$$\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+a(\eta)\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+b(\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta}+\{\alpha(\eta)+\beta(\theta)+\lambda[c(\eta)+d(\theta)]\}V=0 \quad (18)$$

Представим V в током виде:

$$V(\eta,\quad \theta)=F_2(\eta)F_3(\theta) \quad (19)$$

Внося (19) в (18), получим для $F_i(i=2,\quad 3)$ такие уравнения

$$\left.\begin{aligned} F_2''(\eta)+a(\eta)F_2'+[a(\eta)+\lambda c(\eta)-\mu]F_2&=0\\ F_3''(\theta)+b(\theta)F_3'+[b(\theta)+\lambda d(\theta)+\mu)]F_3&=0\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$M=const.$$

Итак, если выполнены условия (13)–(17), тогда уравнение (1) допускает решения в виде $U=F_1(\varphi)F_2(\eta)F_3(\theta)$

В заключение отметим, что примененный здесь метод ранее использовался рядом авторов при решении краевых задач для уравнения Лапласа в областях, ограниченных поверхностями вращения [1].

Литература

Е.В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций М., 1952, с.476.

УДК 539.3

БЕЗИЗГИБНЫЕ ФОРМЫ ТОНКОСТЕН ОБОЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ИХ ДЕФОРМАЦИИ ПО ТОЛЩИНЕ

Т.М. Мартыненко

Задача определения безизгибных форм упругих оболочек берет свое начало с работы [Хорна], которая получила свае дальнейшее развитие в работах [Мартыненко М.Д., Фан Нго Хьюнг Нью, Гариба]. В настоящей работе дается ее дальнейшее развитие применительно к учету их деформации по толщине. Будем исходить из следующей системы уравнений равновесия

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(SA^2)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{AB}{R_1}Q_1+ABq_1=0\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}(T_2B)+\frac{1\partial}{B\partial\alpha}(SB^2)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{AB}{R_2}Q_2+ABq_2=0\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Q_1B)+\frac{\partial}{\partial\beta}(Q_2A)\right]-\frac{T_1}{R_1}-\frac{T_2}{R_2}+q_3=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Перерезывающие силы Q_1, Q_2 определены из уравнений для изгибающих H_1, H_2 и крутящего момента H:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(HA^2)\right]=Q_1\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(M_2B)-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(HB^2)\right]=Q_2
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из формул (1)–(2) следует, что строгий учет Q_1, Q_2 значительно повышает порядок разрешающий системы уравнений и, как следствие, процедуру ее решения. Поэтому, примем $Q_1k_1T_1$, $\quad Q_2k_2T_2$ $Q_i = kT_i \quad (i=1,2)$.

Здесь k_1 и k_2 определяются экспериментально. В случае упругих тонких пластин установлено $k=\frac{5}{6}$ или, как показал Миндлин, $k=\frac{\pi^2}{16}$. В работах Свирского и Мартыненко было показано, что снятие кромки приводит при уточнении классической теории с $k=\frac{h}{R}$ где h — толщина пластины, R — ее радиус. Поэтому определим k_1 и k_2 следующими формулами: $k_1=\frac{h}{R_1}$, $k_2=\frac{h}{R_2}$, где h — толщина оболочки, R — радиус кривизны. В рамках линейной теории тонких упругих оболочек, это предположение может быть уточнено формулами (2). Таким образом решаемая здесь задача будет решаться в рамках уточненной теории Кизхафа—Лява, т.е. мы применяем здесь предположение о нормальном сечении оболочки, и уточняем последующие гипотезы (о нормальных напряжениях к площадкам, нормаль к которым совпадает с нормалью к срединной поверхности, в форме, позволяющей учитывать изменение длины нормального сечения).

Таким образом, разрешающая система уравнений безизгибного ($æ_1$=0, $æ_2$=0, $æ_{12}$=0) деформирования тонкостенных упругих оболочек записываются в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(SA^2)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{AB}{R_1}k_1T_1+ABq_1=0\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}(T_2B)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(SB^2)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{AB}{R_2}k_2T_2+ABq_2=0\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_1T_1B)+\frac{\partial}{\partial\beta}(k_2T_2A)\right]-\frac{T_1}{R_1}-\frac{T_2}{R_2}+q_3=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3}
$$

Эта система уравнений может быть упрощена, если в первых двух уравнениях отбросить члены $\frac{k_iT_i}{R_i}=0$ как бесконечно малые второго порядка малости $\frac{k_ih}{R_i^2}$. К ним присоединяются уравнения совместимости деформаций и закон Гука [Видезман]:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\gamma_{12}+\frac{1}{R_1}\left[\frac{-\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_{12}A)\right]=0\\
&\frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_{12}+\frac{1}{R_2}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1A)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}A^2)\right]=0\\
&\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_{12}A^2)\right]+\right.\\
&\left.+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1A)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{1}{2B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}B^2)\right]\right\}=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

Предположим, что материал оболочки изотропен, и следует такому закону Гука:

$$
\begin{aligned}
&T_1=\frac{Eh}{2-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)\qquad T_2=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1)\\
&S=\frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{12}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\frac{\partial U}{A\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}V+\frac{W}{R_1}=\frac{1}{Eh}(T_1-\mu T_2)\\
&\varepsilon_2=\frac{\partial V}{B\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}U+\frac{W}{R_2}=\frac{1}{Eh}(T_2-\mu T_1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$\gamma_{12} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{B}\right) = \frac{2(1+\mu)}{Eh}S$$

Систему (4) можно упростить, если отбросить в первых двух уравнениях члены $\frac{AB}{R_1}k_1T_1$ и $\frac{AB}{R_2}k_2T_2$ в силу их малости. Таким образом разрешающие уравнения сводятся к следующим уравнениям равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(SA^2) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + ABq_1 = 0\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}(T_2A) + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(SB^2) - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_1 + ABq_2 = 0\\
&\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_1T_1B) + \frac{\partial}{\partial\beta}(k_2T_2A)\right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Закон Гука для изотропных тел:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}V + \frac{W}{R_1} = \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2)\\
&\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}U + \frac{W}{R_2} = \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1)\\
&\gamma_{12} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{B}\right) = \frac{2(1+\mu)}{Eh}S
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

условия совместности деформаций:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\gamma_{12} + \frac{1}{R_1}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2B) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_{12}A)\right] = 0\\
&\frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_{12} + \frac{1}{R_1}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1A) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2 + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}B)\right] = 0\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2B) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1 + \frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_{12}A^2)\right]\right\} +\\
&+\frac{1}{AB} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[-\frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1A) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2 + \frac{1}{2B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}B\ )\right]\right\} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Третье уравнение (9) может быть упрощено за счет первых двух условий.

Таким образом, задача, построенная безизгибных (безмоментных) форм оболочечных конструкций с учетом смятия кромки приводится к решению уравнений (7)–(8)–(9). Ее можно упростить, полагая, например, $A = const$ $B = const$, или же $A << 1$, $B << 1$, или же рассматривая оболочки нулевой гаусовой кривизны $\frac{1}{R_1} = 0$, $\frac{1}{R_2} \neq 0$.

Литература

1. Мартыненко М.Д. Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки// Вопросы математической физики и теории функций. Киев «Наукова Думка» 1969, с.91-96.

2. Нго Хьюнг Нью некотрые обратные задачи безмоментной теории оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1987, с.15

3. Фам Хонг Нга Некоторые обратные задачи безмоментной теории монжевых оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1989, с.15

4. Гариб Муса Ибрагим Гариб Геометрия безизгибных форм тонкостенных пологих оболочных конструкций. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1991, с.15

5. Бидереман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика М., Машиностроение, 1977, с.488

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

С. М. Босяков

Рассмотрим упругие тела, характеризующиеся тремя материальными постоянными. К таким материалам относятся, например, алмазы, многие стеклопластики, а также большинство металлов, используемых в промышленности. Уравнения движения для таких сред имеют следующий вид [1]:

$$\left(A_4\Delta - \left(A_1 - A_2 - 2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i + \left(A_2 + A_4\right)\partial_i \sum_{k=1}^{3} \partial_k u_k + X_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, A_4 — упругие постоянные, D — оператор Лапласа, $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ — вектор перемещения, X_i — массовые силы, r — плотность, $\ddot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,3}$.