метода единичных факторов при рассмотрении некоторых вопросов в курсе теоретической механики. Это не потребует существенных дополнительных затрат учебного времени, поможет студенту лучше усвоить как собственно теоретическую механику, так и глубже понять смысл линейности взаимосвязей (принцип суперпозиции), и осознанно воспринять в дальнейшем общие подходы, формулируемые фактически на этой основе в курсах сопротивления материалов, теории механизмов и машин и, естественно, не только в учебных целях.

Литература

1. И.В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986. — 448 с.

УДК 517:531.112

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

А. В. Локтионов

В работах [1,2] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в цилиндрической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Для ортогональных криволинейных координат модуль скорости точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$.

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q.

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. При этом искомые $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные цилиндрические оси координат r, φ, z, связанные с движущейся точкой M.

В работах [3,4] скорость $\underset{v}{\to}$ и ускорение $\underset{a}{\to}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольных к цилиндрическим системам координат, и наоборот.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [5,6].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки M (на рис. 1 не показана) матричным методом выполнены для случая, когда относительно центра O ее координаты $x_3, y_3, z_3 = const$.

В прямоугольной неподвижной системе координат xyz положение вектора $\vec{R}$ (рис.1) определяется текущими координатами x, y, z точки O_3. В цилиндрической подвижной системе координат положение точки O_3 определяется расстоянием r, углом φ, величиной $O_2O_3 = z$. Введем также подвижные системы координат $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, начало которых находится в точках O_1, O_2. Указанные на рисунке 1 системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы A_1, A_2, A. В окончательных расчетных формулах принято, что $x_3 = y_3 = z_3 = 0$; точка M совпадает с точкой O_3. Проекции абсолютной скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ точки $O_3 = M$ определены как на неподвижные оси координат xyz, так и на подвижные цилиндрические оси координат $x_3y_3z_3$ (r, φ, z).

Координаты точки M в неподвижной системе xyz в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $x_3y_3z_3$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вектор скорости $\vec{v}$ точки M в системе xyz определяется дифференцированием текущих координат равенства (1) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(A_\varphi \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + A_\varphi \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} \right).$$

При $x_3, y_3, z_3 = const$ получим

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

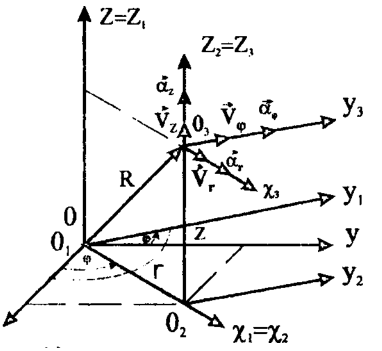

Рис. 1. Расчетная схема для определения кинематических параметров в цилиндрической системе координат

Из формулы (2) определяются проекции вектора скорости точки $M(O_3)$ на неподвижные оси координат *xyz*, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид:

$$\dot x = v_x = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi;$$

$$\dot y = v_y = \dot r\sin\varphi - r\dot\varphi\cos\varphi; \qquad (3)$$

$$\dot z = v_z = \dot z.$$

Модуль скорости точки O_3 найдется из равенств (3) по формуле

$$v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + z^2}. \qquad (4)$$

Направление вектора скорости определится из равенств (3) и (4) соответствующими направляющими косинусами.

В свою очередь вектор скорости $\vec v_3$ точки *M* в системе $x_3y_3z_3\,(r,\varphi,z)$

$$\vec v_3 = A^T\vec v, \qquad (5)$$

где A^T — транспортированная матрица, равная произведению транспортированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_2^T A_1^T A_\varphi^T = A_\varphi^T$. В рассматриваемом случае системы координат $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ составляют между собой углы, косинусы которых образуют единичные матрицы A_1 и A_2. Поэтому $A = A_\varphi \cdot A_1 \cdot A_2 = A_\varphi$, а $A^T = A_\varphi^T$.

Векторы $\vec v; \vec v_3$ в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора $\vec v$ по разным базисам систем координат *xyz* и $x_3y_3z_3$. С учетом (2) равенство (5) будет иметь вид

$$\vec v_3 = A_\varphi^T \dot A_\varphi \dot\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot r \\ 0 \\ \dot z \end{pmatrix} + A_\varphi^T \dot A_\varphi \dot\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Из формулы (6) определяются проекции вектора скорости точки $M(O_3)$ на подвижные цилиндрические оси координат $x_3y_3z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид

$$\dot{x}_3 = v_r = \dot{r};\ \ \dot{y}_3 = v_\varphi = r\dot{\varphi};\ \ \dot{z}_3 = v_z = \dot{z}. \tag{7}$$

Модуль скорости точки O_3 определяется из равенств (7) формулой (4), а направление скорости — направляющими косинусами.

Определим ускорение точки в цилиндрической системе координат матричным методом. Вектор ускорения $\vec{a}$ точки M в системе xyz определится дифференцированием равенства (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{A}_\varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + 2\dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + (\ddot{A}_\varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_\varphi \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора ускорения точки $M(O_3)$ на неподвижные оси координат xyz, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a_x &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi; \\ a_y &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi; \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \tag{9}$$

Модуль ускорения точки O определяется из равенств (9) по формуле

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \tag{10}$$

Направляющие косинусы вектора ускорения определяются из равенств (9) и (10). Вектор ускорения $\vec{a}$ точки M в системе $x_3y_3z_3$ (r, φ, z, см. рис. 1)

$$\vec{a}_3 = A^T \vec{a}. \tag{11}$$

С учетом (8) из равенства (11) получим проекции вектора ускорения точки $M(O_3)$ на подвижные цилиндрические оси координат $x_3y_3z_3$, которые при $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ имеют вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} a_{x_3} &= a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \\ a_{y_3} &= a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \\ a_{z_3} &= a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \tag{12}$$

Модуль ускорения точки O определяется формулой (10), а направление ускорения — направляющими косинусами.

Полученные расчетные формулы (2), (6) и (8), (11) позволяют определить скорость и ускорение точки M в цилиндрических координатах матричным методом.

Вывод формул для расчета проекций скорости и ускорения точки (см. рис.1) на неподвижные xyz и подвижные $x_3y_3z_3$ (r, φ, z) оси координат достаточно прост. В рассматриваемом случае это объясняется тем, что все элементы третьей строки и столбца матрицы $A = A_\varphi$, кроме главной диагонали, равны нулю. Элемент главной диагонали равен единице. Кроме того, второй элемент столбцевых матриц расчетных формул (2), (6), (8), (11) также равен нулю; при расчете $x_3 = y_3 = z_3 = 0$. Для численного расчета скорости и ускорения точки можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Изложенную методику расчета кинематических параметров следует использовать для определения скорости и ускорения точки в сферических координатах, когда применение известных методов расчета нецелесообразно. Полученные расчетные формулы (3), (4), (7), (9), (10), (12) в частном случае применимы для движения, заданного в полярных координатах. Они позволяют найти проекции скорости и ускорения на радиальное и поперечное направления.

Пример (№ 12.38 [5]). Механизм робота-манипулятора состоит (рис. 2) из поворотного устройства, колонны для вертикального перемещения и выдвигающейся руки со схватом. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $\varphi(t), z(t), r(t)$.

Кинематическая и расчетная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат, изображена на рис. 2. Координаты центра схвата (точка M) в неподвижной системе xyz при заданных $\varphi(t), z(t), r(t)$, выражаются формулой (1), где $x_3 = y_3 = z_3 = 0$.

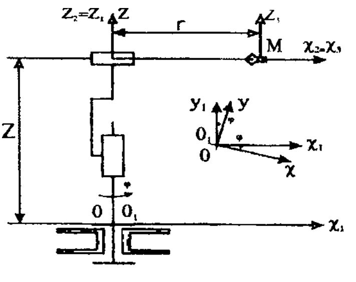

Рис. 2. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат

Формула для расчета скорости центра схвата имеет вид (6); проекции скорости точки M на подвижные цилиндрические оси координат определяются из (7); искомая скорость — из (4).

Формула для расчета ускорения центра схвата имеет вид (11); его проекции на оси координат определяются из (12); искомое ускорение — из (10).

При заданных $\varphi(t), z(t), r(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (1), где роль параметра играет время t. Они имеют вид

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{13}$$

При заданных $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу A_φ^T, получим из формулы (1). Они имеют вид

$$r = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad \varphi = arctg(y/x), \quad z = z. \tag{14}$$

Уравнения (13) и (14) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных $\varphi(t), z(t), r(t)$, так и при $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат.

Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том. 1.— М.: Наука, 1970.— с.240.

2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1.— М.: Наука, 1972.— с. 468.

3. Халфман Р.Л. Динамика. — М.: Наука, 1972.— с. 568.

4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1983. — с. 575.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — с. 448.

6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. Т 1. Статика и кинематика.— М.: Наука, 1990. — с. 672.