм определяется величинами регулировочных интервалов h_+, h_-; кроме того, на такой контрольной карте имеются предупреждающие границы, положение которых на контрольной карте определяется величинами предупредительных интервалов k_+, k_-.

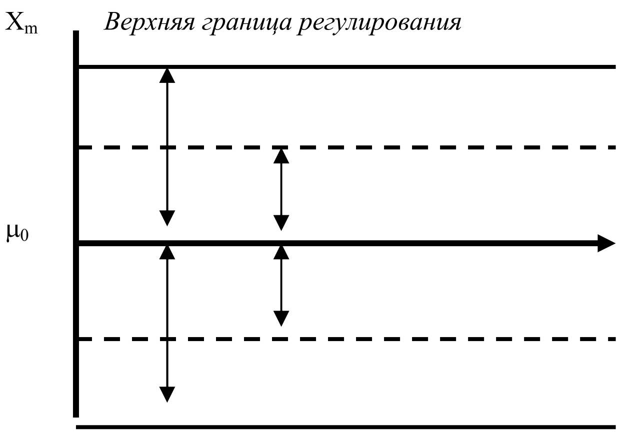

Рисунок 5.1 – Схематическое расположение границ регулирования карты кумулятивных сумм

Для выявления разладки процесса используется регулировочный интервал h. Пересечение графиком кумулятивных сумм границы регулирования, проведенной на расстоянии h от исходной линии, служит основанием для принятия решения о разладке процесса. Значение h устанавливается из условия обеспечения максимального значения средней длины серии налаженного процесса L_0 и минимального значения средней длины серии разлаженного процесса L_1.

Определение средней длины серии выборок для метода кумулятивных сумм представляет собой сложную задачу, которая сводится к решению интегральных уравнений и связана с трудоемкими вычислениями. Для упрощения данной задачи используют табличные данные, необходимые для построения контрольной карты кумулятивных сумм выборочного среднего и определения объема выборки.

При заданных значениях L_0 и L_1 находят значения $\delta\sqrt{n}$ и $h\sqrt{n}/\sigma$. Вычислив δ по формуле:

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

И подставив его значение в $\delta\sqrt{n}$, получим требуемый объем выборки.

При известных значениях n и σ определяем величину регулировочного интервала h из выражения $h\sqrt{n}/\sigma$, который определяет положение границ регулирования $R+$ и (или) R_-:

$$R_+ = \mu_0 + h,$$
$$R_- = \mu_0 - h.$$

Предупреждающие границы K_+ и (или) K_- определяются по формулам:

$$K_+ = \mu_0 + \frac{\delta\sigma}{2} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$$
$$K_+ = \mu_0 - \frac{\delta\sigma}{2} = \frac{\mu_0 + \mu_{-1}}{2}$$

где μ_0 - среднее процесса;

μ_1 - верхняя граница поля допуска;

μ_{-1} - нижняя граница поля допуска.

По известным значениям R и K строится контрольная карта на которой на оси абсцисс отмечаются порядковые номера выборок, а по оси ординат значения кумулятивных сумм X_m.

Статистическое регулирование процессов с применением контрольной карты кумулятивных сумм выборочного среднего с границами регулирования заключается в следующем:

- через определенные интервалы времени отбирают выборки заданного объема n единиц и вычисляют средние значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_i$;

- вычисление кумулятивных сумм начинается с первого значения $\bar{x}_i$, которое больше, чем K_+ или меньше, чем K_-. Этой выборке приписывается номер m=1 затем вычисляют кумулятивные суммы:

$$X_m = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}) - mk$$

или

$$X_m = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}) + mk$$

Вычисление кумулятивных сумм прекращается, как только возникает одна из следующих ситуаций:

- X_m меняет знак (процесс считается налаженным). При этом образование кумулятивных сумм возобновляется как только $\bar{x}_i$ окажется больше чем K_+ или меньше чем K_-;

- при $X_m > h$ или $X_m < -h$ процесс считается разлаженным. После его наладки образование кумулятивных сумм осуществляется по изложенным правилам.

После всех вычислений данные заносятся в таблицу

Таблица 5.1 – Пример табличной части карты кумулятивных сумм

N	m	X_i	$X_i - \bar{X}$	$\sum(X_i - \bar{X})$	mk	X_m	Примечание
1	2	3	4	5	6	7	8

N – номер выборки;
m – номер выборки в пределах составления кумулятивной суммы;
X_i – статистическая оценка;
$(X_i - \bar{X})$ – разность между статистической оценкой и средним процессом;
$\sum(X_i - \bar{X})$ - кумулятивная разность между статистическими оценками и средним процессом в пределах составления кумулятивной суммы;
mk – произведение номера выборки в пределах составления кумулятивной суммы на четверть допуска. Если статистическая оценка больше среднего процесса, то mk берут со знаком плюс (+), если статистическая оценка меньше среднего процесса, то mk берут со знаком минус (-). Знак у произведения mk одинаковый в пределах составления кумулятивной суммы;
X_m – кумулятивная сумма. Разность между 5 и 6 колонками.

При завершении составления кумулятивной суммы рекомендуется в таблице провести две разделяющие линии, при начале составления следующей кумулятивной суммы и номер выборки m принимается равным единице.

Таблица 5.2 - Выбор коэффициентов для расчета границ регулирования контрольных карт кумулятивных сумм

L_1	Значения $\delta\sqrt{n}$ (верхние строки) и $h\sqrt{n}/\sigma$ (нижние строки) при L_0											
	80	100	120	150	200	250	300	400	500	600	800	1000
1,2	3,20	3,28	3,35	3,42	3,51	3,58	3,64	3,74	3,79	3,86	3,91	3,99
	0,70	0,74	0,78	0,82	0,88	0,92	0,96	1,00	1,04	1,08	1,10	1,14
1,3	2,94	3,02	3,09	3,17	3,26	3,33	3,39	3,48	3,54	3,60	3,66	3,73
	0,86	0,90	0,94	0,98	1,02	1,06	1,10	1,16	1,20	1,22	1,26	1,30
1,4	2,76	2,84	2,90	2,98	3,07	3,13	3,19	3,28	3,33	3,39	3,46	3,52
	0,96	1,00	1,04	1,08	1,14	1,18	1,22	1,26	1,36	1,34	1,38	1,42
1,5	2,60	2,68	2,75	2,82	2,92	2,98	3,09	3,13	3,18	3,23	3,30	3,36
	1,04	1,10	1,14	1,18	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40	1,44	1,48	1,52
1,6	2,47	2,55	2,61	2,68	2,78	2,84	2,90	2,97	3,03	3,08	3,16	3,22
	1,12	1,16	1,22	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,48	1,52	1,56	1,60
1,7	2,36	2,44	2,50	2,57	2,66	2,72	2,77	2,85	2,91	2,98	3,03	3,09
	1,20	1,24	1,28	1,34	1,40	1,44	1,48	1,52	1,56	1,60	1,64	1,60
1,8	2,27	2,34	2,40	2,47	2,56	2,61	2,67	2,75	2,80	2,85	2,92	2,99
	1,26	1,32	1,36	1,40	1,46	1,50	1,54	1,60	1,64	1,66	1,72	1,76
1,9	2,18	2,25	2,31	2,33	2,46	2,53	2,58	2,65	2,70	2,76	2,83	2,89
	1,32	1,38	1,42	1,46	1,52	1,56	1,62	1,66	1,70	1,74	1,80	1,84
2,0	2,10	2,17	2,23	2,29	2,37	2,44	2,49	2,56	2,62	2,66	2,73	2,79
	1,33	1,44	1,48	1,55	1,60	1,64	1,68	1,74	1,78	1,82	1,86	2,00
2,2	1,97	2,04	2,09	2,15	2,23	2,29	2,34	2,41	2,46	2,51	2,57	2,63
	1,48	1,54	1,60	1,64	1,70	1,76	1,80	1,86	1,90	1,94	1,98	2,04
2,4	1,86	1,93	1,98	2,04	2,11	2,17	2,22	2,28	2,34	2,38	2,44	2,49
	1,58	1,64	1,70	1,74	1,80	1,86	1,90	1,96	2,00	2,06	2,12	2,16
2,6	1,75	1,82	1,87	1,93	2,00	2,06	2,10	2,17	2,22	2,26	2,31	2,37
	1,68	1,74	1,78	1,84	1,90	1,96	2,00	2,08	2,12	2,16	2,22	2,28
2,8	1,68	1,73	1,78	1,84	1,90	1,96	2,00	2,06	2,12	2,15	2,21	2,26
	1,76	1,86	1,88	1,94	2,00	2,06	2,12	2,18	2,24	2,28	2,34	2,40
3,0	1,59	1,65	1,70	1,75	1,82	1,87	1,92	1,98	2,02	2,06	2,11	2,16
	1,86	1,90	1,96	2,02	2,10	2,16	2,20	2,26	2,34	2,38	2,44	2,50
3,5	1,43	1,48	1,53	1,58	1,65	1,70	1,74	1,79	1,84	1,87	1,93	1,97
	2,02	2,10	2,16	2,22	2,30	2,38	2,42	2,50	2,56	2,60	2,70	2,74
4,0	1,29	1,35	1,39	1,45	1,51	1,55	1,59	1,65	1,69	1,72	1,77	1,80
	2,20	2,28	2,34	2,40	2,50	2,58	2,62	2,72	2,80	2,84	2,92	2,98
4,5	1,19	1,24	1,28	1,34	1,40	1,44	1,47	1,53	1,57	1,60	1,65	1,68
	2,34	2,44	2,50	2,60	2,68	2,76	2,82	2,92	2,98	3,04	3,14	3,20
5,0	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,34	1,38	1,43	1,47	1,50	1,55	1,58
	2,50	2,58	2,66	2,76	2,84	2,94	3,00	3,10	3,16	3,22	3,32	3,40
5,5	1,02	1,07	1,12	1,16	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38	1,41	1,45	1,49
	2,64	2,72	2,80	2,90	3,02	3,10	3,16	3,26	3,34	3,42	3,52	3,60
6,0	0,96	1,01	1,05	1,10	1,15	1,19	1,23	1,27	1,31	1,33	1,37	1,41
	2,74	2,85	2,93	3,04	3,16	3,24	3,32	3,42	3,50	3,58	3,68	3,76
7,0	0,85	0,90	0,94	0,99	1,04	1,07	1,11	1,15	1,18	1,21	1,25	1,28
	2,98	3,10	3,18	3,28	3,42	3,52	3,60	3,72	3,82	3,88	4,00	4,10

При построении контрольной карты кумулятивных сумм необходимо выполнить следующее:

1. Определить разладку процесса.
2. Рассчитать объём выборки.
3. Определить границы регулирования.
4. Извлечь заданное количество выборок, отобразить рассчитанные статистические оценки на графической части карты кумулятивных сумм.
5. Сделать вывод о состоянии технологического процесса.

При расчете границ регулирования необходимо использовать статистические оценки, полученные в разделе «Статистический анализ возможностей процесса».

Вследствие специфичности построения карты кумулятивных сумм координатная связь между графической и табличной частями карты отсутствует.

6 Оперативная характеристика статистического приемочного контроля

Основной задачей статистических методов приемочного контроля является обеспечение достоверной оценки качества продукции, предъявляемой на контроль, и однозначности признания результатов оценки качества продукции поставщиком и потребителем. В рамках системы менеджмента качества ответственным за качество продукции должен быть изготовитель. При контроле ответственность за качество может перейти от изготовителя к контролеру. Это происходит в тех случаях, когда контролер необходим для сортировки несоответствующих изделий, и все, что происходит в производстве, будет выявляться через контроль. Такой подход приводит к излишней работе, затратам и ухудшению качества для потребителя и изготовителя. Контролер не располагает средствами для создания качественной продукции, если это не было сделано изготовителем.

Преимущество такого контроля заключается в том, что при нем ответственность за качество продукции ложится непосредственно на изготовителя, и контролер не выполняет роль сортировщика продукции. Изготовитель должен подтвердить надлежащее качество изделий, иначе потребуются большие усилия и затраты, связанные с отклонением партий. Выборочный контроль может и должен приводить к снижению объема работы по контролю и затрат, а также к хорошему качеству продукции для покупателя.

Так как при статистическом приемочном контроле решение принять или отклонить партию продукции реализуется по результатам контроля выборки, то всегда имеется некоторая вероятность выбрать ошибочное решение. При этом имеется риск как поставщика, так и потребителя.

Под ***риском поставщика*** понимается вероятность отклонения партии продукции, обладающей приемлемым уровнем качества (нормативный документ СТБ ГОСТ Р 50779.11-2001 «Статистические методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения» трактует это понятие как для данного плана выборочного контроля вероятность отклонения партии, когда уровень качества партии или процесса имеет значение, признаваемое по плану приемлемым, например значение приемлемого уровня качества).

Риск потребителя — это вероятность приемки партии продукции, обладающей предельным уровнем качества (СТБ ГОСТ Р 50779.11-2001 трактует это понятие как при данном плане выборочного контроля вероятность приемки партии или процесса, когда их уровень качества имеет значение, признаваемое по плану неудовлетворительным, например, значение предельного уровня качества).

Приемочный контроль основан на результатах контроля единицы продукции, под которой понимается изделие, определенное количество материала, услуга, действие или процесс, организация или человек либо некоторая их комбинация.

Единицы продукции предъявляют для приемки не поштучно, а группами. Каждую группу единиц продукции называют партией.

Под ***производственной партией*** понимается определенное количество некоторой товарной продукции или услуг, произведенное в одно время и при условиях, которые можно считать однородными. Обстоятельства, при которых условия можно считать однородными, в большинстве случаев нельзя установить. Например, замена используемого материала или инструмента или прерывание процесса производства может привести к разным условиям.

Под ***контролируемой партией*** понимается определенное число единиц продукции, материала или услуг, собранных вместе и представленных для испытания. Контролируемая партия может состоять из нескольких производственных партий или частей производственных партий.

Фактически каждая партия должна включать единицы продукции, произведенные в аналогичных условиях за один период времени. Это особенно важно, если принято понятие приемлемого уровня качества и поставки предполагаются сериями партий.

Если контролируют партии, смешанные из двух или более источников, наличие большого числа несоответствий в одном из них может привести к отклонению продукции из всех источников. С другой стороны, продукция граничного качества, поступившая из одного источника, может быть скрыта посредством смешения с продукцией от источников отличного качества.

Каждая партия характеризуется ***объёмом*** – числом единиц продукции в партии.

Уполномоченный орган имеет право установить объем партии. По мере возможности это согласовывают с изготовителем с целью определения количества единиц продукции, приемлемого для обеих сторон. При установлении объема партии (как и других параметров плана контроля) необходимо учитывать специфику производственного процесса. Не обязательно устанавливать единственное значение. В некоторых случаях возможны отклонения, хотя во всех случаях рекомендуется указывать верхние и нижние границы объема партии.

С точки зрения выборочного контроля предпочтительны крупные партии, позволяющие взять большую выборку, при этом достигается более четкое разграничение качества партий. Доля проверяемых единиц продукции для больших партий меньше, чем для малых партий с аналогичным AOL.

Не следует переоценивать тактику партий большого объема. При необходимости комплектования больших партий за счет объединения малых большие партии предпочтительны только в случае аналогичного качества малых партий. Если возможны существенные различия в качестве малых партий, их контроль следует проводить по отдельности. Поэтому партии должны включать единицы продукции, изготовленные, в основном, в аналогичных условиях.

Среди партий выделяют пробные, особые и отдельные партии. ***Пробная партия*** – это небольшая партия, получаемая в обычном производственном процессе до первой партии серийного производства для накопления информации и опыта. ***Особая партия*** – это партия, произведенная при особых условиях, состоящих в том, что эта партия не является частью обычной последовательности производства. ***Отдельная партия*** – это партия, выделенная из последовательности партий, в которой она была произведена или собрана, и не составляющая часть текущей последовательности проверяемых партий.

Кроме партий продукции различают поставки и заказы. ***Поставка*** – это количество некоторой товарной продукции или услуг, представленное в одно время и сопровождаемое одним комплектом документов. Поставка может состоять из нескольких контролируемых партий или их частей.

Заказ – это некоторое количество продукции, материала или услуги, заказанное в одно время у одного изготовителя. Заказ может состоять из одной или нескольких поставок

Поскольку поставляемые и приобретаемые партии продукции состоят из признанных годными контролируемых партий, то потребитель может принимать их без контроля; или же с входным контролем по плану выборочного контроля, согласованному с поставщиком; или сплошным контролем в зависимости от того, как указано в стандарте на продукцию.

Результаты выборочного контроля отдельных партий, осуществляемого по одному и тому же плану выборочного контроля, у поставщика и потребителя могут расходиться. Эти расхождения могут быть вызваны, например, погрешностью измерительных средств, влиянием внешних факторов и др. Однако в среднем за определенный период времени (например, за месяц, квартал) результаты выборочного контроля должны быть практически одинаковы. Основным признаком контролируемой партии продукции является однородность показателей качества.

Под однородностью продукции понимается свойство продукции, характеризующее ограничение ее изменчивости определенными и допустимыми границами каждого ее параметра. Показателем изменчивости, например, является дисперсия контролируемого параметра.

При формировании контролируемой партии следует иметь в виду:

- продукция, составляющая данную партию, должна быть однородной; из нее, по возможности, необходимо исключать продукцию, изготовленную из различных партий сырья, материалов или в различных производственных условиях;
- не следует устанавливать объем партии, при изготовлении которой будут иметь место плановые наладки технологического процесса (оборудования) или запуск в производство новой партии сырья и материалов;
- при установлении объема партии необходимо учитывать наличие производственной площади или емкости для сбора продукции на время ее контроля;
- следует учитывать характер продукции и условия ее производства (например, время выработки, условия изготовления — прерывный или непрерывный процесс и т.д.), а также метод контроля, применяемый при приемке.

Контролируемые партии продукции могут предъявляться на контроль в виде одиночных партий или последовательности партий.

При предъявлении одиночных партий решение о приемке или отклонении партии контролер должен принимать по результатам контроля только одной партии. При предъявлении последовательности партий продукции решение о приемке или браковке партии необходимо принимать по результатам контроля с учетом результатов контроля предшествующих партий. В данном случае последовательность выборок рассматривается как выборка большого объема из одной и той же генеральной совокупности. Контроль одиночных партий следует назначать в тех случаях, когда нет оснований утверждать, что несколько партий образуют одну совокупность единиц однородной продукции.

При контроле у поставщика контроль одиночной партии назначается:

- когда контролируемые партии продукции производятся из различных партий сырья, материалов, комплектующих изделий;
- когда при изготовлении контролируемой партии продукции производится две или более двух наладок технологического оборудования;
- когда одна и та же технологическая операция для различных контролируемых партий выполняется на различных единицах технологического оборудования;

При контроле у потребителя контроль одиночной партии назначается:

- когда поступающие партии продукции изготовлены различными изготовителями или поступают от разных поставщиков;
- когда партии продукции поступают через большие интервалы времени.

При контроле у поставщика контроль последовательности партий назначается в случае, когда контролируемые партии продукции формируются из потока продукции.

При контроле у потребителя контроль последовательности партий назначается, когда продукция от одного и того же исполнителя поставляется по определенному, заранее установленному временному графику через небольшие интервалы времени.

Партии продукции, поступающие на контроль, могут иметь некоторую долю несоответствующих единиц продукции. Эта доля несоответствующих единиц продукции характеризуется уровнем качества. Уровень качества — это любой относительный показатель качества, получаемый сравнением наблюдаемых значений с установленными требованиями.

Уровень качества может быть выражен как процентная доля несоответствующих единиц продукции (отношение количества несоответствующих единиц продукции к общему количеству единиц продукции) или как количество несоответствий на 100 единиц продукции (отношение количества несоответствий к общему количеству единиц продукции).

При выборочном контроле невозможно установить фактический уровень качества в контролируемой партии продукции, а можно получить лишь его оценку. Точность этой оценки зависит от того, насколько будет обоснован план контроля. В качестве такой оценки при контроле по количественному признаку используется предельное значение контролируемого параметра в выборке, а при контроле по альтернативному признаку — уровень качества.

Под ***приемлемым уровнем качества AQL*** при рассмотрении последовательности партий понимается средний уровень качества, который для целей приёмки продукции является удовлетворительным.

Приемлемому уровню качества для определённого плана контроля соответствует высокая вероятность приёмки при условии, что уровень несоответствий в контролируемой партии не превышает заданное значение AQL. Однако заданный AQL не означает, что в партии допускается процент несоответствующих единиц не более установленного. В любом случае предпочтительнее не иметь несоответствующих единиц, чем иметь какой бы то ни было процент, и чем больше он может быть уменьшен по сравнению с AQL, тем лучше. Снижение процента несоответствующих единиц увеличивает вероятность приёмки каждой партии.

Выбор необходимого значения AQL осуществляется по договорённости поставщика и потребителя и оговаривается в контракте.

Во многих случаях AQL – это компромиссный уровень качества между предпочтительным качеством для потребителя и тем, который изготовитель может себе позволить, поскольку строгие требования сложнее удовлетворять в производственном процессе и больше затрат на контроль потребуется для проверки того, что они выполнены.

Выбор правильного значения AQL является одной из важнейших задач при использовании статистического приёмочного контроля. Вопрос понижения или повышения AQL должен быть экономически обоснован. Выбор необоснованно малого значения AQL приведёт к тому, что поставщик будет нести убытки от забракования значительной доли хорошей продукции, а установление необоснованно большого значения AQL вынудит потребителя принимать партии продукции, содержащие большое количество несоответствующих единиц продукции.

Приемлемый уровень качества служит основой для определения контрольных нормативов в случае контроля последовательности партий (опорный показатель в таблицах СТБ ГОСТ Р 50779.71 и таблицах приложения А СТБ ГОСТ Р 50779.75).

Значение AQL определяет степень строгости выборочного контроля.

Назначают различные AQL для групп несоответствий или несоответствий различных видов.

При установлении значения приемлемого уровня качества на продукцию, которая контролируется по нескольким показателям качества, приемлемый уровень качества определяется двумя способами:

- устанавливается AQL отдельных показателей качества, а затем по продукции в целом;

- устанавливается AQL для продукции в целом, а затем для отдельных показателей качества.

Значения AQL не более 10 устанавливают как для процента несоответствующих единиц продукции, так и для числа несоответствий на 100 единиц продукции. Значение AQL более 10 устанавливают только для числа несоответствий на 100 единиц продукции.

Рекомендуется использовать предпочтительные значения AQL (26 значений от 0,010 до 1000), однако если это невозможно, система СТБ ГОСТ Р 50779.71 позволяет строить планы контроля и для других значений AQL (СТБ ГОСТ Р 50779.70).

При выборочном контроле на основе AQL контролируемые партии, взятые из процесса с качеством, равным или лучшим, чем AQL, будут в большинстве случаев приняты.

В непрерывной серии партий для выборочного контроля AQL является уровнем качества, соответствующим пределу среднего уровня удовлетворительного процесса.

AQL является выбранной границей между приемлемым и неприемлемым значениями среднего процесса. Он не описывает план выборочного контроля, а является требованием того, каким должно быть производство, и удобной величиной для определения допустимого процесса.

При назначении AQL необходимо учитывать, что он является показателем качества, требуемым в производстве. Изготовителю рекомендуется изготовлять партии среднего уровня качества лучше AQL. С другой стороны, это качество должно быть реально достижимым и в то же время обоснованным с точки зрения потребителя. При процессе, разработанном и управляемом надлежащим образом, можно производить продукцию с меньшим по сравнению с AQL процентом несоответствующих единиц. При получении лучшего среднего процесса снижаются совокупные затраты на производство и контроль продукции лучшего качества.

Учитывая требования потребителя, необходимо проверить, что оно не является завышенным, а также учесть предполагаемое применение контролируемых изделий и последствия отказов. Если при большем количестве изделий отказ можно рассматривать как сигнал замены несоответствующего изделия, то допустим достаточно мягкий уровень AQL. Если этот отказ скажется на повреждении дорогостоящей и важной части оборудования, когда невозможна замена изделия, требуется более жесткий AQL.

Среднее процесса является средним уровнем качества поставляемой на контроль серии партий (партии, повторно представленные на контроль, исключаются). Среднее процесса относится к тому, что реально изготовлено независимо от проводимого контроля.

Оценка среднего процесса не является неотъемлемой частью схемы контроля, но она важна сама по себе. Как контролер, так и изготовитель заинтересованы не только в решениях о последовательных партиях, но и в долгосрочной картине качества производства.

Рекомендуется вести протоколы данных о допустимом общем среднем процесса, что является эффективной мерой повышения качества продукции и необходимой информацией при выборе плана выборочного контроля.

При двухступенчатом и многоступенчатом контроле необходимо соблюдать ряд специальных правил. Для оценки среднего процесса используют результаты только первой выборки.

В некоторых случаях рекомендуется исключать аномальные результаты, но это правило следует применять с большой осторожностью. Это можно с уверенностью делать тогда, когда аномальные результаты являются следствием особой причины, которая уже устранена. Далее в этом случае приводят данные, включающие и не включающие аномальные результаты, чтобы показать наличие этих несоответствий.

При наличии многих характеристик или многочисленных классов AQL следует оценивать средние отдельных процессов.

Предельное качество LQ **–** уровень качества, при котором для целей выборочного контроля вероятность приемки мала при рассмотрении отдельной партии. Предельное качество является опорным показателем в СТБ ГОСТ Р 50779.72. При контроле отдельной партии это соответствует уровню качества, выраженному процентом несоответствующих единиц или числом несоответствий на 100 единиц продукции, при котором в целях выборочного контроля требуется низкая вероятность приемки. Предельное качество фактически соответствует нежелательному качеству. Для гарантированной приемки партий доля несоответствующих единиц должна быть значительно ниже LQ (как правило меньше четверти LQ).

Среднее выходное качество AOQ – ожидаемый средний уровень качества выходящей продукции после контроля при данном значении входного уровня качества. Если не установлено иного, среднее выходное качество вычисляют по всем принятым партиям плюс все непринятые партии после сплошного контроля и замены несоответствующих единиц соответствующими. Часто используют приближение:

(среднее выходное качество) = (качество процесса перед контролем) x (вероятность приемки)

Предел среднего выходного качества AOQL – максимальное значение среднего выходного качества среди всех возможных значений уровня качества выходящей продукции для заданного плана выборочного контроля и устранения несоответствий во всех непринятых партиях

Аналогично концепции AQL понятие среднего выходного качества (AOQ) и его предела (AOQL) оправданы только при большом числе последовательных партий, представленных в определенной системе выборочного контроля. Партия будет принята, если число несоответствующих единиц продукции в выборке меньше или равно приемочному числу. Если число несоответствующих единиц превышает или равно браковочному, партия не будет принята. При среднем уровне процесса, близком к AQL, большая часть партий будет принята. Если качество процесса не меняется и отклоненные партии бракуют, а не исправляют, выборочный контроль на качество не влияет.

В некоторых случаях, когда перемещение продукции происходит между подразделениями, а не предприятиями, отклоненную партию проверяют сплошным контролем с изъятием из нее несоответствующих единиц (возможна замена на соответствующие единицы). Это называется контролем с разбраковыванием.

При контроле с разбраковыванием партию либо принимают без дальнейшего контроля, либо при отклонении проходит сплошной контроль каждой единицы с изъятием или заменой всех несоответствующих единиц на соответствующие. В первом случае выходное качество практически соответствует входному, во втором - все изделия соответствуют техническим условиям. Даже если входное качество p не меняется, выходное качество может меняться от партии к партии, принимая значения p или 0 в зависимости от факта приемки партии или представления ее на контроль с разбраковыванием. Тем не менее возможно рассмотрение среднего выходного качества в течение длительного промежутка, когда входное качество не меняется и равно p. Это среднее качество будет не хуже p, а при сплошном контроле большой доли партий может быть значительно лучше.

Термин «среднее выходное качество» можно рассматривать как средний процент несоответствующих единиц в большом числе партий из процесса, при котором непрерывно производится продукция качества p. Все партии проверяют и оценивают одним и тем же выборочным планом, который имеет вероятность приемки партии P_a. Отклоненные партии очищают (теоретически) от несоответствующих единиц. В результате контроля с разбраковыванием в среднем 100 P_a % партий не содержат несоответствующих единиц, а $100(1 - P_a)$ % партий, прошедших только выборочный контроль и принятых с первого предъявления, содержат 100 p % несоответствующих единиц (за вычетом ряда изъятых из выборки при контроле). Среднее выходное качество, выраженное процентом несоответствующих единиц, равно приблизительно $100(P_a \text{ x } p)$ %. Приближение приемлемо при условии, что объем партии N в десять или более раз превышает объем выборки n.

Кривая среднего выходного качества, построенная для различных значений p с различной вероятностью приемки, приведена на рисунке 1. Выходное качество может быть хорошим как по причине хорошего входного качества, так и вследствие сплошного контроля ряда партий. Кроме того, существует промежуточное входное качество p, для которого среднее выходное качество имеет максимальное значение. Это значение является пределом среднего выходного качества AOQL. Это не предел выходного качества любой отдельной партии и не предел реального выходного качества, усредненного по небольшому числу последовательных партий. В случае их большого числа реальное среднее выходное качество в этой последовательности будет незначительно отличаться от этого AOQL. При вариациях входного качества p реальное качество может быть значительно лучше AOQL.

Поэтому эффективнее оценивать непосредственно реальное среднее качество, чем полагаться на AOQL как на верхнюю границу.

Среднее процесса является средним уровнем качества поставляемой на контроль серии партий (партии, повторно предъявленные на контроль, исключаются). Это понятие отличается от AQL, AOQL или LQ, которые можно вычислить или выбрать, и не является характеристикой конкретного плана выборочного контроля. Среднее процесса относится к тому, что реально изготовлено независимо от проводимого контроля.

Оценка среднего процесса не является неотъемлемой частью схемы контроля, но она важна сама по себе. Как контролёр, так и изготовитель заинтересованы не только в решениях о последовательных партиях, но и в долгосрочной картине качества производства. Рекомендуется вести протоколы данных о среднем процесса, что является эффективной мерой повышения качества продукции и необходимой информацией при выборе плана выборочного контроля.

При переходе от одного уровня контроля к другому риск поставщика и риск потребителя изменяется в различной степени. Например, если объем выборки, соответствующий уровню контроля I принять за А, то объем выборки, определяемый уровнем контроля II составит более 2А, а уровню контроля III — более 3 А. Уменьшение объема выборки приблизительно в 10 раз увеличивает риск поставщика примерно в 5 раз, а риск потребителя примерно в 9 раз.

Целесообразно выбирать несколько уровней контроля, например, в начале производственного процесса выбрать более высокий, а затем перейти к более низкому при условии, что он обеспечивает допустимый риск потребителя.

При применении планов контроля партии продукции принимаются или бракуются с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Вероятность принятия контролируемой партии зависит от доли несоответствующих единиц продукции в этой партии. Если в партии нет несоответствующих единиц продукции, то и в выборке их не может быть, и такая партия во всех случаях будет приниматься с вероятностью, равной 1. По мере увеличения доли несоответствующих единиц продукции в партии вероятность приемки партии уменьшается. Если же вся партия будет состоять из несоответствующих единиц продукции, то такая партия во всех случаях будет браковаться с вероятностью, равной 1.

Функция, задающая вероятность приемки контролируемой партии продукции в зависимости от входного уровня качества, называется ***оперативной характеристикой***.

Кривая оперативной характеристики показывает математические ожидания процента принятых партий продукций. Эти величины являются средними значениями, которые соответствуют фактическим значениям лишь при большом количестве рассматриваемых партий продукции.

Вероятность принятия партии продукции зависит от объема выборки, контрольного норматива и уровня качества в партии.

С увеличением объема выборки (при неизменных двух других исходных данных) вероятность принятия партии продукции уменьшается.

Для поставщика увеличение объема выборки невыгодно, так как увеличивается его риск забраковать хорошую партию продукции; для потребителя наоборот, выгодно, так как уменьшается его риск принять бракованную продукцию. С ослаблением требований к жесткости контрольного норматива (также при неизменных исходных данных) вероятность принятия партии продукции увеличивается, что выгодно для поставщика и невыгодно для потребителя.

Для одновременного удовлетворения требований поставщика и потребителя необходим компромисс. В качестве такого компромисса должен быть приемочный уровень качества, согласованный между поставщиком и потребителем.

Перед проведением двухступенчатого контроля в зависимости от объёма партии и уровня контроля определяют код объёма выборки по таблице I СТБ ГОСТ Р 50779.71-2001.

В зависимости от кода объёма выборки и заданного приемлемого уровня качества из таблицы III СТБ ГОСТ Р 50779.71-2001 выбирают объём выборки, приёмочное и браковочное числа для каждой ступени контроля.

Из соответствующей таблицы X СТБ ГОСТ Р 50779.71-2001 в зависимости от заданного приемлемого уровня качества для нормированных значений ожидаемой доли принятых партий выбирают десять значений качества предъявленной продукции. По данным десяти точкам строят оперативную характеристику.

При построении оперативной характеристики для двухступенчатого статистического приемочного контроля необходимо:

1. Определить код выборки.
2. Определить объём выборки.
3. Определить приемочное и браковочное числа.
4. Построить оперативную характеристику.

7 Последовательный статистический приемочный контроль по количественному признаку

Под планом контроля понимается совокупность требований и правил, которые следует соблюдать при контроле партии продукций. Под совокупностью требований и правил понимаются объем контролируемой партии, уровень и вид контроля, тип плана выборочного контроля, объем выборки, контрольные нормативы и т.д.

План выборочного контроля — совокупность данных об объемах выборок и контрольных нормативах — приемочные и браковочные числа (по альтернативному признаку) или предельные значения контролируемого параметра в выборке (по количественному признаку).

Схема статистического приемочного контроля — полный комплект планов выборочного контроля в сочетании с совокупностью правил применения этих планов.

В зависимости от числа отбираемых на контроль выборок различают одноступенчатые, двухступенчатые, многоступенчатые и последовательные планы контроля.

При последовательном контроле случайные единицы продукции извлекают из партии и проверяют одну за другой. Применяют кумулятивный (суммарный) подсчет числа проверенных и обнаруженных несоответствующих единиц. В соответствии с правилами принятия решения партию принимают или отклоняют по мере того, как появляются основания в пользу первого или второго. Во избежание возможности продолжения контроля в течение неопределенного периода времени без достижения решения предусмотрено правило усечения контроля. Контроль прекращают при достижении заранее заданного объема выборки. При этом заранее определяют критерии принятия решений на данном этапе.

При использовании последовательного плана выборочного контроля по альтернативному признаку единицы в выборку отбирают случайным образом и подвергают контролю последовательно одну за другой. Кумулятивные результаты контроля накапливаются как число несоответствующих единиц продукции (или число несоответствий).

После проверки очередной единицы кумулятивные результаты контроля используют для того, чтобы оценить, является ли вся полученная ранее информация достаточной для принятия решения о партии на данной стадии контроля.

Если на данной стадии контроля кумулятивные результаты контроля таковы, что риск принятия партии неудовлетворительного уровня качества (риск потребителя) достаточно низок, то партию рассматривают как приемлемую и выборочный контроль этой партии заканчивается.

Если кумулятивные результаты контроля таковы, что риск отклонения партии удовлетворительного уровня качества (риск потребителя) достаточно низок, то партию следует рассматривать как неприемлемую, и контроль этой партии должен быть закончен.

Если кумулятивные результаты контроля не позволяют принять то или иное из указанных выше решений в отношении рассматриваемой партии, то необходимо подвергнуть проверке дополнительную единицу. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена информация, достаточная для принятия решения о приемке или отклонении партии.

Применение последовательных планов выборочного контроля, так же как двухступенчатых и многоступенчатых планов, приводит к меньшим средним объемам выборки (средний объем выборки - это среднее арифметическое значений объемов различных выборок, которые могут быть подвергнуты контролю в соответствии с заданным выборочным планом при данном уровне качества партии или процесса) по сравнению с одноступенчатыми планами, имеющими такие же оперативные характеристики. При этом средняя экономия для последовательных выборочных планов даже превышает среднюю экономию при двухступенчатых или многоступенчатых планах.

Для партий удовлетворительного качества экономия объемов контроля при последовательных планах может достигать или превышать 50 % по отношению к одноступенчатым планам. Максимальная экономия при использовании двухступенчатых планов равна 37 %. С другой стороны, реальное количество контролируемых единиц при двухступенчатых, многоступенчатых или последовательных планах контроля может для отдельных партий превышать значение объема выборки для соответствующего одноступенчатого плана. Однако для двухступенчатых и многоступенчатых выборочных планов существует верхний предел количества единиц, который можно подвергнуть контролю. Для последовательных планов вообще не существует такого предела, и количество контролируемых единиц может достигать объема выборки соответствующего одноступенчатого плана и даже объема партии.

Так как при использовании последовательных планов выборочного контроля окончательный объем выборки из отдельной партии заранее неизвестен, то при отборе единиц в выборку могут возникнуть организационные трудности аналогичные тем, которые возникают при планировании контрольных операций при двух- и многоступенчатом контроле.

Равновесие между преимуществами меньшего среднего объема выборки и организационными недостатками, связанными с неравномерными нагрузками при последовательном выборочном контроле, является приемлемым только тогда, когда непосредственный контроль отдельных единиц является более дорогим по сравнению с накладными расходами для контрольных операций.

Последовательные планы выборочного контроля по количественному признаку могут быть использованы только тогда, когда есть уверенность в том, что измеряемые величины распределены по нормальному закону, и есть обоснованное подтверждение того, что стандартное отклонение процесса постоянно и равно σ.

Если контроль осуществляется над партиями продукции, поступающими непрерывными сериями в течение длительного срока, то гипотеза о нормальности распределения может быть подтверждена результатами, предварительно полученными с использованием одноступенчатого плана. Стабильность стандартного отклонения может быть выявлена по контрольным картам, определяющим изменчивость процесса.

Последовательный план выборочного контроля в среднем более экономичен, чем эквивалентный одноступенчатый план. В процессе контроля партии может случиться, что решение о приемке партии получено на самой последней стадии, поскольку общий запас по качеству довольно долго оставался между приемочным и браковочным числами. В соответствии с графическим методом это означает, что при последующем случайном шаге кривая не покидает области, в которой решение не принимается.

Для устранения этих недостатков максимальный кумулятивный объем выборки определяют до начала выборки изделий и контроль прекращают, когда кумулятивный объем выборки достигает усеченного значения n_t независимо от того, принято решение или нет. Решение о приемке или отклонении партии определяется правилами, которые согласованы с конкретным выборочным планом. Правила усечения контроля основаны на том, что риск поставщика и риск потребителя труднее подвержены изменениям в соответствии с принципами, заложенными в статистической теории последовательных выборочных планов.

Критерий приемки или отклонения партии, который проверяют на каждом шаге контроля, определяется параметрами h_A, h_R и g, которые находят по таблицам СТБ ГОСТ Р 50779.76 в зависимости от значений уровня качества для риска потребителя CRQ и уровня качества для риска поставщика PRQ.

Если известен объем выборки n_0 одноступенчатого плана выборочного контроля, соответствующего рассматриваемому последовательному плану по количественному признаку, то усеченное значение кумулятивного объема выборки определяется как $n_t = 1{,}50\ n_0$. Округление проводится в сторону ближайшего целого числа.

Если объем выборки соответствующего одноступенчатого плана выборочного контроля неизвестен, то усеченное значение кумулятивного объема выборки определяется с использованием риска поставщика и риска потребителя.

В статистическом последовательном приемочном контроле различают два метода: численный и графический. Численный метод является более точным, что позволяет избегать споров в отношении приемки или отклонения партии.

Графический метод подходит для контроля партий, поступающих на контроль сериями. Однако этот метод менее точен, что вызвано неточностью нанесения на карту точек и прямых линий. С другой стороны, метод имеет преимущества, связанные с наглядностью представления информации о качестве партии в процессе контроля дополнительных изделий, а также информации, представляемой в виде разрывной линии в зоне продолжения контроля до достижения (или пересечения) одной из границ этой зоны.

Численный метод является, как правило, стандартным методом.

Графический метод используется с условием, что «отменить» решение о приемке или отклонении партии можно только по результатам численного метода.

Для каждого значения кумулятивного объема выборки n_{cum}, которое еще не достигло установленного усеченного значения объема выборки, соответствующее приемочное число A определяют по формуле

$$A = g\sigma n_{cum} + h_A\sigma,$$

браковочное число R - по формуле

$$R = g\sigma n_{cum} - h_R\sigma.$$

Приемочное число A_t, соответствующее усеченному объему выборки, определяют по формуле

$$A_t = g\sigma n_t.$$

Приемочное и браковочное числа должны быть выражены числом с точностью на один десятичный знак больше, чем остальные контрольные результаты.

При подготовке карты с кумулятивным объемом выборки по горизонтальной оси и общим запасом по качеству по вертикальной формуле вычисления приемочного и браковочного чисел представляются двумя прямыми линиями с наклоном $g\sigma$.

Линия, ограниченная плюс $h_A\sigma$, является приемочной, а линия, ограниченная минус $h_R\sigma$, - браковочной.

На линии кумулятивного объема выборки откладывают также вертикальную линию, проходящую через точку n_t - линию усечения.

Эти линии определяют три зоны на карте:

- приемочная зона - это зона, расположенная выше приемочной линии, включая эту линию, вместе с той частью усеченной линии, которая выше точки (n_t; A_t), включая саму точку;
- браковочная зона - это зона ниже браковочной линии, включая эту линию, вместе с той частью усеченной линии, которая ниже точки (n_t; A_t);
- зона продолжения контроля - полоса между приемочной и браковочной линиями, находящаяся левее линии усечения.

В процессе контроля каждой единицы продукции данные по результатам контроля x и кумулятивным объемам выборок n_{cum} записывают напротив друг друга. Вычисляют запас по качеству y. Запас по качеству - величина, получаемая на основе измеренного значения для одного изделия. В случае задания нижнего предела поля допуска и в случае задания границ двустороннего допуска запас по качеству получают в результате вычитания численного значения нижнего предела из измеренного значения величины. В случае задания верхнего предела запас по качеству получают в результате вычитания измеренного значения величины из численного значения верхнего предела поля допуска. Кумулятивный запас по качеству - величина, получаемая в результате суммирования запасов по качеству, вычисляемых от начала проведения последовательного выборочного контроля до последней проверенной единицы включительно.

Данные общего запаса по качеству Y получают в результате суммирования запасов по качеству y, найденных, как указано выше, по мере проверки выборки, сделанной из партии.

Если в непрерывной серии партий качество продукции, представляемой на контроль, как правило, лучше AQL и отвечает определенным критериям, можно начинать контроль с пропуском партий. Случайным методом выбирают, должна ли данная партия пройти выборочный контроль или принята без контроля. Если качество после выборочного контроля снижается, возвращаются на выборочный контроль каждой партии до того момента, пока оно не будет соответствовать установленным требованиям. Преимущества случайной выборки и вычисляемых рисков сохраняются. Объем контроля с пропуском партий и затраты на него в ряде случаев меньше по сравнению с ослабленным выборочным контролем по СТБ ГОСТ Р 50779.71.

В зависимости от значений уровней качества для риска поставщика и потребителя находят постоянные для определения приемочных и браковочных чисел h_A и h_R, множитель для кумулятивного объёма выборки g и усеченное значение кумулятивного объёма выборки n_t.

Определяют приёмочные и браковочные числа для двух произвольных значений объёмов выборки, отмечают рассчитанные значения на приемочной карте и через данные точки проводят приемочную и браковочную линию.

После извлечения каждой единицы продукции для неё рассчитывают запас по качеству, после чего рассчитывают кумулятивный запас по качеству. Полученное значение откладывают на приёмочной карте. Если точка на карте лежит вблизи приемочной либо браковочной линий, необходимо рассчитать численные значения приемочных и браковочных чисел для данного объёма выборки. Данные расчёта можно представить в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Расчет кумулятивного запаса по качеству

№	значение показателя качества	для верхнего предела поля допуска		для нижнего предела поля допуска	
		запас по качеству	кумулятивный запас по качеству	запас по качеству	кумулятивный запас по качеству

При построении приемочной карты последовательного статистического приемочного контроля по количественному признаку карты необходимо выполнить следующее:

1. Определить стандартное отклонение процесса.
2. Определить постоянные h_A, h_R и g.
3. Определить усеченный объём выборки n_t.
4. Построить приемочную и браковочную границы.
5. Провести последовательный статистический приемочный контроль по количественному признаку.
6. Дать заключение о партии продукции.

Исходным заданием к выполнению данного раздела курсовой работы является массив данных, которые получены в результате случайной бесповторной выборки из партии объёмом N = 1000. Последовательный статистический приемочный контроль необходимо провести при заданных значениях риска поставщика 0,05 и риска потребителя 0,1, уровень качества для риска потребителя CRQ = 2,5 %, уровень качества для риска поставщика PRQ = 0,63 %.

Изделия из партии в целях статистического приемочного контроля необходимо извлекать случайным образом. Для обеспечения «случайности» рекомендуется использовать таблица случайных чисел (таблица 7.2).

Оценку собственной изменчивости процесса необходимо использовать из раздела «Статистический анализ возможностей процесса».

В выводе необходимо дать заключение о приемке партии продукции.

Таблица 7.2 - Случайные числа для взятия выборок

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0110	9140	2804	8046	7142	6277	6210	8627	3209	6845
5327	3946	6289	6117	0060	2827	6546	2738	8760	6604
5373	8259	4956	8185	0135	8640	7410	6335	0831	2774
9244	9452	8324	8062	9817	9853	7479	9559	4264	6919
4148	3948	5399	8687	3568	4046	4558	0705	5075	4440
2403	4351	8240	3554	3568	4701	7494	6036	7735	4082
1828	1956	1646	1370	9096	0738	8015	0513	6969	0949
7249	9634	4263	4345	0567	1272	5302	3352	7389	9976
7116	9731	2195	3265	9542	2808	1720	4832	2553	7425
6659	8200	4135	6116	3019	6223	7323	0965	8105	4394
2267	0362	5242	0261	7990	8886	0375	7577	8422	5230
9460	9813	8325	6031	1102	2825	4899	1599	1199	0909

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2985	3541	6445	7981	8796	9480	2409	9456	7725	0183
4313	0666	2179	1031	7804	8075	8187	6575	0065	2170
6930	5368	4520	7727	2536	4166	7653	0448	2560	4795
8910	3585	5655	1904	0681	6310	0568	3718	3537	8858
8439	1052	5883	9283	1053	5667	0572	0611	0100	5190
4691	6787	4107	5073	8503	6875	7525	8894	7426	0212
1034	1157	5888	0213	2430	7397	7204	6893	7017	7038
7472	4581	3837	8961	7931	6351	1727	9793	2142	0816
2950	7419	6874	1128	5108	7643	7335	5303	2703	8793
1312	7297	3848	4767	5386	7361	2079	3197	8904	4332
8734	4921	6201	5057	9228	9938	5104	6662	1617	2323
2907	0737	8496	7509	9304	7112	5528	2390	7736	0475
1294	4883	2536	2351	5860	0344	2595	4880	5167	5370
0430	5819	7017	4512	8081	9198	9786	7388	0704	0138
5632	0752	8287	8178	8552	2264	0658	2336	4912	4268
7960	0067	7837	9890	4490	1619	6766	6148	0370	8322
5138	6660	7759	9633	0924	1094	5103	1371	2874	5400
8615	7292	1010	9987	2993	5116	7876	7215	9715	3906
4968	8420	5016	1391	8711	4118	3881	9840	5843	0751
9228	3232	5804	8004	0773	7886	0146	2400	6957	8968
9657	9617	1033	0469	3564	3799	2784	3815	3611	8362
9270	5743	8129	8655	4769	2900	6421	2788	4858	5335
8206	3008	7396	0240	0524	3384	6518	4268	5988	9096
1562	7953	0607	6254	0132	3860	6630	2865	9750	9397
1568	4342	5173	3322	0026	7513	1743	1299	1340	6470
5697	9273	8609	8442	1780	1961	7221	5630	8036	4029
3186	0656	3248	0341	9308	9853	5129	3956	4717	7594
3275	7697	1415	5573	9661	0016	4090	2384	7698	4588
7931	1949	1739	3437	6157	2128	6026	2268	5247	2987
5956	2912	2698	5721	1703	2321	8880	3268	7420	2121
1866	7901	4279	4715	9741	2674	7148	8392	2497	8018
2673	7071	4948	8100	7842	8208	3256	3217	8331	7256
7824	5427	0957	6076	2914	0336	3466	0631	5249	7289
2251	0864	0373	7808	1256	1144	4152	8262	4998	3315
7661	8813	5810	2612	3237	2829	3133	4833	7826	1897
6651	6718	1088	2972	0673	8440	3154	6962	0199	2604
2917	4989	9207	4484	0916	9129	6517	0889	0137	9055
5970	3582	2346	8356	0780	4899	7204	1042	8795	2435
1564	8048	6359	8802	2860	3546	3117	7357	9945	5739
6022	9676	5768	3388	9918	8897	1119	9441	8934	8555
8418	9906	0019	0550	4223	5586	4842	8786	0855	5650
5948	1652	2545	3981	2102	3523	7419	2359	0381	8457
6945	3629	7351	3502	1760	0550	8874	4599	7809	9474
0370	1165	8035	4415	9812	4312	3524	1382	4732	2303
6702	6457	2270	8611	8479	1419	0835	1866	1307	4211
3740	4721	3002	8020	0182	4451	9389	1730	3394	7094
3833	3356	9025	5749	4780	6042	3829	8458	1339	6948
8683	7947	4719	9403	7863	0701	9245	5960	9257	2588

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6794	1732	4809	9473	5893	1154	0067	0899	1184	8630
5054	1532	9498	7702	0544	0087	9602	6259	3807	7276
1733	6560	9758	8586	3263	2532	6668	2888	1404	3887
6609	6263	9160	0600	4304	2784	1089	7321	5618	6172
3970	7716	8807	6123	3748	1036	0516	0607	2710	3700
9504	2769	0534	0758	9824	9536	7825	2985	3824	3449
0668	9636	6001	9372	8746	1579	6102	7990	4526	3429
4364	0606	4355	2395	2070	8915	8461	9820	6811	5873
8875	3041	7183	2261	7210	6072	7128	0825	8281	6815
4521	3391	6695	5986	2416	7979	8106	7759	6379	2101
5066	1454	9642	8675	8767	0582	0410	5515	2697	1575
9138	5003	8633	2670	7575	4021	0391	0118	9493	2291
0975	1836	7629	5136	7824	3916	0542	2614	6567	3015
1049	9925	3408	3029	7244	1766	1013	0221	8492	3801
0682	1343	7454	9600	8598	9953	5773	6482	4439	6708
0263	4909	9832	0627	1155	4007	0446	6988	4699	1740
2733	3398	7630	3824	0734	7736	8465	0849	0459	8733
1441	2684	1116	0758	5411	3365	4489	6241	6413	3615
5014	5616	1721	8772	4605	0388	1399	5993	7459	4445
3745	5956	5512	8577	4178	0031	3090	2296	0124	5896
8384	8727	5567	5881	3721	1898	3758	7236	6860	1740
9944	8361	7050	8783	3815	9768	3247	1706	9355	3510
3045	2466	6640	6804	1704	8665	2539	2320	9831	9442
5939	5741	7210	0872	3279	3177	6021	2045	0163	3706
4294	1777	5386	7182	7238	8408	7674	1719	9068	9921
3787	2516	2661	6711	9240	5994	3068	5524	0932	5520
4764	2339	4541	5415	6314	7979	3634	5320	5400	6714
0292	9574	0285	4230	2283	5232	8830	5662	6404	2514
7876	1662	2627	0940	7836	3741	3217	8824	7393	7306
3490	3071	2967	4922	3658	4333	6452	9149	4420	6091
3670	8960	6477	3671	9318	1317	6355	4982	6815	0814
3665	2367	8144	9663	0990	6155	4520	0294	7504	0223
3792	0557	8489	8446	8082	1122	1181	8142	7119	3200
2618	2204	9433	2527	5744	9330	0721	8866	3695	1081
8972	8829	0962	5597	9834	5857	9800	7375	9209	0630
7305	8852	1688	3571	3393	2990	9488	8883	2476	9136
1794	4551	1262	4845	4039	7760	1565	4745	1178	8370
3179	1304	7767	4769	7373	5195	5013	6894	5734	5852
2930	3828	7172	3188	7487	2191	1225	7770	3999	0006
8418	9627	7948	6243	1176	9393	2252	0377	9798	8648

8 Построение 5M диаграммы Исикавы для предприятия, производящего машиностроительную продукцию

Качество изделия обеспечивается в процессе его изготовления. Можно сказать, что качество изделия является результатом действия системы факторов и причин, составляющих процесс. Японцы, тяготеющие к алгоритмизации определений для упрощения усвоения основных понятий работниками первой линии производства, определяют процесс как взаимодействие 5M:

1. material — сырьё, комплектующие
2. machine — оборудование
3. method — используемые технологии
4. man — персонал
5. management — управление и контроль

Иногда выделяют шестую группу факторов: environ***m***ent — окружающая среда.

Зависимость между процессом, представляющим собой систему причинных факторов, и качеством, представляющим собой результат действия этих причинных факторов, можно выразить графически.

Если результат процесса, допустим качество изделия, оказался неудовлетворительным, следовательно, в системе причин, т. е. в какой-то точке процесса, произошло отклонение от заданных условий. Если причина, вызвавшая отклонение в ходе процесса, всегда может быть обнаружена и устранена, будут производиться изделия только высокого качества. Более того, если постоянно поддерживать заданные условия хода процесса, можно обеспечить формирование высокого качества. Важно также, что полученный результат — показатели качества (точность размеров, степень прочности, степень чистоты и т. д.) — выражается конкретными данными. Используя эти данные, с помощью статистических методов осуществляют контроль процесса, т. е. проверяют систему причинных факторов. Таким образом, процесс контролируется по фактору качества.

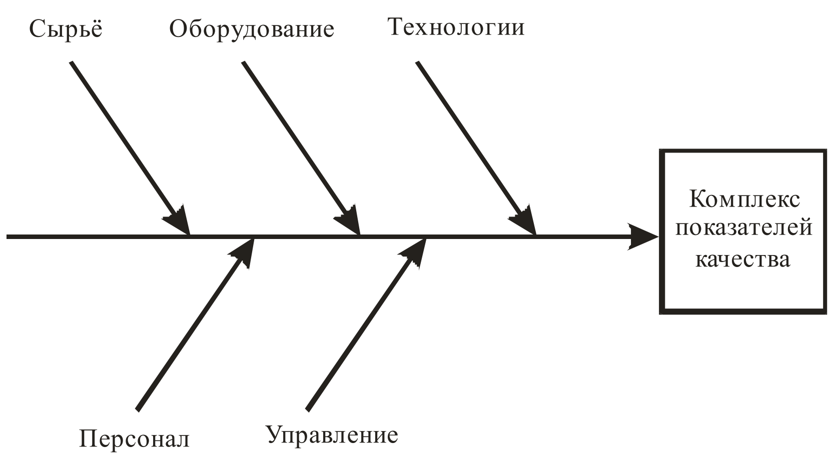

Рисунок 8.1 – Группы факторов изменчивости процесса на 5M диаграмме Исикавы

Для производства изделий, качество которых удовлетворяло бы запросам потребителей, прежде всего, необходимо наиболее важным показателям качества (являющимся следствием) поставить в соответствие различные факторы производства (составляющие систему причинных факторов). Затем на те факторы, которые оказывают отрицательное влияние на результат, необходимо оказать воздействие правильно подобранными мерами и этим ввести процесс в стабильное состояние. Для этого важно хорошо понимать и контролировать зависимость между характеристиками качества (следствием) и параметрами процесса (системой причинных факторов). При этом удобно использовать так называемую причинно-следственную диаграмму.

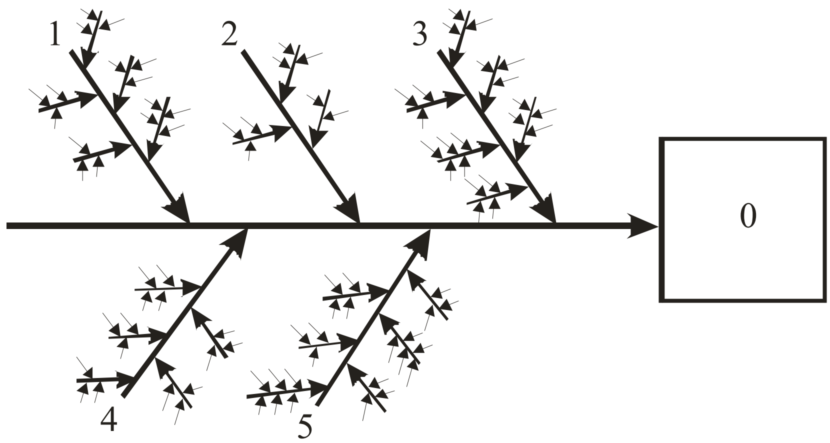

Рисунок 8.2 – Схематическое представление 5М диаграммы Исикавы

При поиске причин важно помнить, что характеристики, являющиеся следствием, обязательно испытывают разброс. Поиск среди этих причин факторов, оказывающих особенно большое влияние на разброс характеристик (т.е. на результат), называют исследованием причин.

Для составления причинно-следственной диаграммы необходимо подобрать максимальное число факторов, имеющих отношение к характеристике, которая вышла за пределы допустимых значений. При этом для исследования причин явления необходимо привлекать и третьих лиц, не имеющих непосредственного отношения к работе, так как у них может оказаться неожиданный подход к выявлению и анализу причин, которого могут не заметить лица, привычные к данной рабочей обстановке.

9 Построение диаграммы разброса, расчет коэффициентов корреляции и регрессии

Диаграмма разброса используется для выявления причинно-следственных связей показателей качества и влияющих факторов при анализе причинно-следственной диаграммы.

Диаграмма разброса строится как график зависимости между двумя параметрами. Если на этом графике провести линию медианы, он позволяет легко определить, имеется ли между этими двумя параметрами корреляционная зависимость. С помощью диаграммы разброса анализируется зависимость между влияющими факторами (причиной) и характеристиками (следствием), между двумя факторами, между двумя характеристиками.

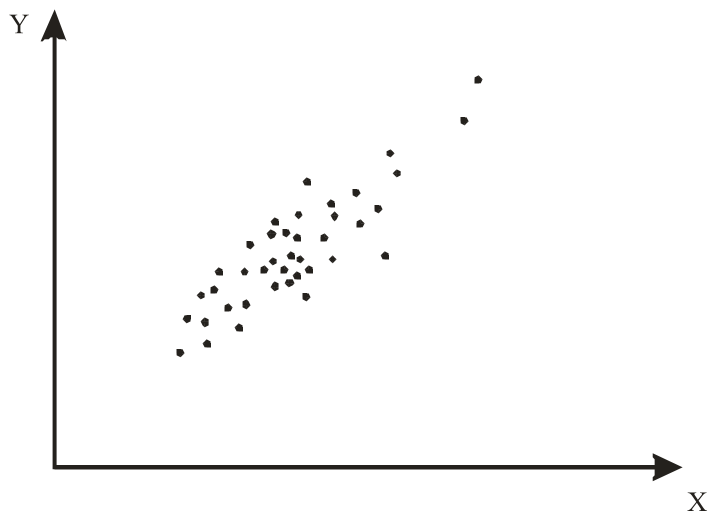

Рисунок 9.1 – Диаграмма разброса

К примерам применения диаграммы разброса для анализа зависимости между причинным фактором и характеристикой (следствием) относятся диаграммы для анализа зависимости суммы, на которую заключены контракты, от числа поездок бизнесмена с целью заключения контрактов (планирование эффективных поездок); процента брака от процента невыхода на работу операторов (контроль персонала); числа поданных предложений от числа циклов (от времени) обучения персонала (планирование обучения); расхода сырья на единицу готовой продукции от степени чистоты сырья (стандарты на сырье); выхода реакции от температуры реакции; толщины плакировки от плотности тока; степени деформации от скорости формовки (контроль процессов); размера принятого заказа от числа дней, за которое производится обработка рекламаций (инструкции по ведению торговых операций, инструкции по обработке рекламаций), и т. д.

При наличии корреляционной зависимости причинный фактор оказывает очень большое влияние на характеристику, поэтому, удерживая этот фактор под контролем, можно достичь стабильности характеристики. Можно также определить уровень контроля, необходимый для требуемого показателя качества.

Примерами применения диаграммы разброса для анализа зависимости между двумя причинными факторами могут служить диаграммы для анализа зависимости между содержанием рекламаций и руководством по эксплуатации изделия (движение за отсутствие рекламаций); между циклами закалки отожженой стали и газовым составом атмосферы (контроль процесса); между числом курсов обучения оператора и степенью его мастерства (планирование обучения и подготовки кадров), и т.д.

При наличии корреляционной зависимости между отдельными факторами значительно облегчается контроль процесса с технологической, временной и экономической точек зрения.

Применение диаграммы разброса для анализа зависимости между двумя характеристиками (результатами) можно видеть на таких примерах, как анализ зависимости между объемом производства и себестоимостью изделия; между прочностью на растяжение стальной пластины и ее прочностью на изгиб; между раз мерами комплектующих деталей и размерами изделий, смонтированных из этих деталей; между прямыми и косвенными затратами, составляющими себестоимость изделия; между толщиной стального листа и устойчивостью к изгибам, и т. д.

При наличии корреляционной зависимости можно осуществлять контроль только одной (любой) из двух характеристик.

Для построения диаграммы разброса с целью определения наличия зависимости между двумя видами данных прежде всего проводят сбор этих данных и представляют их в виде таблицы соответствия тех и других какому-то общему для них условию сбора.

Если данные разделить на причинные факторы и характеристики, то, очевидно, к причинным факторам следует отнести х, а к характеристикам — данные у. Если данных мало, четкую зависимость установить трудно, поэтому желательно, чтобы число пар данных было не менее 30.

На графике на оси абсцисс откладывают значения х, на оси ординат — значения у. При этом длину осей делают почти равной разности между их максимальными и минимальными значениями и наносят на оси деления шкалы.

Далее на график наносятся данные в порядке измерений. Если на одну и ту же точку графика попадает два или три значения, они обозначаются как точка в круге, или в двух кругах, или возле точки проставляется число данных, или рядом с нанесенной точкой сразу перед ней ставятся еще одна, две точки и т. д. После нанесения данных на графике указываются число данных, цель, наименование изделия, название процесса, исполнитель, дата составления графика и т. д. Желательно также, чтобы при регистрации данных во время измерений приводилась и сопровождающая информация, необходимая для дальнейших исследований и анализа: наименование объекта измерения, характеристики, способ выборки, дата, время измерения, температура, влажность, метод измерения, тип измерительного прибора, имя оператора, проводившего измерения (для данной выборки) и др.

Характер корреляционной зависимости, который определяется видом диаграммы разброса, дает представление о том, каким изменениям будет подвержен один из параметров при определенных изменениях другого.

Рисунок 9.2 – Графическая интерпретация различных видов корреляции

Существуют различные методы оценки степени корреляционной зависимости. Одним из них является метод вычисления коэффициента корреляции r по формуле:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

где x_i, y_i — значения параметров x и y для i-го измерения;

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние арифметические значения величин x и y;

σ_x, σ_y — стандартные отклонения величин x и y;

n — число измерений в выборке (объем выборки).

Если $r = \pm1$, это свидетельствует о наличии корреляционной зависимости, если $r = 0$, корреляционная зависимость отсутствует. Чем ближе коэффициент корреляции к 1, тем теснее зависимость между параметрами.

Прямая линия на плоскости (в пространстве двух измерений) задается уравнением $Y = a + b*X$. Переменная Y может быть выражена через константу (a) и угловой коэффициент (b), умноженный на переменную X. Константу иногда называют также свободным членом, а угловой коэффициент - регрессионным или В-коэффициентом. В многомерном варианте, когда имеется более одной независимой переменной, линия регрессии не может быть отображена в двумерном пространстве, однако она также может быть легко оценена. в общем случае, процедуры множественной регрессии будут оценивать параметры линейного уравнения вида:

$$Y = a + b_1*X_1 + b_2*X_2 + \ldots + b_p*X_p$$

Регрессионные коэффициенты (или B-коэффициенты) представляют независимые вклады каждой независимой переменной в предсказание зависимой переменной. Другими словами, переменная X_1, к примеру, коррелирует с переменной Y после учета влияния всех других независимых переменных. Этот тип корреляции называется частной корреляцией.

Линия регрессии выражает наилучшее предсказание зависимой переменной (Y) по независимым переменным (X). Однако, обычно имеется существенный разброс наблюдаемых точек относительно подогнанной прямой на диаграмме рассеяния. Отклонение отдельной точки от линии регрессии (от предсказанного значения) называется остатком. Чем меньше разброс значений остатков около линии регрессии по отношению к общему разбросу значений, тем, очевидно, лучше переменные коррелируют между собой.

Коэффициент линейной регрессии определяют как:

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} xy - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} y}{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} x}$$

В данном разделе курсовой работы необходимо выполнить следующее:

1. Определить фактор-причину и фактор-следствие.
2. Построить диаграмму разброса
3. Рассчитать средние арифметические значения величин.
4. Рассчитать стандартные отклонения величин.
5. Рассчитать коэффициент корреляции.
6. Рассчитать коэффициенты регрессии.
7. Сделать заключение о взаимосвязи между факторами.