

## **СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ В РАЗДЕЛЕ «СТАТИКА»**

**С. И. Русан**

**1. Общие замечания.** Вопрос рассматривается в рамках плоской задачи. Содержание раздела «Статика» в большинстве учебников, видимо, ориентировано на те специальности, программы которых предусматривают в дальнейшем изучение курса «Строительная механика». Поэтому в нем не рассматриваются такие вопросы, как свойства статически определимых систем, их структурный анализ, мгновенная изменяемость и некоторые другие. В программах машиностроительных специальностей этот пробел на последующих стадиях обучения не восполняется. Вместе с тем в «Статике» рассматривается множество составных статически определимых систем (рамы, фермы, арки, смешанные системы), где упомянутые вопросы являются актуальными. Контрольные и расчетно-графические работы изобилуют ошибками, когда студенты на схемах конструкций произвольно заменяют один вид связи другим внешне похожим, опускают или вводят внутренние шарниры и т. д.

В учебниках приводится только краткое описание статически определимых систем. Чтобы им воспользоваться, необходимо сравнить количество неизвестных сил и реакций связей с числом возможных условий равновесия. Если указанные числа совпадают, то система статически определима. Описанный способ прост для систем, состоящих из одного тела и наложенных на него связей. Если система включает несколько тел, то он вызывает затруднения, а в некоторых случаях дает сбой. Отсутствие у студентов первичных навыков структурного анализа и синтеза вызывает трудности в дальнейшем при изучении структуры механизмов (групп Ассур) в теории механизмов и машин. Следует отметить, что студенты, синтезируя составную статически определимую систему, приобретают и первые в вузе конструкторские навыки. Все вышесказанное побудило дополнить раздел «Статика» небольшим вопросом, вынесенным в заголовок этого материала. К структурному анализу как самому надежному обращаются и в тех случаях, когда аналитический способ (на основании формул) неприемлем.

**2. О статической определимости и изменяемости систем.** Как уже отмечалось, статически определимой системой в разделе «Статика» называют такую систему, у которой число неизвестных силовых факторов и геометрических параметров равно числу возможных независимых условий равновесия

для этой системы. Для более полной характеристики статической определимости следует добавить, что в составной системе она может быть *внешней* и *внутренней*. В системах, обладающих внешней статической определимостью, условий равновесия достаточно для определения реакций внешних связей. Для определения внутренних сил взаимодействия между частями системы уравнений статики может оказаться недостаточно. На рис. 2.1 показаны системы, обладающие только внутренней и только внешней статической определимостью. В этом же смысле будем понимать внутреннюю и внешнюю *изменяемость* систем.

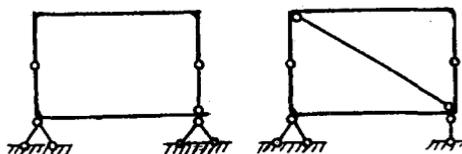


Рис. 2.1.

**3. О классификации и преобразовании связей в статике.** Классифицировать связи в статике будем не по их названиям, а по существенным (глубинным) свойствам – по числу ограничений, которые налагаются ими на перемещения точек системы. Назовем это свойство *валентностью* связи. Тогда идеальный подвижный цилиндрический шарнир и двойную скользящую заделку следует отнести к одновалентным связям, неподвижный цилиндрический шарнир и жесткую заделку – соответственно к двух- и трехвалентным. Самую высокую валентность, равную шести, имеет жесткая пространственная заделка. Систему связей будем характеризовать суммарной валентностью. Механические связи можно преобразовывать путем понижения их валентности и введения соответствующих реакций. На рис. 3.1 показаны некоторые варианты преобразования жесткой заделки А. Каждый из них допускает дальнейшее понижение валентности.

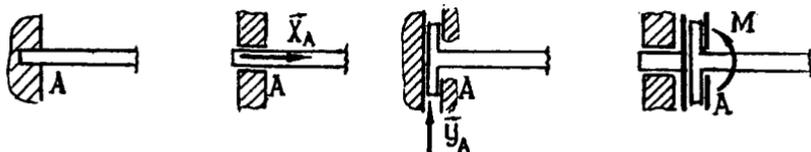


Рис. 3.1.

Описанное здесь преобразование связей можно рассматривать как *частичное* освобождение материального объекта от наложенных связей. В анали-

тической механике оно используется для определения реакций на основании принципа возможных перемещений. Однако делается это без какого-либо обоснования. Ссылка на аксиому о связях здесь не состоятельна, поскольку в ней идет речь об освобождении от *всех* связей. Поэтому целесообразно главную аксиому о связях сформулировать в следующем виде: *состояние равновесия материального объекта не нарушится, если понизить валентность наложенной на него системы связей*. В таком виде аксиома может служить основанием для применения принципа возможных перемещений при решении упомянутого класса задач статики. Если, следуя аксиоме, понизить валентность связей до нуля, то получим известную аксиому о *полном* освобождении от связей. Валентность системы связей можно и повышать, что согласуется с аксиомой о наложении новых связей. Связи, способные воспринимать сжимающие силы, будем иногда называть *опорами*.

**4. Первичные свободные и несвободные статически определимые системы.** К *первичным* (простейшим) будем относить неизменяемые статически определимые системы, состоящие из твердых тел и не допускающие выделения из них более простых систем с аналогичными свойствами без нарушения целостности входящих в них тел. Здесь под неизменяемостью свободных систем следует понимать внутреннюю неизменяемость. К первичным свободным системам отнесем одно тело 1 и совокупность трех тел 1, 2, 3, связанных между собой двухвалентных связей (рис. 4.1). В дальнейшем будем обозначать их соответственно через  $C_1, C_2$ . Первичные несвободные системы  $HC_1, HC_2, HC_3$  представлены на рис. 4.2. Они образованы из систем  $C_1, C_2$  путем наложения трехвалентных систем связей.

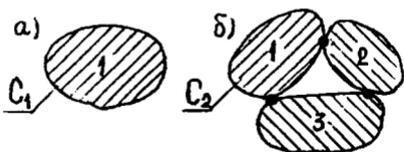


Рис. 4.1.

Систему  $HC_2$  получаем из системы  $C_2$ , закрепляя только одно тело, например, 3. Его можно совместить с неподвижным основанием. В результате получаем первичную систему из двух тел 1, 2 с четырехвалентной системой внешних связей А, В и внутренней двухвалентной связью С. Каждая из связей А, В, С может быть представлена двумя одновалентными связями. В отличие от системы  $HC_2$ , имеющей одно закрепленное тело, в системе  $HC_3$  связи налагаются на разные тела (рис. 4.2 в). Наиболь-

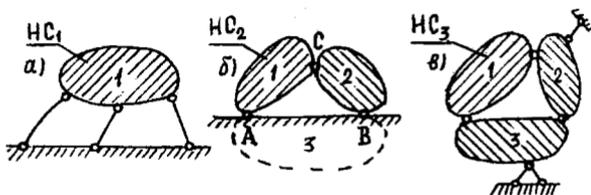


Рис. 4.2.

шее распространение получили системы  $HC_1$ ,  $HC_2$ . Примеры их использования в схемах реальных конструкций показаны на рис. 4.3, 4.4.

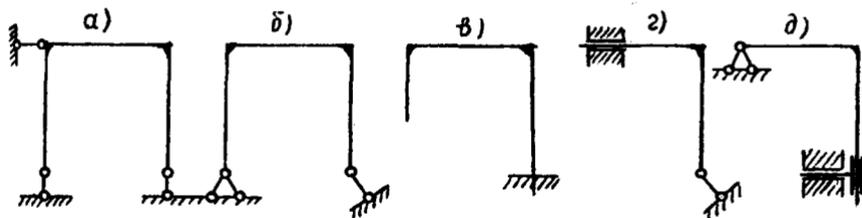


Рис. 4.3.

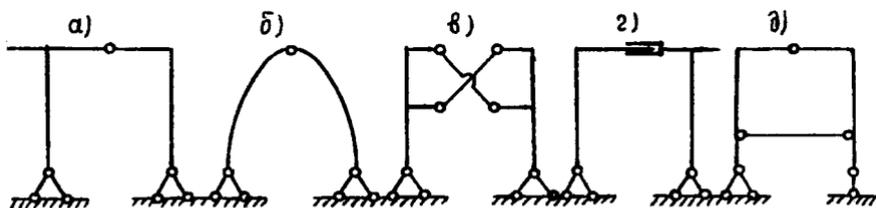


Рис. 4.4.

**5. Принцип образования сложных составных систем.** Структурными элементами синтеза (или подсистемами) сложных составных систем являются первичные статически определимые системы. Так, свободная составная система может включать только подсистемы  $C_1$  или  $C_2$ , или те и другие одновременно.



Рис. 5.1.

Подсистемы соединяются между собой посредством трехвалентной системы связей. В качестве самостоятельного структурного элемента синтеза свободных сложных систем выделим из подсистемы  $C_2$  изменяемую структуру из двух тел с двухвалентной связью  $C$  (рис. 5.1). В теории механизмов и машин ее называют *диадой* ( $D$ ). В процессе синтеза диада присоединяется к другим элементам с помощью четырехвалентной системы связей. Пример сложной свободной системы приведен на рис. 5.2. Последовательность ее «сборки» можно представить структурной схемой:  $C_1(1) > C_1(2) > D(3, 4)$ . Эту запись следует понимать так: к телу 1 посредством связей  $A$  и  $BC$  присоединяется тело 2 (тела 1 и 2 – подсистемы  $C_1$ ); к полученной неизменяемой системе присоединяется диада  $D(3, 4)$  при помощи двухвалентных связей  $B, C$ .

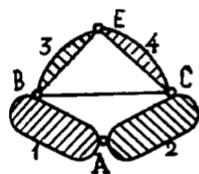


Рис. 5.2.

Мы рассмотрели *первый уровень* синтеза составных систем из первичных элементов. На *втором уровне* синтеза полученную составную систему следует рассматривать как одно *жесткое тело*, то есть принимать ее в качестве первичного элемента синтеза  $C_1$ . Два таких жестких тела с двухвалентной связью образуют диаду  $C_2$ , три – первичную систему  $C_3$ . Затем повторяется описанная выше «технология сборки» первого уровня синтеза. Синтез составных систем может быть продолжен и на более высоких уровнях. В теоретической механике ограничимся первым уровнем синтеза.

Перейдем к синтезу сложных несвободных систем. Их структурными элементами являются подсистемы  $HC_1$ ,  $HC_2$ ,  $HC_3$ . На рис. 4.2 на каждую из них наложена трехвалентная система внешних связей. В процессе синтеза в зависимости от положения подсистемы в структуре всей системы часть внешних связей или все они становятся внутренними. По валентности внешних связей будем различать *базисные*, *надстроенные* и *промежуточные* подсистемы. К базисным отнесены подсистемы, сохранившие трехвалентную систему внешних связей. Они могут выступать в качестве независимых самостоятельных систем (рис. 4.3, 4.4). Надстроенные подсистемы не имеют внешних связей, а их валентность у систем промежуточного типа меньше трех. Надстроенные и промежуточные подсистемы могут существовать лишь как структурные элементы сложных составных систем. Представленная на рис. 5.3 система включает подсистемы всех трех типов: две базисные –  $HC_2$  (1,2),  $HC_2$  (3, 4); одну промежуточную –  $HC_1$  (5) и две надстроенные –  $D$  (6, 7),  $D$  (8, 9). Синтез («сборка») системы начинается с базисных подсистем. Затем присоединяются смешанные и надстроенные элементы. Возможную очередность «сборки» системы, показанной на рис. 5.3, можно представить структурной схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} HC_2(1,2) \\ HC_2(3,4) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} HC_1(5) \\ D(6,7) \end{array} \right\} \rightarrow D(8,9)$$

Последовательность присоединения элементов, записанных в одном столбце, допустимо менять местами или вести «сборку» параллельно. Схему структурного синтеза системы можно использовать при силовом анализе системы, если учесть следующее замечательное свойство схемы: *действие нагрузки, приложенной к какой-либо подсистеме, не передается на элементы, расположенные на структурной схеме справа от нагруженной подсистемы*. Так, на приведенной выше схеме к рис. 5.3 все элементы структуры механической системы рас-

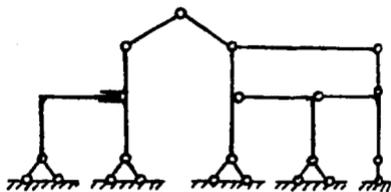


Рис. 5.3.

положены справа от базисных подсистем  $HC_2(1,2)$ ,  $HC_2(3,4)$ . Следовательно, они не будут включены в работу, если нагрузка приложена к этим подсистемам.

**6. Анализ и порядок расчета сложных составных систем.** Если задана сложная составная система, то для установления статической определенности необходимо выполнить анализ ее структуры по первичным элементам  $C_1, C_2, HC_1, HC_2, HC_3$  и  $D$  с учетом валентности наложенных на них связей. Последовательность анализа обратна синтезу. Например, из несвободных систем в начале следует выделить надстроенные подсистемы, затем промежуточные и базисные. Если система допускает такое деление, значит она статически определима. Силовой расчет выполняется в такой же последовательности, как и структурный анализ. При этом учитывается приведенное в п. 5 свойство структурной схемы.

**7. Понятие о мгновенно-изменяемых системах.** Как определено выше, в процессе синтеза составных систем структурные элементы вводятся в систему при помощи трех- или четырехвалентной системы связей. Однако наличие необходимой валентности не всегда обеспечивает неизменяемость и статическую определенность системы. Установлено, что если линии действия реакций связей параллельны или пересекаются в одной точке, то система (или ее структурный элемент) обладает *мгновенной изменяемостью*. Это негативное свойство систем исключает их использование в технике, так как при нагружении реакции связей достигают весьма больших значений и создают угрозу разрушения конструкции. Примеры мгновенно-изменяемых систем приведены на рис. 7.1.

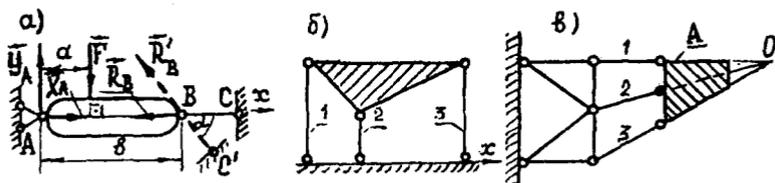


Рис. 7.1.

Системы связей при которых имеет место мгновенная изменяемость систем будем называть *некорректными*. На рис. 7.1 а, б некорректными являются внешние связи А, ВС и 1, 2, 3, а на рис. 7.1 в – внутренние 1, 2, 3, образующие вместе с телом А надстроенную подсистему типа  $HC_1$ . Не трудно убедиться, что мгновенно-изменяемые системы являются статически неопределимыми, так как для определения реакций не хватает одного условия равновесия. Так,

для систем на рис. 7.1 а, в реакции связей не войдут в суммы моментов относительно точек А и О; для системы на рис. 7.1 б – в сумму проекций на ось х. Чтобы получить представление о величине реакций связей рассмотрим систему 7.1 а. Стержень ВС повернем на угол  $\alpha$  в положение ВС'. Система станет статически определимой. Составим для нее сумму моментов относительно точки А:  $R_B' \sin \alpha b - Fa = 0$ . Отсюда получаем:  $R_B' = aF/(b \sin \alpha)$ . Из формулы видно, что при обратном переходе к мгновенно-изменяемой системе  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R_B' \rightarrow R_B \rightarrow \infty$ . В процессе синтеза необходимо следить, чтобы все структурные элементы вводились с помощью корректных систем связей.

УДК

## МЕТОД РАЗРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД.

**А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев**

В настоящей работе, применяя операцию разрывов [1] исследуем поведение нестационарных возмущений вдоль характеристик в неоднородной упруговязкопластической среде. Получены уравнения для изменения интенсивности возмущенного состояния, которые приводятся к виду удобному для исследования динамической устойчивости сложных сред [2].

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , с заданными на ней краевыми условиями. Считаем тело изотропным, неоднородным. Тензор упругих деформаций  $e_{ij}^e$  связан с напряжениями  $\sigma_{ij}$  законом Гука.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе.

Среда находится в упругом состоянии, если

$$S_{ij} S_{ij} = \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) < k^2 \quad (2)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $k$  — коэффициент пластичности.

Если  $S_{ij} S_{ij} > k^2$ , то тело деформируется пластическим образом. В этом случае, компоненты тензора скорости пластических деформаций  $\dot{e}_{ij}^p$  связаны с тензором напряжений условием