МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Е. Н. Левковский

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемый автономный робот представляет собой манипулятор, установленный на колесной мобильной платформе. Такой робот имеет намного большее рабочее пространство, чем манипулятор на неподвижном основании. Проблемы моделирования и управления движением мобильных манипуляторов исследовались во многих работах, см., например, ссылки в статье [3]. Динамические уравнения движения плоской жесткой модели колесного мобильного робота с двухзвенным манипулятором получены в работе [1].

Цель этой работы — показать, как выводятся дифференциальные уравнения движения автономного робота посредством уравнений Эйлера-Лагранжа, потому что они применимы для систем с голономными и неголономными связями.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_n, q_{n+1}, ..., q_{n+m}$ Предположим, что эта система имеет m неголономных связей, задаваемых уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n+m} a_{n+\nu,s}\dot{q}_s = 0, \ \nu = 1,2,...,m \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{n+\nu,s}$ — функции обобщенных координат $q_1,...,q_{n+m}$.

Для определения скоростей точек системы часто предпочтительнее использовать не сами обобщенные скорости, а некоторые их линейные комбинации с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат, в виде π_r, $r = 1,2,...,n+m$

$$\dot{\pi}_i = \omega_i = \sum_{s=1}^{n+m} a_{is}\dot{q}_s, \ i = 1,2,...,n \tag{2}$$

$$\dot{\pi}_{n+\nu} = \omega_{n+\nu} = \sum_{s=1}^{n+m} a_{n+\nu,s}\dot{q}_s, \ \nu = 1,2,...,m. \tag{3}$$

Величины $\dot{\pi}_r$, $s,r = 1,2,...,n+m$ называются квазискоростями, а символы π_r, — квазикоординатами.

Правые части соотношений (3) совпадают с левыми частями соответствующих уравнений неголономных связей (1), а коэффициенты a_{is} в выражениях

(2) выбираются так, чтобы соотношения (2) и (3) были бы однозначно разрешимы относительно $\dot{q}_1,...,\dot{q}_{n+m}$. Тогда из равенств (2) и (3) обобщенные скорости можно представить через квазискорости в виде

$$\dot{q}_s = \sum_{r=1}^{n-m} b_{rs}\dot{\pi}_r \ , \ s = 1,2,...,n+m \tag{4}$$

Для произвольной функции $f(q_1,...,q_{n+m})$ символ $\partial f / \partial \pi_i$ обозначает по определению следующую операцию

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_i} = \sum_{s=1}^{n+m} b_{si} \frac{\partial f}{\partial q_s} \tag{5}$$

Уравнения движения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_r}\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^r_{ij}\dot{\pi}_j \right) = \Pi_i \ , \ i = 1,2,...,n-m \ , \tag{6}$$

где Т* — функция, которая получается из выражения кинетической энергии системы заменой $\dot{q}_s$ на псевдоскорости $\dot{\pi}_r$, $s, r = 1,2,...,n+m$ согласно уравнениям (4). Величина

$$\Pi_i = \sum_{s=1}^{n+m} Q_s b_{si} \ , \ i = 1,2,...,n \tag{7}$$

представляет собой обобщенную силу, которая производит работу на возможном перемещении $\delta\pi_i$, а Q_s — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_s, $s = 1,2,...,n+m$.

Трехиндексные симвоы Больцмана γ^r_{ij} вычисляются [2, с. 32–35, 68] или по формулам

$$\gamma^r_{ij} = \sum_{s=1}^{n+m}\sum_{l=1}^{n+m}\left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{rl}}{\partial q_s} \right) b_{si} b_{lj} \ , \ r = 1,2,...,n+m, \ i,j = 1,2,...,n \ , \tag{8}$$

или из перестановочных соотношений (билинейных ковариантов Фробениуса)

$$\frac{d}{dt}\delta\pi_r - \delta\omega_r = (\delta\pi_r)^{\bullet} - \delta\omega_r = d\delta\pi_r - \delta d\pi_r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma^r_{ij}\delta\pi_i d\pi_j \ , \ r = 1,2,...,n+m \tag{9}$$

Значения символов $\gamma^r_{ij} = -\gamma^r_{ji}$ зависят только от принятого определения квазискоростей (2) и (3)через обобщенные скорости. Они не зависят ни от структуры, ни от движения системы.

В уравнениях (6) после выполнения всех указанных операций квазискорости следует приравнять нулю

$$\dot{\pi}_{n+1} = 0, \ldots, \dot{\pi}_{n+m} = 0 \qquad (10)$$

Заметим, что в уравнениях (6) кинетическая энергия T^* является функцией всех $n + m$ квазискоростей $\dot{\pi}_r$. Поскольку в (6) содержатся производные от T^* по всем квазискоростям, в том числе и по квазискоростям $\dot{\pi}_{n+\nu}$, обращающимся в нуль согласно соотношениям (1), то связи (1) нужно учитывать только после составления уравнений (6), когда дифференцирование по квазискоростям уже выполнено.

Уравнения Эйлера-Лагранжа (6) вместе с уравнениями связей (1) и выражениями (2) представляют собой $2n+m$ уравнений движения системы в квазикоординатах. При известных начальных условиях интегрированием этих уравнений можно найти $+2n+m$ неизвестных функций $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, q_1, \ldots, q_{n+m}$.

Уравнения (6) для последних m квазикоординат $\pi_{n+1}, \ldots, \pi_{n+m}$ будут уравнениями m обобщенных реакций неголономных связей

$$R_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_r}\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}^{r} \dot{\pi}_j \right) - \Pi_k \, , \; k = n+1, \ldots, n+m \, . \qquad (11)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа или Больцмана-Гамеля позволяют записать уравнения движения голономных и неголономных систем в единой форме. Далее эти уравнения используются для вывода уравнений движения модели автономного робота.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Модель автономного робота состоит из трехзвенного манипулятора и колесной мобильной платформы 3, как показано на рис. 1. Мобильная платформа оборудована двумя приводными и управляющими колесами 1 и 2 на одной оси; по углам она поддерживается четырьмя пассивными колесами, которые при выводе уравнений движения не учитываются. Приводные колеса 1 и 2 во время движения катятся без скольжения. Предполагается, что модель робота сделана из жесткой платформы 3, снабженной недеформируемыми колесами, перемещающимися по гладкой горизонтальной плоскости. Звенья 4, 5 и 6 манипулятора считаются также жесткими.

Движение модели робота рассматривается в инерциальной системе отсчета $O_0x_0y_0z_0$, закрепленной в плоскости движения. Система отсчета $C_{C3}x_{C3}y_{C3}z_{C3}$ связана с мобильной платформой. Точка M есть середина расстояния равного $2a$ между колесами 1 и 2. Положение модели робота полностью определяется координатами x_{C3}, y_{C3}, z_{C3} точки C_3 в системе отсчета $O_0x_0y_0z_0$ в плоскости движения, углом ориентации ψ между продольной осью C_3x_{C3} платформы 3 и осью O_0x_0, углами поворота φ_1, φ_2 колес 1 и 2, оба радиуса r, вращающихся относительно их горизонтальных осей O_1y_1, O_2y_2, углами поворота $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ звеньев 4, 5, 6 манипулятора соответственно. Предполагается, что для каждого из звеньев манипулятора локальные оси систем отсчета, показанных на рис. 1, параллельны главным центральным осям инерции. Длины звеньев 4, 5 и 6 обозначены через l_4, l_5, l_6 соответственно. Пусть точки $O_1, O_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ — центры масс колес 1 и 2, платформы 3, звеньев манипулятора 4, 5 и 6 соответственно; $MC_3 = h$, $O_3C_4 = l_{C4}$, $O_4C_5 = l_{C5}$, $O_5C_6 = l_{C6}$, $z_{C3} = r + h$. Вращающие моменты, развиваемые двигателями, есть τ_1, τ_2 для вращения колес 1 и 2, τ_4, τ_5, τ_6 для поворота звеньев 4, 5 и 6 соответственно.

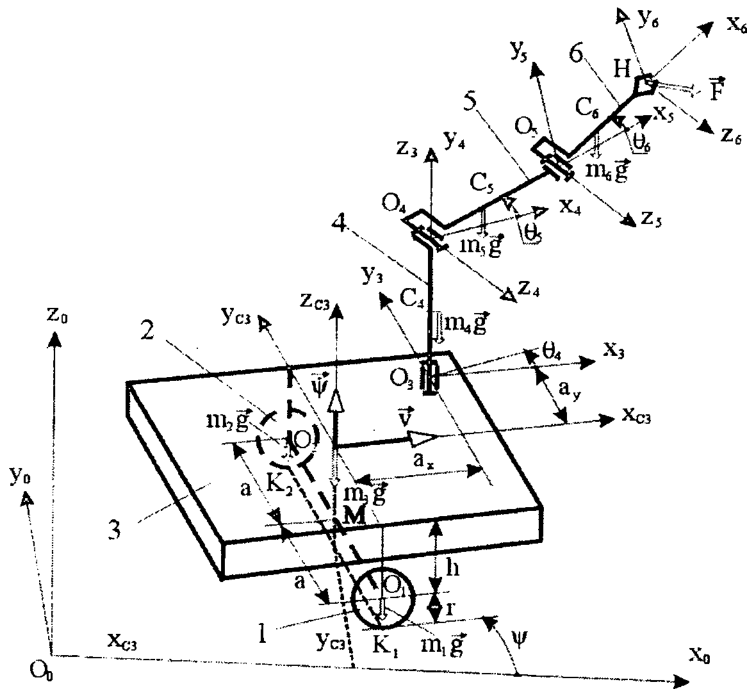

Рис. 1. Пространственная модель автономного робота

Пусть обобщенные координаты

$$q_1 = \theta_4, \quad q_2 = \theta_5, \quad q_3 = \theta_6, \quad q_4 = x_{C3}, \quad q_5 = y_{C3}, \quad q_6 = \psi, \quad q_7 = \varphi_1, \quad q_8 = \varphi_2 \quad (12).$$

Уравнения неголономных связей могут быть записаны в виде

$$(\vec{v})_{yC3} = -\dot{x}_{C3}\sin\psi + \dot{y}_{C3}\cos\psi = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &(\vec{v}_{K1})_{xC3} = \dot{x}_{C3}\cos\psi + \dot{y}_{C3}\sin\psi + a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_1 = 0,\\ &(\vec{v}_{K2})_{xC3} = \dot{x}_{C3}\cos\psi + \dot{y}_{C3}\sin\psi - a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Соотношения (13) отражают невозможность бокового скольжения ортогональноплоскостямколес. Здесь $\vec{v}$ — вектор скорости мобильной платформы. Формулы (14) являются условиями отсутствия скольжения каждого из колес 1 и 2 в их средних плоскостях в точках контакта K1, K2 колес соответственно.

Итак, пространственнная модель автономного робота имеет восемь обобщенных координат (12), три неголономные связи (13) и (14) и пять степеней свободы движения. Поэтому необходимо вывести три уравнения движения каждого звена манипулятора, два уравнения движения колесной платформы и три уравнения реакций неголономных связей.

Теперь введем квазикоординаты соотношениями

$$\begin{aligned} &\dot{\pi}_1 = \omega_1 = \dot{\theta}_4,\ \dot{\pi}_2 = \omega_2 = \dot{\theta}_5,\ \dot{\pi}_3 = \omega_3 = \dot{\theta}_6,\ \dot{\pi}_4 = \omega_4 = \dot{\psi}\\ &\dot{\pi}_5 = \omega_5 = (\vec{v})_{xC3} = v = \dot{x}_{C3}^{(3)} = \dot{x}_{C3}\cos\psi + \dot{y}_{C3}\sin\psi,\\ &\pi_6 = \omega_6 = (\vec{v})_{yC3} = \dot{y}_{C3}^{(3)} = -\dot{x}_{C3}\sin\psi + \dot{y}_{C3}\cos\psi\\ &\dot{\pi}_7 = \omega_7 = (\vec{v}_{K1})_{xC3} = \dot{x}_{C3}\cos\psi + \dot{y}_{C3}\sin\psi + a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_1,\\ &\dot{\pi}_8 = \omega_8 = (\vec{v}_{K2})_{xC3} = \dot{x}_{C3}\cos\psi + \dot{y}_{C3}\sin\psi - a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Вариации квазикоординат на основании соотношений (15) будут

$$\begin{aligned} &\delta\pi_1 = \delta\theta_4,\quad \delta\pi_2 = \delta\theta_5,\quad \delta\pi_3 = \delta\theta_6,\quad \delta\pi_4 = \delta\psi\\ &\delta\pi_5 = \delta x_{C3}\cos\psi + \delta y_{C3}\sin\psi,\ \delta\pi_6 = -\delta x_{C3}\sin\psi + \delta y_{C3}\cos\psi\\ &\delta\pi_7 = \delta x_{C3}\cos\psi + \delta y_{C3}\sin\psi + a\delta\psi - r\varphi_1,\\ &\delta\pi_8 = \delta x_{C3}\cos\psi + \delta y_{C3}\sin\psi - a\delta\psi - r\varphi_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Обобщенные скорости из формул (15)

$$\begin{aligned} &\dot{\theta}_4 = \dot{\pi}_1 = \omega_1,\quad \dot{\theta}_5 = \dot{\pi}_2 = \omega_2,\quad \dot{\theta}_6 = \dot{\pi}_3 = \omega_3,\quad \dot{\psi} = \dot{\pi}_4 = \omega_4\\ &\dot{x}_{C3} = \omega_5\cos\psi - \omega_6\sin\psi,\qquad \dot{y}_{C3} = \omega_5\sin\psi + \omega_6\cos\psi\\ &\dot{\varphi}_1 = (a\omega_4 + \omega_5 - \omega_7)/r,\quad \dot{\varphi}_2 = (-a\omega_4 + \omega_5 - \omega_8) \end{aligned} \tag{17}$$

Ненулевые элементы матрицы коэффициентов b_{sr}, $s, r = 1,\ldots,8$ согласно (17)

$$\begin{aligned} &b_{11} = b_{22} = b_{33} = 1,\ \ b_{45} = \cos\psi,\ b_{46} = -\sin\psi,\ b_{55} = \sin\psi,\ b_{56} = \cos\psi,\ b_{64} = 1\\ &b_{74} = a/r,\ \ b_{75} = 1/r,\ b_{77} = -1/r,\ b_{84} = -a/r,\ \ b_{85} = 1/r,\ \ b_{88} = -1/r \end{aligned} \tag{18}$$

Вариации обобщенных координат, используя уравнения (17),

$$\begin{aligned}&\delta\theta_4=\delta\pi_1,\ \ \delta\theta_5=\delta\pi_2,\ \ \delta\theta_6=\delta\pi_3,\ \delta\psi=\delta\pi_4,\ \delta x_{C3}=\delta\pi_5\cos\psi-\delta\pi_6\sin\psi\\&\delta y_{C3}=\delta\pi_5\sin\psi+\delta\pi_6\cos\psi,\quad \delta\varphi_1=\left(a\delta\pi_4+\delta\pi_5-\delta\pi_7\right)/r,\\&\delta\varphi_2=\left(-a\delta\pi_4+\delta\pi_5-\delta\pi_8\right)/r\end{aligned}\tag{19}$$

Трехиндексные символы γ_{ij}^r вычисляются путем составления перестановочных соотношений (9). Следовательно

$$\begin{aligned}&(\delta\pi_5)^{\bullet}-\delta\omega_5=d\left(\delta x_{C3}c\psi+\delta y_{C3}s\psi\right)/dt-\delta\left(\dot x_{C3}c\psi+\dot y_{C3}s\psi\right)=\\&=-\dot\psi\delta x_{C3}s\psi+\dot\psi\delta y_{C3}c\psi+\dot x_{C3}\delta\psi s\psi-\dot y_{C3}\delta\psi c\psi\end{aligned}$$

В этом выражении обобщенные скорости надо заменить их значениями (17) через квазискорости, а вариации обобщенных координат по аналогичным формулам (19) через вариации квазикоординат. Тогда

$$\begin{aligned}&(\delta\pi_5)^{\bullet}-\delta\omega_5=-\omega_4\left(\delta\pi_5c\psi-\delta\pi_6s\psi\right)s\psi+\omega_4\left(\delta\pi_5s\psi-\delta\pi_6c\psi\right)c\psi+\\&+\left(\omega_5c\psi-\omega_6s\psi\right)\delta\pi_4s\psi-\left(\omega_5s\psi+\omega_6c\psi\right)\delta\pi_4c\psi=\omega_4\delta\pi_6-\omega_6\delta\pi_4\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $s\psi=\sin\psi$, $c\psi=\cos\psi$, $s(\psi+\theta_4)$, $c(\psi+\theta_4)=\cos(\psi+\theta_4)$, $s\theta_i=\sin\theta_i$ и так далее.

$$(\delta\pi_6)^{\bullet}-\delta\omega_6=d\left(-\delta x_{C3}s\psi+\delta y_{C3}c\psi\right)/dt-\delta\left(-\dot x_{C3}s\psi+\dot y_{C3}c\psi\right)=-\omega_4\delta\pi_5+\omega_5\delta\pi_4$$

$$(\delta\pi_7)^{\bullet}-\delta\omega_7=d\left(\delta x_{C3}c\psi+\delta y_{C3}s\psi+a\delta\psi-r\delta\varphi_1\right)/dt-\delta\left(\dot x_{C3}c\psi+\dot y_{C3}s\psi+a\dot\psi-r\dot\varphi_1\right)=\omega_4\delta\pi_6-\omega_6\delta\pi_4$$

$$(\delta\pi_8)^{\bullet}-\delta\omega_8=d\left(\delta x_{C3}c\psi+\delta y_{C3}s\psi-a\delta\psi-r\delta\varphi_2\right)/dt-\delta\left(\dot x_{C3}c\psi+\dot y_{C3}s\psi-a\dot\psi-r\dot\varphi_2\right)=\omega_4\delta\pi_6-\omega_6\delta\pi_4$$

Отсюда следует, что ненулевые трехиндексные символы

$$\gamma_{46}^5=-\gamma_{64}^5=1,\qquad \gamma_{54}^6=-\gamma_{45}^6=1,\qquad \gamma_{46}^7=-\gamma_{64}^7=1,\qquad \gamma_{46}^8=-\gamma_{64}^8=1\tag{20}$$

Координаты центров масс в системе отсчета $O_0x_0y_0я_0$ представляются в виде

$$\begin{aligned}&x_1^{(0)}=x_{C3}+as\psi,\quad y_1^{(0)}=y_{C3}-ac\psi,\quad z_1^{(0)}=r\\&x_2^{(0)}=x_{C3}-as\psi,\quad y_2^{(0)}=y_{C3}+ac\psi,\quad z_2^{(0)}=r\\&x_{C3}^{(0)}=x_{C3},\quad y_{C3}^{(0)}=y_{C3},\quad z_{C3}^{(0)}=r+h\\&x_{C4}^{(0)}=x_{C3}+a_xc\psi-a_ys\psi,\quad y_{C4}^{(0)}=y_{C3}+a_xs\psi+a_yc\psi,\quad z_{C4}^{(0)}=r+h+l_{C4}\\&x_{C5}^{(0)}=x_{C4}^{(0)}+l_{C5}c(\psi+\theta_4)c\theta_5,\quad y_{C5}^{(0)}=y_{C4}^{(0)}+l_{C5}s(\psi+\theta_4)c\theta_5,\quad z_{C5}^{(0)}=r+h+l_4+l_{C5}s\theta_5\\&x_{C6}^{(0)}=x_{C4}^{(0)}+l_5c(\psi+\theta_4)c\theta_5+l_{C6}c(\psi+\theta_4)c(\theta_5+\theta_6)\\&y_{C6}^{(0)}=y_{C4}^{(0)}+l_5s(\psi+\theta_4)c\theta_5+l_{C6}s(\psi+\theta_4)c(\theta_5+\theta_6),\quad z_{C6}^{(0)}=r+h+l_4+l_5s\theta_5+l_{C6}s(\theta_5+\theta_6)\end{aligned}\tag{21}$$

Уравнения (21) позволяют найти абсолютные обобщенные скорости центров масс, а также и захвата манипулятора, если в последних трех уравнениях (21) величину l_{C6} заменить на l_6.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭЕРГИЯ

Проекции векторов абсолютных угловых скоростей звеньев модели на оси координат, связанных с этими звеньями, можно записать в виде

$$\vec{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & \dot{\varphi}_1 & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T,\ \vec{\omega}_2^{(2)} = \begin{bmatrix}0 & \dot{\varphi}_2 & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T,\ \vec{\omega}_3^{(C3)} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T,\ \vec{\omega}_4^{(4)} = \begin{bmatrix}0 & \dot{\psi}+\dot{\theta}_4 & 0\end{bmatrix}^T$$
$$\vec{\omega}_5^{(5)} = \begin{bmatrix}(\dot{\psi}+\dot{\theta}_4)s_5 & (\dot{\psi}+\dot{\theta}_4)c_5 & \dot{\theta}_5\end{bmatrix}^T,\ \vec{\omega}_6^{(6)} = \begin{bmatrix}(\dot{\psi}+\dot{\theta}_4)s_{56} & (\dot{\psi}+\dot{\theta}_4)c_{56} & \dot{\theta}_5+\dot{\theta}_6\end{bmatrix}^T \qquad (22)$$

Кинетическая энергия звена s определяется по формуле

$$T_s = 0.5\left(m_s\vec{v}_{Cs}^2 + \vec{\omega}_s^T I_{Cs}\vec{\omega}_s\right) \qquad (23)$$

где m_s — масса звена s, $\vec{v}_{Cs}$ — абсолютная скорость центра масс, $\vec{\omega}_s$ — абсолютная угловая скорость звена, I_{Cs} — тензор инерции звена в центре масс. Массы звеньев механизмов приводов не учитываются. Моменты инерции относительно главных центральных осей звена s обозначены через I_{sx}, I_{sy}, I_{sz}. Величины $I_{1y} = I_{2y}$, $I_{1z} = I_{2z}$ — моменты инерции колес 1 и 2 относительно их горизонтальных осей вращения и диаметра соответственно.

Введем следующие обозначения для сокращения записей

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6,\quad m_1 = m_2,\quad m_{12} = m_1 + m_2,\quad m_{46} = m_4 + m_5 + m_6$$
$$I_z = I_{1z} + I_{2z} + I_{C3z},\quad I_\psi = I_{4y} + I_{5x}s_5^2 + I_{5y}c_5^2 + I_{6x}s_{56}^2 + I_{6y}c_{56}^2,\quad I_6 = \left(I_{6x} - I_{6y}\right)s_{56}c_{56}$$
$$I_{\psi\theta} = \left(I_{5x} - I_{5y}\right)s_5c_5 + I_6,\quad b_1 = m_6l_5l_{C6}s_6,\quad b_2 = m_6l_5l_{C6}c_6,\quad b_3 = m_6l_{C6}s_{56}$$
$$b_4 = m_6l_{C6}c_{56},\quad a_1 = a_xc_4 + a_ys_4,\quad a_2 = a_xs_4 - a_yc_4,\quad a_3 = m_5l_{C5}c_5 + m_6l_5c_5 + b_4$$
$$a_4 = m_5l_{C5}s_5 + m_6l_5s_5 + b_3,\quad a_5 = m_5l_{C5}^2c_5 + m_6\left(l_5c_5 + l_{C6}c_{56}\right)^2$$
$$a_6 = b_2s_{56} + m_6l_{C6}^2s_{56}c_{56},\quad a_7 = m_5l_{C5}^2s_5c_5 + m_6l_5^2s_5c_5 + m_6l_{C6}^2s_{56}c_{56} + b_1c_{56} + b_2s_{56}$$

Кинетическая энергия модели робота равна сумме кинетических энергий колес 1 и 2, платформы 3, звеньев манипулятора 4, 5 и 6. Поэтому

$$2T = \dot{x}_{C3}^2m + \dot{y}_{C3}^2m + \dot{\psi}^2\left[m_{12}a^2 + m_{46}\left(a_x^2 + a_y^2\right) + 2a_1a_3 + a_5 + I_z + I_\psi\right] + \dot{\theta}_4^2\left(a_5 + I_\psi\right) +$$
$$+\dot{\theta}_5^2\left[m_5l_{C5}^2 + m_6l_5^2 + m_6l_{C6}^2 + 2b_2 + I_{5z} + I_{6z}\right] + \dot{\theta}_6^2\left(m_6l_{C6}^2 + I_{6z}\right) + \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2\right)I_{1y} -$$
$$-2\dot{x}_{C3}\dot{\psi}\left[m_{46}\left(a_xs\psi + a_yc\psi\right) + a_3s(\psi + \theta_4)\right] - 2\dot{x}_{C3}\dot{\theta}_4a_3s(\psi + \theta_4) -$$
$$-2\dot{x}_{C3}\dot{\theta}_5a_4c(\psi + \theta_4) - 2\dot{x}_{C3}\dot{\theta}_6b_3c(\psi + \theta_4) + 2\dot{y}_{C3}\dot{\psi}\left[m_{46}\left(a_xc\psi - a_ys\psi\right) + a_3c(\psi + \theta_4)\right] +$$

$$+2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_4 a_3 c(\psi+\theta_4)-2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_5 a_4 s(\psi+\theta_4)-2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_6 b_3(\psi+\theta_4)+$$
$$+2\dot{\psi}\dot{\theta}_4\left(a_1a_3+a_7+I_\psi\right)-2\dot{\psi}\dot{\theta}_5 a_2a_4-2\dot{\psi}\dot{\theta}_6 a_2b_3+2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right) \qquad (24)$$

Кинетическая энергия модели через квазискорости

$$2T^*=\omega_1^2\left(a_5+I_\psi\right)+\omega_2^2\left(m_5l_{C5}^2+m_6l_5^2+m_6l_{C6}^2+2b_2+I_{5z}+I_{6z}\right)+\omega_3^2\left(m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)+$$
$$+\omega_4^2\left[m_{12}a^2+m_{46}\left(a_x^2+a_y^2\right)+2a_1a_3+a_5+2I_{1y}a^2/r^2+I_z+I_\psi\right]+\omega_5^2\left(m+2I_{1y}/r^2\right)+\omega_6^2m+$$
$$+\omega_7^2I_{1y}/r^2+\omega_8^2I_{1y}/r^2+2\omega_1\omega_4\left(a_1a_3+a_5+I_\psi\right)-2\omega_1\omega_5a_3s_4+2\omega_1\omega_6a_3c_4+$$
$$+2\omega_2\omega_3\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)-2\omega_2\omega_4a_2a_4-2\omega_2\omega_5a_4c_4-2\omega_2\omega_6a_4s_4-2\omega_3\omega_4a_2b_3-$$
$$-2\omega_3\omega_5b_3c_4-2\omega_3\omega_6b_3s_4-2\omega_4\omega_5\left[m_{45}a_y+a_3s_4\right]+2\omega_4\omega_6\left(m_{45}a_x+a_3c_4\right)-$$
$$-2\omega_4\omega_7I_{1y}a/r^2+2\omega_4\omega_8I_{1y}a/r^2-2\omega_5\omega_7I_{1y}/r^2-2\omega_5\omega_8I_{1y}/r^2$$

Производные от T^* по квазискоростям

$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_1=\partial T^*/\partial\omega_1=\omega_1\left(a_5+I_\psi\right)+\omega_4\left(a_1a_3+a_5+I_\psi\right)-\omega_5a_3s_4+\omega_6a_3c_4$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_2=\omega_2\left(m_5l_{C5}^2+m_6l_5^2+m_6l_{C6}^2+2b_2+I_{5z}+I_{6z}\right)+\omega_3\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)-\omega_4a_2a_4-\omega_5a_4c_4-\omega_6a_4s_4$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_3=\omega_2\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)+\omega_3\left(m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)-\omega_4a_2b_3-\omega_5b_3c_4-\omega_6b_3s_4$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_4=\omega_1\left(a_1a_3+a_5+I_\psi\right)-\omega_2a_2a_4-\omega_3a_2b_3+$$
$$+\omega_4\left[m_{12}a^2+m_{46}\left(a_x^2+a_y^2\right)+a_1a_3+a_5+2I_{1y}a^2/r^2+I_z+I_\psi\right]-$$
$$-\omega_5\left[m_{46}a_y+a_3s_4\right]+\omega_6\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)-\left(\omega_7-\omega_8\right)I_{1y}a/r^2$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_5=-\omega_1a_3s_4-\omega_2a_4c_4-\omega_3b_3c_4-\omega_4\left[m_{46}a_y+a_3s_4\right]+\omega_5\left(2I_{1y}/r^2+m\right)-\left(\omega_7+\omega_8\right)I_{1y}/r^2$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_6=\omega_1a_3c_4-\omega_2a_4s_4-\omega_3b_3s_4+\omega_4\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)+\omega_6m$$
$$\partial T^*/\partial\dot{\pi}_7=\left(-\omega_4a-\omega_5+\omega_7\right)I_{1y}/r^2,\qquad \partial T^*/\partial\dot{\pi}_8=\left(\omega_4a-\omega_5+\omega_8\right)I_{1y}/r^2$$

Ненулевые производные от T^* по квазикоординатам с учетом (5)

$$\partial T^*/\partial\pi_1=\partial T^*/\partial\theta_4=-\omega_4^2a_2a_3-\omega_1\omega_4a_2a_3-\omega_1\omega_5a_3c_4-\omega_1\omega_6a_3s_4-\omega_2\omega_4a_1a_4+$$
$$+\omega_2\omega_5a_4s_4-\omega_2\omega_6a_4c_4-\omega_3\omega_4a_1b_3+\omega_3\omega_5b_3s_4-\omega_3\omega_6b_3c_4-\omega_4\omega_5a_3c_4-\omega_4\omega_6a_3s_4$$
$$\partial T^*/\partial\pi_2=\partial T^*/\partial\theta_5=-\omega_1^2\left(a_7-I_{\psi\theta}\right)-\omega_4^2\left(a_1a_4+a_7-I_{\psi\theta}\right)-\omega_1\omega_4\left(a_1a_4+2a_7-2I_{\psi\theta}\right)+\omega_1\omega_5a_4s_4-$$
$$-\omega_1\omega_6a_4c_4-\omega_2\omega_4a_2a_3-\omega_2\omega_5a_3c_4-\omega_2\omega_6a_3s_4-\omega_3\omega_4a_2b_4-\omega_3\omega_5b_4c_4-\omega_3\omega_6b_4s_4+\omega_4\omega_5a_4s_4-\omega_4\omega_6a_4c_4$$
$$\partial T^*/\partial\pi_3=\partial T^*/\partial\theta_6=-\omega_1^2\left(a_6-I_6\right)-\omega_2^2b_1-\omega_4^2\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)-\omega_1\omega_4\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)+$$
$$+\omega_1\omega_5b_3s_4-\omega_1\omega_6b_3c_4-\omega_2\omega_3m_6l_{C6}s_6-\omega_2\omega_4a_2b_4-\omega_2\omega_5b_4c_4-\omega_2\omega_6b_4s_4-\omega_3\omega_4a_2b_4-$$
$$-\omega_3\omega_5b_4c_4-\omega_3\omega_6b_4s_4+\omega_4\omega_5b_3s_4-\omega_4\omega_6b_3c_4$$

Вычисление сумм

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_j}\left(\sum_{k=1}^{8}\gamma_{4k}^j\dot{\pi}_k\right)=\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_5}\gamma_{46}^5\dot{\pi}_6+\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_6}\gamma_{45}^6\dot{\pi}_5+\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_7}\gamma_{46}^7\dot{\pi}_6+\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_8}\gamma_{46}^8\dot{\pi}_6=-\omega_1\omega_5a_3c_4-\omega_1\omega_6a_3s_4+$$
$$\omega_2\omega_5a_4s_4-\omega_2\omega_6a_4c_4+\omega_3\omega_5b_3s_4-\omega_3\omega_6b_3c_4-\omega_4\omega_5\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)-\omega_4\omega_6\left(m_{46}a_y+a_3s_4\right)$$

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_j}\left(\sum_{k=1}^{8}\gamma_{5k}^{j}\dot\pi_k\right)=\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_6}\gamma_{54}^{6}\dot\pi_4=\omega_4^2\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)+\omega_1\omega_4a_3s_4-\omega_2\omega_4a_4s_4-\omega_3\omega_4b_3s_4+\omega_4\omega_6m$$

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_j}\left(\sum_{k=1}^{8}\gamma_{6k}^{j}\dot\pi_k\right)=\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_5}\gamma_{64}^{5}\dot\pi_4+\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_7}\gamma_{64}^{7}\dot\pi_4+\frac{\partial T^*}{\partial \dot\pi_8}\gamma_{64}^{8}\dot\pi_4=$$

$$=\omega_4^2\left(m_{46}a_y+a_3s_4\right)+\omega_1\omega_4a_3s_4+\omega_2\omega_4a_4c_4+\omega_3\omega_4b_3c_4-\omega_4\omega_5m$$

Остальные суммы равны нулю.

ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Все кинематические пары модели робота считаются идеальными. Предполагается, что на модель действуют движущие моменты τ_{r1}, τ_{r2}, τ_{r4}, τ_{r5}, τ_{r6} приведенные к осям вращения колес 1 и 2 или поворота звеньев 4, 5 и 6, силы тяжести, эквивалентные сосредоточенным силам $m_s\vec g$, $s=1,...,6$, приложенным в центрах масс звеньев, сила сопротивления $\vec F\left(F_x,F_y,F_z\right)$, действующая на захват H. Все силы заданы в системе отсчета $O_0x_0y_0z_o$. Обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_j, $j=1,...,8$ могут быть определены по формулам

$$Q_j=\tau_{ri}-\sum_{k=j}^{8}m_kg\frac{\partial z_{Ck}^{(0)}}{\partial q_j}+F_x\frac{\partial x_H^{(0)}}{\partial q_j}+F_y\frac{\partial y_H^{(0)}}{\partial q_j}+F_z\frac{\partial z_H^{(0)}}{\partial q_j},\qquad i=1,2,4,5,6 \tag{29}$$

Обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам, определены по уравнениям (7) в виде

$$\Pi_1=\Pi_{\theta4}=Q_1b_{11}=Q_1=\tau_{r4}-F_x\left[l_5s(\psi+\theta_4)c_5+l_6s(\psi+\theta_4)c_{56}\right]+F_y\left[l_5c(\psi+\theta_4)c_5+l_6c(\psi+\theta_4)c_{56}\right]$$

$$\Pi_2=\Pi_{\theta5}=Q_2b_{22}=Q_2=\tau_{r5}-m_5gl_{C5}c_5-m_6g\left(l_5c_5+l_{C6}c_{56}\right)-$$
$$-F_x\left[l_5c(\psi+\theta_4)s_5+l_6c(\psi+\theta_4)s_{56}\right]-F_y\left[l_5s(\psi+\theta_4)s_5+l_6s(\psi+\theta_4)s_{56}\right]+F_z\left(l_5c_5+l_6c_{56}\right)$$

$$\Pi_3=\Pi_{\theta6}=Q_3b_{33}=Q_3=\tau_{r6}-m_6gl_{C6}c_{56}-F_xl_6c(\psi+\theta_4)s_{56}-F_yl_6s(\psi+\theta_4)s_{56}+F_zl_6c_{56}$$

$$\Pi_4=\Pi_\psi=Q_6b_{64}+Q_7b_{74}+Q_8b_{84}=-F_x\left[a_xs\psi+a_yc\psi+l_5s(\psi+\theta_4)c_5+l_6s(\psi+\theta_4)c_{56}\right]+$$
$$+F_y\left[a_xc\psi-a_ys\psi+l_5c(\psi+\theta_4)c_5+l_6c(\psi+\theta_4)c_{56}\right]+(\tau_{r1}-\tau_{r2})a/r$$

$$\Pi_5=Q_4b_{45}+Q_5b_{55}+Q_7b_{75}+Q_8b_{85}=F_xc\psi+F_ys\psi+(\tau_{r1}+\tau_{r2})/r \tag{30}$$

$$\Pi_6=Q_4b_{46}+Q_5b_{56}=-F_xs\psi+F_yc\psi\ ,\ \Pi_7=Q_7b_{77}=-\tau_{r1}/r\ ,\ \Pi_8=Q_8b_{88}=-\tau_{r2}/r$$

Итак, определены все величины для использования в уравнениях Эйлера-Лагранжа.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Подставив уравнеия (26), (27), (28) в формулу (6) с учетом выражений (10), после преобразований получим пять уравнений движения модели робота в виде

$$
\begin{gathered}
-\dot{v}a_3s_4+\ddot{\psi}\left(a_1a_3+a_5+I_\psi\right)+\ddot{\theta}_4\left(a_5+I_\psi\right)+\dot{\psi}^2a_2a_3-v\dot{\psi}a_3c_4-2v\dot{\theta}_4a_3c_4+2v\dot{\theta}_5a_4s_4+2v\dot{\theta}_6b_3s_4-\\
-2\dot{\psi}\dot{\theta}_4a_2a_3-2\dot{\psi}\dot{\theta}_5\left(a_1a_4+a_7-I_{\psi\theta}\right)-2\dot{\psi}\dot{\theta}_6\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)-2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5\left(a_7-I_{\psi\theta}\right)-2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6\left(a_6-I_6\right)=\Pi_1\\
-\dot{v}a_4c_4-\ddot{\psi}a_2a_4+\ddot{\theta}_5\left(m_5l_{C5}^2+m_6l_5^2+m_6l_{C6}^2+2b_2+I_{5z}+I_{6z}\right)+\ddot{\theta}_6\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)+\\
+\dot{\psi}^2\left(a_1a_4+a_7-I_{\psi\theta}\right)+\dot{\theta}_4^2\left(a_7-I_{\psi\theta}\right)-\dot{\theta}_6^2b_1-v\dot{\psi}a_4s_4+2\dot{\psi}\dot{\theta}_4\left(a_7-I_{\psi\theta}\right)-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_1=\Pi_2\\
-\dot{v}b_3s_4-\ddot{\psi}a_2b_3+\ddot{\theta}_5\left(b_2+m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)+\ddot{\theta}_6\left(m_6l_{C6}^2+I_{6z}\right)-\dot{\psi}^2\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)+\dot{\theta}_4^2\left(a_6+I_6\right)-\dot{\theta}_5^2b_1+v\dot{\psi}b_3s_4+\\
+2v\dot{\theta}_4b_3s_4-2v\dot{\theta}_5b_4c_4-2v\dot{\theta}_6b_4c_4-2\dot{\psi}\dot{\theta}_4\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)-2\dot{\psi}\dot{\theta}_5a_2b_4-2\dot{\psi}\dot{\theta}_6a_2b_4-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_1=\Pi_3\\
-\dot{v}\left(m_{46}a_y+a_3s_4\right)+\ddot{\psi}\left[m_{12}a^2+m_{46}\left(a_x^2+a_y^2\right)+a_5+2a_1a_3+2a^2I_{1y}/r^2+I_z+I_\psi\right]+\\
+\ddot{\theta}_4\left(a_1a_3+a_6-I_\psi\right)-\ddot{\theta}_5a_2a_4-\ddot{\theta}_6a_2b_3-\dot{\theta}_4^2a_2a_3-\dot{\theta}_5^2a_2a_3-\dot{\theta}_6^2a_1b_4-v\dot{\psi}\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)-\\
-2v\dot{\theta}_4a_3c_4+2v\dot{\theta}_5a_4s_4+2v\dot{\theta}_6b_3s_4-2\dot{\psi}\dot{\theta}_4a_2a_3-2\dot{\psi}\dot{\theta}_5\left(a_1a_4+a_7-I_{\psi\theta}\right)-2\dot{\psi}\dot{\theta}_6\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)-\\
-2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5\left(a_1a_4+a_7-I_{\psi\theta}\right)-2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6\left(a_1b_3+a_6-I_6\right)-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6a_2b_4=\Pi_4\\
\dot{v}\left(m+2I_{1y}/r^2\right)-\ddot{\psi}\left(m_{46}a_y+a_3s_4\right)-\ddot{\theta}_4a_3s_4-\ddot{\theta}_5a_4c_4-\ddot{\theta}_6b_3c_4+\dot{\psi}^2\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)-\\
-\dot{\theta}_4^2a_3c_4-\dot{\theta}_5^2a_3c_4-\dot{\theta}_6^2b_4c_4+2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5a_4s_4+2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6b_3s_4-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_4c_4=\Pi_5
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Уравнения для определения реакций связей колес с плоскостью имеют вид

$$
\begin{gathered}
\ddot{\psi}\left(m_{46}a_x+a_3c_4\right)+\ddot{\theta}_4a_3c_4-\ddot{\theta}_5a_4s_4-\ddot{\theta}_6b_3s_4+\dot{\psi}^2\left(m_{46}a_y+a_3s_4\right)-\\
-\dot{\theta}_4^2a_3s_4-\dot{\theta}_5^2a_3s_4-\dot{\theta}_6^2b_4s_4-v\dot{\psi}m-2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5a_4c_4+2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6b_3c_4-2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_4s_4=\Pi_6\\
-\left(v+\ddot{\psi}a\right)I_{1y}/r^2=\Pi_7\\
-\left(v-\ddot{\psi}a\right)I_{1y}/r^2=\Pi_8
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Таким образом, динамика модели автономного робота описывается уравнениями движения (31) и связей (13) и (14). Как видно из уравнений (31), в случае одновременного движения по всем степеням свободы существует взаимосвязанность уравнений движения, что приводит, в частности, к дополнительным нагрузкам на двигатели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе уравнения Эйлера-Лагранжа применены для вывода уравнений движения автономного робота с голономными и неголономными связями. Исследование упрощенной модели робота позволяет проследить взаимозависимость движений мобильной платформы и манипулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levkovsky, E. N., Motion of Autonomous Robot with Manipulator. In: Jakowluk,A.,Karpovich, S. E. (Eds.) Algorithmization of Mathematical Models for Non-holonomic Constraint System and Nonlinear Mechanics in the Biaxial Stress States of Solid Bodies, Publishers of Bialystok Technical University, Bialystok Poland, 1998, pp 74–86.

2. Лурье А.И. Аналитическая механика.- М.: Физматгиз, 1961.— С. 824.

3. Yamamoto, Y., Yun, X., Effect of the Dynamic Interaction on Coordinated Control of Mobile Manipulators, IEEE Trans. Robot. Automat., Vol.12, No.5, 1996, pp 816–824.