УДК 624.073.4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ.

Т. А. Емельянова

В настоящее время в различных областях техники широкое применение находят слоистые конструкции, и, в частности, трехслойные оболочки. В статье рассматриваются свободные колебания пологой трехслойной оболочки с легким трансверсально-изотропным заполнителем, подкрепленной ребрами жесткости. Расстояния между ребрами, а также их жесткости, считаются одинаковыми. Ребра расположены симметрично относительно срединной поверхности оболочки.

Соединение оболочки с ребрами и ребер между собой принимается жестким. Внешние силы, приложенные к срединным плоскостям наружных слоев и к ребрам, не изменяются в процессе колебаний. Влияние рассеивания энергии на частоты свободных колебаний мало, а поэтому им можно пренебречь.

Для наружных изотропных слоев трехслойной оболочки принимаются следующие допущения:

а) гипотеза прямых нормалей,

б) поперечные деформации наружных слоев не учитываются, поэтому

$$\varepsilon_Z = \frac{\delta w}{\delta z} = 0, \ \mathrm{w} = \mathrm{w}\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}) \qquad (1)$$

в) пренебрегаем напряжением $\sigma_я$ по сравнению с напряжениями σ_X, σ_y, следовательно

$$\sigma_X = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_X + \mu\varepsilon_Y); \ \ \sigma_Y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_Y + \mu\varepsilon_X); \ \ \tau_{XY} = \frac{E}{1-\mu^2}\gamma_{XY} \qquad (2)$$

Легкий трансверсально-изотропный заполнитель предполагается таким, что он воспринимает только напряжения $\tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3$. Как и для наружных слоев, поперечные деформации заполнителя не учитываются, т.е.

$\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}_3\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t})$ (3)

Следствием этих допущений является закон о линейном изменении перемещений *u* и *v* по толщине заполнителя.

Закон Гука для легкого трансверсально-изотропного заполнителя принимает вид:

$$\tau_{XZ} = G_3\gamma_{XZ}, \quad \tau_{YZ} = G_3\gamma_{YZ}. \tag{4}$$

С учетом принятых допущений выражения для перемещений запишутся так:

для верхнего слоя ($-h-\delta \le z \le -h$)

$$w_в = w;\ u_в = u_1 - (z+H)\frac{\partial w}{\partial x}\ \ vв = v_1 - (z+H)\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{5}$$

для нижнего слоя ($h \le z \le h+d$)

$$w_н = w;\ u_н = u_2 - (z-H)\frac{\partial w}{\partial x};\ vн = v_1 - (z-H)\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6}$$

для заполнителя ($-h \le z \le h$)

$$w_3 = w;\ u_3 = \frac{u_1+u_2}{2} - \frac{z}{h}\left(\frac{u_1-u_2}{2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right); \tag{7}$$

$$v3 = \frac{v_1+v_2}{2} - \frac{z}{h}\left(\frac{v_1-v_2}{2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right);$$

Здесь: $H = h + 0{,}5\,d$.

Для ребер учитываем изгиб и кручение в вертикальной плоскости, продольную деформацию, а также их деформации сдвига в вертикальной и горизонтальной плоскостях, принимая при этом гипотезу о линейном изменении тангенциальных перемещений по толщине ребра.

Закон Гука для ребер запишется так:

$$\sigma_X = E_P\varepsilon_X;\ \ \tau_{XZ} = G_{XZP}\gamma_{XZ};\ \text{(для ребер, параллельних оси X);} \tag{8}$$

$$\sigma_Y = E_P\varepsilon_Y;\ \ \tau_{YZ} = G_{YZP}\gamma_{YZ};\ \text{(для ребер, параллельних оси У).}$$

Выражения для перемещений ребер имеют вид (7), как и для заполнителя.

Перемещения *u, v, w* будем считать величинами одного порядка и малыми по сравнению с толщиной оболочки. При рассмотрении малых перемещений выражения для деформаций запишутся так:

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1};\ \ \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\ \ \gamma_{XZ} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\ \ \gamma_{YZ} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{9}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Здесь: R_1, R_2 — главные радиусы координатной поверхности; w_1, w_2 — углы поворота сечений ребер при кручении.

Для упрощения в дальнейшем записи уравнений обозначим:

$$u_\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}; u_\beta = \frac{u_1 - u_2}{2}; v_\alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}; v_\beta = \frac{v_1 - v_2}{2} \tag{10}$$

Получим выражения для потенциальной и кинетической энергий оболочки и ребер. Для потенциальной энергии деформации оболочки имеем:

$$\text{U об} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}\left[\int_{-h-\delta}^{-h}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dz + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \int_{h}^{h+\delta}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dz + \int_{-h}^{h}\left(\tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dz\right]dxdy$$

Принимая во внимание формулы (5), (6), (7), (9) из выражения (11) получим, вводя обозначения:

$$N_x = N_{1x} — N_{2x};\ n_{xy} = S_1 — S_2;\ m_x = M_{1x} + M_{2x};\ m_{xy} = H_1 + H_2;$$

$$N_{1x} = \int_{-h-\delta}^{-h}\sigma_{1x}dz,\ N_{2x} = \int_{h}^{h+\delta}\sigma_{2x}dz,\ S_1 = \int_{-h-\delta}^{-h}\tau_{1xy}dz,\ S_2 = \int_{h}^{h+\delta}\tau_{2xy}dz,$$

$$M_{1x} = \int_{-h-\delta}^{-h}\sigma_{1x}\left(z+H\right)dz,\ M_{2x} = \int_{h}^{h+\delta}\sigma_{2x}\left(z-H\right)dz,$$

$$H_1 = \int_{-h-\delta}^{-h}\tau_{1xy}\left(z+H\right)dz,\ H_2 = \int_{h}^{h+\delta}\tau_{2xy}\left(z-H\right)dz,\ N_x = N_{1x} + N_{2x}, \tag{12}$$

$$Q_{3x} = \int_{-h}^{h}\tau_{3xz}dz = \int_{-h}^{h}G_3\gamma_{3xz}dz,\ Q_{3y} = \int_{-h}^{h}\tau_{3yz}dz = \int_{-h}^{h}G_3\gamma_{3yz}dz,$$

$$S = S_1 + S_2,\ n_y = N_{1y} — N_{2y},\ m_y = M_{1y} + M_{2y},\ N_y = N_{1y} + N_{2y},$$

$$N_{1y} = \int_{t1}\sigma_{1y}dz,\ N_{2y} = \int_{t2}\sigma_{2y}dz,\ M_{1y} = \int_{-h-\delta}^{-h}\sigma_{1y}\left(z+H\right)dz,$$

$$M_{2y} = \int^{h+\delta}\sigma_{2y}\left(z-H\right)dz$$

следующее выражение для потенциальной энергии оболочки:

$$\Pi_{об} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\left\{N_x\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + N_y\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + S\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + S\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + n_x\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \right.$$
$$+n_{xy}\frac{\partial u_\beta}{\partial y} - \frac{1}{h}Q_{3x}u_\beta + n_y\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + n_{xy}\frac{\partial v_\beta}{\partial x} - \frac{1}{h}Q_{3y}v_\beta - m_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$
$$-m_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2m_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\delta+2h}{2h}Q_{3x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta+2h}{2h}Q_{3y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1}w -$$
$$\left. -\frac{N_y}{R_2}w\right\}dxdy. \tag{13}$$

Для потенциальной энергии деформации ребер имеем:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{yk-1}^{yk}\left[\int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\left(\tau_{pxz}\gamma_{pxz} + \sigma_{py}\varepsilon_{py} + \tau_{pyz}\gamma_{pyz}\right)dxdz + C_i\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial y}\right)^2\right]dy +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{xi-1}^{xi}\left[\int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\left(\tau_{pxz}\gamma_{pyz} + \sigma_{px}\varepsilon_{px} + \tau_{pyz}\gamma_{pxz}\right)dydz + C_k\left(\frac{\partial\varpi_2}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{14}$$

Принимая во внимание формулы (7), (9) из выражения (14) получим, вводя обозначения:

$$Q_{ix} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\tau_{pxz}dxdz,\ Q_{iy} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\tau_{pyz}dxdz,\ N_{iy} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\sigma_{py}dxdz,$$
$$M_{iy} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\sigma_{py}Zdxdz,\ Q_{kx} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\tau_{pxz}dydz,\ Q_{ky} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\tau_{pyz}dydz, \tag{15}$$
$$N_{kx} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\sigma_{px}dydz,\ M_{kx} = \int_{-bp/2}^{bp/2}\int_{-h}^{h}\sigma_{px}Zdydz$$

следующее выражение для потенциальной энергии ребер:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\left\{-\frac{1}{h}Q_{ix}u_\beta + \frac{H}{h}Q_{ix}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{iy}\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{1}{h}M_{iy}\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta}{2h}M_{iy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right.$$
$$\left.-\frac{N_{iy}}{R_2}w - \frac{1}{h}Q_{iy}v_\beta + \frac{H}{h}Q_{iy}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_i}{4h^2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + (H-\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dy +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\left\{-\frac{1}{h}Q_{kx}u_\beta + \frac{H}{h}Q_{kx}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{kx}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{h}M_{kx}\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta}{2h}M_{kx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left.-\frac{N_{kx}}{R_1}w - \frac{1}{h}Q_{ky}v_\beta + \frac{H}{h}Q_{ky}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + (H-\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx. \tag{16}$$

Здесь: Ci, Ck — жесткость ребер при кручении.

Для кинетической энергии оболочки имеем:

$$T=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}\int_{tb}^{ta}\left[\frac{\rho_H}{2}\int_{-h-\delta}^{h}\left(u_B^2+v_B^2+w^2\right)dz+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\frac{\rho_H}{2}\int_{h}^{h+\delta}\left(u_H^2+v_H^2+w^2\right)dz+\frac{\rho_3}{2}\int_{-h}^{h}\left(u_3^2+v_3^2+w^2\right)dz\right]dxdydt$$

Подставляя в (17) выражения (5), (6), (7) и выполнив интегрирование по Z, с учетом обозначений (10), получим:

$$T=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}\int_{tb}^{ta}\left[\left(\rho_H\delta+\rho_3 h\right)\left(u_\alpha^2+v_\alpha^2+w^2+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)^2+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)^2\right)\right]+ \tag{18}$$

Здесь: $r_н$, r_3 — плотность материала наружных слоев и заполнителя, приходящаяся на единицу объема. Точки вверху над $u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta, w$ обозначают дифференцирование по времени t.

Кинетическая энергия ребер, параллельных оси У:

$$T_P=\frac{\rho_P}{2}\sum_{i+1}^{r}\sum_{k-1}^{s+1}\int_{Yk-1}^{Yk}\int_{-h}^{h}\int_{tb}^{ta}\int_{-Bp/2}^{Bp/2}\left(u_P^2+v_P^2+w^2\right)dxdydzdt \tag{19}$$

Вводя выражения (7) в (19) и выполнив интегрирование по Z и X, с учетом обозначений (10), получим:

$$T_P=\sum_{i+1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Yk-1}^{Yk}\int_{tb}^{ta}\rho_P b_P h\left(u_\alpha^2+\frac{1}{3}u_\beta^2-\frac{\delta}{3}u_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)^2+\right. \tag{20}$$

$$\left.+v_\alpha^2+\frac{1}{3}v_\beta^2-\frac{\delta}{3}v_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)^2+w^2\right)dydt$$

Аналогично для ребер, параллельних оси X:

$$T_P=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{tb}^{ta}\rho_P b_P h\left(u_\alpha^2+\frac{1}{3}u_\beta^2-\frac{\delta}{3}u_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)^2+\right. \tag{21}$$

$$\left.+v_\alpha^2+\frac{1}{3}v_\beta^2-\frac{\delta}{3}v_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)^2+w^2\right)dxdt$$

Если в срединных плоскостях наружных слоев действует внешняя сжимающая нагрузка $2T_1$, $2T_2$, то

$$A\ об=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{xi-1}^{xi}\int_{yk-1}^{yk}\left[2T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{22}$$

Если по концам ребер действуют сжимающие силы $P_к$, P_I, то

$$A_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{xi-1}^{xi} P_k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{yk-1}^{yk} P_i\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy \quad (23)$$

Когда оболочка совершает одно из главных колебаний, то

$$w\,(x,y,t) = w\,(x,y)\sin wt \;\left(\; w \to u_\alpha \to u_\beta \to v_\alpha \to v_\beta \;\right) \quad (24)$$

Для таких колебаний максимальное значение потенциальной энергии оболочки и ребер получим, если в (13), (16), (22), (23) подставим выражение (24). Оставляя прежние обозначения для $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$, выражение для максимальной потенциальной энергии оболочки и ребер будет иметь вид:

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{xi-1}^{xi}\int_{yk-1}^{yk}\left\{N_x\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + N_y\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + S\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + S\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + n_x\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + n_{xy}\frac{\partial u_\beta}{\partial y} -\right.$$

$$-\frac{1}{h}Q_{3x}u_\beta + n_y\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + n_{xy}\frac{\partial v_\beta}{\partial x} - \frac{1}{h}Q_{3y}v_\beta - m_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2m_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\delta+2h}{2h}Q_{3x}\frac{\partial w}{\partial x} +$$

$$\left.+\frac{\delta+2h}{2h}Q_{3y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1}w - \frac{N_y}{R_2}w - 2T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy + \quad (25)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{yk-1}^{yk}\left\{-\frac{1}{h}Q_{ix}u_\beta + \frac{H}{h}Q_{ix}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{iy}\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{1}{h}M_{iy}\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta}{2h}M_{iy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{N_{iy}}{R_2}w -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h}Q_{iy}v_\beta + \frac{H}{h}Q_{iy}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_i}{4h^2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + (H-\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - P_i\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dy +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{xi-1}^{xi}\left\{-\frac{1}{h}Q_{kx}u_\beta + \frac{H}{h}Q_{kx}\frac{\partial w}{\partial x} + N_{kx}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{h}M_{kx}\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta}{2h}M_{kx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{N_{kx}}{R_1}w - \frac{1}{h}Q_{ky}v_\beta + \frac{H}{h}Q_{ky}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + (H-\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - P_k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx.$$

Вводя в (18), (20), (21) выражение (24), выражение для максимальной кинетической энергии:

$$T_{\max} = \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}\left\{(\rho_H\delta + \rho_3 h)\omega^2\left[u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + w^2 + \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$+\omega^2\left(\rho_H\delta+\frac{1}{3}\rho_3 h\right)\left[u_\beta^2+v_\beta^2\right]-\frac{\rho_3 h\delta}{3}\omega^2\left[u_\beta\frac{\partial w}{\partial x}+v_\beta\frac{\partial w}{\partial y}\right]\Big\}dxdy+$$

$$+\sum_{i+1}^{r}\sum_{k+1}^{s+1}\int_{Yk+1}^{Yk}\rho_P b_P h\omega^2\left[u_\alpha^2+\frac{1}{3}u_\beta^2-\frac{\delta}{3}u_\beta\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+v_\alpha^2+\frac{1}{3}v_\beta^2-\right. \quad (26)$$

$$\left.-\frac{\delta}{3}v_\beta\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+w^2\quad\right]dy+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{Xi-1}^{Xi}\rho_P b_P h\omega^2\left[u_\alpha^2+\frac{1}{3}u_\beta^2-\frac{\delta}{3}u_\beta\frac{\partial w}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+v_\alpha^2+\frac{1}{3}v_\beta^2-\frac{\delta}{3}v_\beta\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+w^2\quad\right]dx.$$

Рассматривая функционал-действие по Остроградскому — Гамильтону

$$S=\int_{tb}^{ta}(T-U)dt \quad (27)$$

на совокупности главных колебаний одного и того же периода $2\pi/\omega$ и выполнив интегрирование по времени на промежутке $t_A-t_B=2\pi/\omega$, придем к уравнению [1]

$$\delta(\mathrm{T}_{\max}-U_{\max})=0, \quad (28)$$

которому должны удовлетворять собственные формы действительных главных колебаний подкрепленной оболочки.

Подставляя в (28) значения максимальной потенциальной и кинетической энергий (25), (26) и выполнив интегрирование по частям, например:

$$\delta\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}2B\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right)dxdy=2\int_{yK-1}^{yK}2B\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\delta u_\alpha\Big|_{Xi-1}^{Xi}dy-2\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}2B\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}\delta u_\alpha dxdy,$$

представим вариационное уравнение (28) в виде:

$$\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\int_{Yk-1}^{Yk}\left\{\left(\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2 u_\alpha\right)\delta u_\alpha+\left(\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2\right)\delta v_\alpha+\left(\frac{\partial n_x}{\partial x}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{h}Q_{3x}+2\left(\rho_H\delta+\frac{1}{3}\rho_3 h\right)\varpi^2 u_\beta-\right.$$

$$\left.-\rho_3 h\frac{\delta}{3}\varpi^2\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta u_\beta+\left(\frac{\partial n_y}{\partial y}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}+\frac{1}{h}Q_{3y}+2\left(\rho_n\delta+\frac{1}{3}\rho_3 h\right)\varpi^2 v_\beta-\right. \quad (29)$$

$$\left.-\rho_3 h\frac{\delta}{3}\varpi^2\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta v_\beta+\left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{H}{h}\left(\frac{\partial Q_{3x}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{3y}}{\partial y}\right)+\frac{N_x}{R_1}+\right.$$

$$+\frac{N_y}{R_2}-2T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2T_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2 w-\frac{\delta^2}{6}(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{\delta^2}{6}(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho_3 h\frac{\delta}{3}\varpi^2\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}+\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)\Bigg)\delta w\Big\}dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Yk-1}^{Yk}\Bigg\{\Bigg(N_x\delta u_\alpha+S\delta v_\alpha+n_x\delta u_\beta+n_{xy}\delta v_\beta-m_x\delta\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial m_x}{\partial x}+2\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}+$$

$$+\frac{H}{h}Q_{3x}-2T_1\frac{\partial w}{\partial x}-(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial w}{\partial x}+\rho_3 h\frac{\delta}{3}\omega^2 u_\beta\Bigg)\delta w\Big\}_{Xi-1}^{Xi}dy+$$

$$+\sum_{i=11}^{r+11}\sum_{k=11}^{s+1}\int_{Xi-1}^{Xi}\Bigg\{\Bigg(S\delta u_\alpha+N_y\delta v_\alpha+n_y\delta v_\beta+n_{xy}\delta u_\beta-m_y\delta\frac{\partial w}{\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial m_y}{\partial y}+2\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}+\frac{H}{h}Q_{3y}-2T_2\frac{\partial w}{\partial y}-(\rho_H\delta+\rho_3 h)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial w}{\partial y}+\rho_3 h\frac{\delta}{3}\omega^2 v_\beta\right)\delta w\Big\}_{Yk-1}^{Yk}dx+$$

$$+2\left[\left(m_{xy}\delta w\right)_{Xi-1}^{Xi}\right]_{Yk-1}^{Yk}+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\Bigg\{\int_{Xi-1}^{Xi}-\left(\frac{\partial N_{kx}}{\partial x}-2\rho_p b_p h\omega^2 u_\alpha\right)\delta u_{\alpha k}+$$

$$+\left(\frac{1}{h}Q_{ky}-\frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(v_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right)\delta v_{\beta k}+$$

$$+\left(\frac{1}{h}\left(Q_{kx}-\frac{\partial M_{kx}}{\partial x}\right)-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(u_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\delta u_{\beta k}-\left(\frac{H}{h}Q_{ky}+\frac{C_k}{4h^2}\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\rho_p b_p h\delta}{3}\omega^2\left(v_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)\right)\delta\frac{\partial w_k}{\partial y}+$$

$$+\left(\frac{H}{h}\frac{\partial Q_{kx}}{\partial x}-\frac{\delta}{2h}\frac{\partial^2 M_{kx}}{\partial x^2}+\frac{N_{kx}}{R_1}+P_k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\rho_p b_p h\delta}{3}\omega^2\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\right)$$

$$-2\rho_p b_p h\omega^2 w_k)\delta w_k\}dx-\left(N_{kx}\delta u_\alpha-\left(\frac{H}{h}Q_{kx}+\frac{\delta}{2h}\frac{\partial M_{kx}}{\partial x}+P_k\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w_k-\frac{1}{h}M_{kx}\delta u_{\beta x}+\right.$$

$$+\frac{\delta}{2h}M_{kx}\delta\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\delta v_{\beta k}-\frac{C_k}{2h^2}\left(h-\frac{\delta}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\delta\frac{\partial w_k}{\partial y}\Bigg)_{Xi-1}^{Xi}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{Yk-1}^{Yk}\left\{-\left(\frac{\partial N_{iy}}{\partial y}-2\rho_p b_p h\omega^2 v_\alpha\right)\delta v_{\alpha i}+\right\}$$

$$+\left(\frac{1}{h}Q_{ix}-\frac{C_i}{4h^2}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(u_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right)\delta u_{\beta i}+$$

$$+\left(\frac{1}{h}\left(Q_{iy}-\frac{\partial M_{iy}}{\partial y}\right)-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(v_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)\delta v_{\beta i}-\left(\frac{H}{h}Q_{ix}+\frac{C_i\left(h-\frac{\delta}{2}\right)}{4h^2}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{\rho_p b_p h\delta}{3}\omega^2\left(u_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right)\delta\frac{\partial w_i}{\partial x}+\left(\frac{H}{h}\frac{\partial Q_{iy}}{\partial y}-\frac{\delta}{2h}\frac{\partial^2 M_{iy}}{\partial y^2}+\frac{N_{iy}}{R_2}+P_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_p b_p h\delta}{3}\omega^2\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-2\rho_p b_p h\omega^2 w_i\right)\delta w_i\}dy-\left(N_{iy}\delta v_\alpha-\left(\frac{H}{h}Q_{iy}+\frac{\delta}{2h}\frac{\partial M_{iy}}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+P_k\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta w_i-\frac{1}{h}M_{iy}\delta v_{\beta i}+\frac{\delta}{2h}M_{iy}\delta\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{C_i}{4h^2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\delta u_{\beta i}-$$

$$\left.-\frac{C_i}{4h^2}\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\delta\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)_{Yk-1}^{Yk}=0$$

В соответствии со значениями (12) используя (5), (6), (7), (9), получим следующие выражения для усилий через перемещения:

$$N_{1x}=B\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\mu\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\right)-w\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}+\mu\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)\right];$$

$$N_{2x}=B\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\mu\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\right)-w\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)-\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}+\mu\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)\right];$$

$$N_x=N_{1x}+N_{2x}=2B\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\mu\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\right)-w\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)\right];$$

$$M_{1x}=M_{2x}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);H_1=H_2=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};$$

$$S_1=\frac{(1-\mu)B}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x}\right)\right];$$

$$S_2=\frac{(1-\mu)B}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial y}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x}\right)\right];$$

$$S=(1-\mu)B\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\right);Q_{3x}=-2G_3\left(u_\beta-H\frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$N_{1y}=B\left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}+\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right)-w\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\mu}{R_2}\right)+\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y}+\mu\frac{\partial u_\beta}{\partial x}\right)\right];$$

$$N_{2y}=B\left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}+\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right)-w\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\mu}{R_2}\right)-\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y}+\mu\frac{\partial u_\beta}{\partial x}\right)\right]; \tag{30}$$

$$N_y=N_{1y}+N_{2y}=2B\left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}+\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right)-w\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\mu}{R_1}\right)\right];$$

$$M_{1y}=M_{2y}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);Q_{3y}=-2G_3\left(v_\beta-H\frac{\partial w}{\partial y}\right);$$

$$B=\frac{E\delta}{1-\mu^2};D=\frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}.$$

Дифференциальные уравнения свободных колебаний участка оболочки, заключенного между ребрами или между ребрами и краями оболочки, с учетом действия сил в срединных плоскостях наружных слоев получим из вариационного уравнения (29).

Полагая $\delta u_\alpha, \delta v_\alpha, \delta u_\beta, \delta v_\beta, \delta w$ произвольными внутри участка оболочки, из уравнения (29) получаем пять уравнений свободных поперечных колебаний.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\omega^2 u_\alpha=0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\omega^2 v_\alpha=0$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{h}Q_{3x}+2\left(\rho_H\delta+\frac{1}{3}\rho_3 h\right)\omega^2 u_\beta-\rho_3 h\frac{\delta}{3}\omega^2\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}+\frac{1}{h}Q_{3y}+2\left(\rho_H\delta+\frac{1}{3}\rho_3 h\right)\omega^2 v_\beta-\rho_3 h\frac{\delta}{3}\omega^2\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{32}$$

$$+\rho_3 h\frac{\delta}{3}\omega^2\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}+\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)=0$$

Последние два члена уравнений (31) и (32) учитывают инерцию вращения трехслойной оболочки.

А. П. Прусаковым [2], А.И.Холодом [3] и другими авторами показано, что инерция вращения оказывает малое влияние на первые частоты свободных колебаний и ними можно пренебречь. Так как в этой работе рассматриваются поперечные колебания, то не учитываем и последние члены уравнений (30).

Преобразовывая уравнение (32) с помощью уравнений (31), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(M_{1x}+M_{2x})-H(N_{1x}-N_{2x})\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(M_{1y}+M_{2y})-H(N_{1y}-N_{2y})\right]+$$
$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[(H_1+H_2)-H(S_1+S_2)\right]+\frac{N_x}{R_1}-2\mathrm{T}_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{N_y}{R_2}-2\mathrm{T}_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ \tag{33}$$
$$+2(\rho_H\delta+\rho_3 h)\varpi^2 w=0$$

Для упрощения решения системы (30), (31), (33) введем функцию усилий F:

$$N_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\qquad N_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\qquad S=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \tag{34}$$

Тогда уравнения (30) обратятся в тождество, а для определения функции F будем иметь уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha y}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha xy}}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{35}$$

Здесь: $\varepsilon_{\alpha x}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{w}{R_1};\varepsilon_{\alpha y}=\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}-\frac{w}{R_2};\varepsilon_{\alpha xy}=\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\right).$

Используя зависимости (30), (34), определяем:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha x}&=\frac{N_x-\mu N_y}{2B\left(1-\mu^2\right)}=\frac{1}{2B\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right);\\
\varepsilon_{\alpha y}&=\frac{N_y-\mu N_x}{2B\left(1-\mu^2\right)}=\frac{1}{2B\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right);\\
\varepsilon_{\alpha xy}&=\frac{S}{(1-\mu)}=-\frac{1}{(1-\mu)B}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Подставляя (36) в уравнения (35), получаем:

$$\frac{1}{2B\left(1-\mu^2\right)}\nabla^4 F+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{37}$$

С учетом (12),(30), (34) уравнения (31) и (33) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&u_\beta-H\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y}\right);\\
&v_\beta-H\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y}\right);\\
&-2D\nabla^4 w-2BH\nabla^2\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x}+\frac{\partial v_\beta}{\partial y}\right)+\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\\
&-2T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2T_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\left(\rho_H\delta+\rho_3 h\right)\varpi^2 w=0
\end{aligned} \tag{38}$$

Если в уравнениях (38) положить $\omega=0$, получим уравнения устойчивости участка оболочки, заключенного между ребрами.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. Физматгиз, М., 1965.

2. Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных пластин с легким заполнителем. Докторская диссертация, т.I, институт строительной механики АН УССР, 1955.

3. Холод А.И. Некоторые задачи динамики трехслойных пластин и оболочек. Диссертация, Днепропетровск, 1965.

УДК 620.178.7:669.14

АНАЛИЗ ХРУПКИХ РАЗРУШЕНИЙ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАММ ХРУПКОВЯЗКОГО СОСТОЯНИЯ

А. А. Хмелев, В. А. Сидоров

То, что работа статического деформирования образца, оцениваемая площадью диаграммы растяжения, коррелирует с ударной вязкостью и твердостью изложено в работах *[1,2]*, где установлена количественная взаимосвязь между характеристиками твердости, пластичности и ударной вязкости конструкционных сталей.

В данной работе изложены некоторые материалы дальнейших исследований и результаты обработки экспериментальных данных, а именно применение диаграмм хрупковязкого состояния [1] для анализа и выявления причин хрупких разрушений заготовок треугольных звеньев грузовых стропов (рис. 1), изготовленных из стержней диаметром 56 мм.

Технологический процесс изготовления данных изделий требует применения для них стержней из стали 20 или Ст3сп с их холодной гибкой, сваркой и последующей термообработкой. Здесь же рассматривается два случая их разрушения после холодной гибки в не отапливаемом помещении и падении на бетонный пол с высоты 1,3 м.

Установлено, что одна из заготовок изготовлена из стали 20 и разрушилась при падении при температуре около минус 20° С, а вторая — при температуре около нуля. При этом, последняя заготовка была изготовлена из стали Ст5.

Диаграммы хрупковязкого состояния исследованных сталей приведены на рис. 2. Каждая из них состоит из двух частей. Левая часть диаграммы построена в координатных осях: твердость по Бринеллю — работа разрушения ударного образца с дополнительными характеристиками пластичности стали,