Таким образом, задача, построенная безизгибных (безмоментных) форм оболочечных конструкций с учетом смятия кромки приводится к решению уравнений (7)–(8)–(9). Ее можно упростить, полагая, например, $A = const \quad B = const$, или же $A << 1, \quad B << 1$, или же рассматривая оболочки нулевой гаусовой кривизны $\frac{1}{R_1} = 0, \quad \frac{1}{R_2} \neq 0$.

Литература

1. Мартыненко М.Д. Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки// Вопросы математической физики и теории функций. Киев «Наукова Думка» 1969, с.91-96.

2. Нго Хьюнг Нью некотрые обратные задачи безмоментной теории оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1987, с.15

3. Фам Хонг Нга Некоторые обратные задачи безмоментной теории монжевых оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1989, с.15

4. Гариб Муса Ибрагим Гариб Геометрия безизгибных форм тонкостенных пологих оболочных конструкций. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1991, с.15

5. Бидереман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика М., Машиностроение, 1977, с.488

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

С. М. Босяков

Рассмотрим упругие тела, характеризующиеся тремя материальными постоянными. К таким материалам относятся, например, алмазы, многие стеклопластики, а также большинство металлов, используемых в промышленности. Уравнения движения для таких сред имеют следующий вид [1]:

$$\left(A_4\Delta - \left(A_1 - A_2 - 2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i + \left(A_2 + A_4\right)\partial_i \sum_{k=1}^{3} \partial_k u_k + X_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, A_4 — упругие постоянные, D — оператор Лапласа, $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ — вектор перемещения, X_i — массовые силы, r — плотность, $\ddot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,3}$.

Характеристическое уравнение для системы уравнений (1) с начальными данными на поверхности $Z(t, X) = const$ не разрешимо в аналитическом виде [2—4]. Поэтому анализ распространения поверхностей разрыва целесообразно проводить в некоторых плоскостях кубически анизотропного тела. Для квазипоперечных волн такими плоскостями являются плоскости грани куба ($x_i = 0, i = \overline{1,3}$) и плоскости $x_1' = 0$ либо $x_2' = 0$, повернутые относительно $x_1 = 0$ либо $x_2 = 0$ на угол равный 45° [1]. Обратимся ко второму случаю, так как он является наименее изученным. Система уравнений движения (1) принимает следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}
&\left(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2\right)u_1 + \left(A_{12} + A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_2 + \left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_1\partial_3 u_3 = \rho\ddot{u}_1,\\
&\left(A_{12} + A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_1 + \left(A_{66}\partial_1^2 + A_{11}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2\right)u_2 + \left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_3 = \rho\ddot{u}_2,\\
&\left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_1\partial_3 u_1 + \left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_2 + \left(A_{44}\left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) + A_{33}\partial_3^2\right)u_3 = \rho\ddot{u}_3.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Начальные данные к системе (2) зададим на поверхности $Z(t, X) = const$ и перейдем к новым переменным по формулам [2, 3]

$$Z_k = Z_k(t, X),\ k = \overline{0,3},\ Z_0 \equiv Z\ .$$

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,n=0}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z_n \partial Z_m}\frac{\partial Z_n}{\partial x_k}\frac{\partial Z_m}{\partial x_l} + \sum_{m=0}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial Z_m}\frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_k \partial x_l}, kl = \overline{0,3}, x_0 = t. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2) и приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных $\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}, i = \overline{1,3}$ [2, 3]:

$$\det\left\|\omega_{ij}\right\| = 0, \qquad (4)$$

где $\omega_{ii} = A_{11}p_i^2 + A_{66}p_j^2 + A_{44}p_3^2, \omega_{ij} = \left(A_{12} + A_{66}\right)p_i p_j,$

$$\omega_{33} = A_{44}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + A_{33}p_3^2, \omega_{i3} = \omega_{3i} = \left(A_{13} + A_{44}\right)p_i p_3, i \neq j = 1,2\ ,$$

$$p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, k = \overline{1,3}\ .$$

Раскроем определитель (5) и разделим полученное выражение на g^6, $g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Будем иметь кубическое уравнение относительно $V^2 = \frac{p_0^2}{g^2}$, в которое войдут также упругие постоянные и направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности $\cos\alpha_i = \frac{p_i}{g}, i=\overline{1,3}$ [2, 3]. Примем $\cos\alpha_1 = \cos\alpha, \cos\alpha_2 = 0, \cos\alpha_3 = \sin\alpha$ и запишем решение этого уравнения в следующем виде:

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}\Big(A_{44} + A_{11}\cos^2\alpha + A_{33}\sin^2\alpha \pm \pm\sqrt{\left((A_{11}-A_{44})\cos^2\alpha + (A_{44}-A_{33})\sin^2\alpha\right)^2 + (A_{13}+A_{44})^2\sin^2 2\alpha}\Big)},$$
$$V_3 = \sqrt{\frac{A_{66}\cos^2\alpha + A_{44}\sin^2\alpha}{\rho}}. \tag{6}$$

Выразим постоянные $A_{11}, A_{33}, A_{44}, A_{66}, A_{12}, A_{13}$ через модули упругости кубически анизотропной среды A_1, A_2, A_4 [1]:

$$A_{11} = A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2}, A_{13} = A_{12} = A_2, A_{33} = A_1, A_{44} = A_4, A_{66} = \frac{A_1 - A_2}{2}.$$

Окончательно для скоростей распространения поверхностей разрыва (6) будем иметь

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}\left(A_4 + \left(A_4 + \frac{A_1+A_2}{2}\right)\cos^2\alpha + A_1\sin^2\alpha \pm \pm\sqrt{\left(\frac{A_1+A_2}{2}\cos^2\alpha + (A_4 - A_1)\sin^2\alpha\right)^2 + (A_2+A_4)^2\sin^2 2\alpha}\right)},$$
$$V_3 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{A_1 - A_2}{2}\cos^2\alpha + A_4\sin^2\alpha\right)}. \tag{7}$$

Формулы (7) позволяют построить кривые векторов рефракции $R_i = 1/V, i=\overline{1,3}$ (аналогичные поверхностям показателей преломления в оптике [1, 2]) в плоскости $x_2' = 0$ (рис. 1) для различного рода кубически анизотропных материалов [5].

Кривые R_i позволяют определить значение фазовой скорости в зависимости от значения угла а, а также найти направление переноса упругой энергии по направлению нормали к кривой $R_i, i=\overline{1,3}$. Важной особенностью кривой R_2 для свинца является наличие касательных, имеющих с R_2 две точки касания [2]. Наличие таких особенностей приводит к появлению в интервале углов $(-\theta;\theta)$ и $(-\theta^*;\theta^*)$ лакун, то есть таких участков, где происходит многократное усиление упругой энергии [2]. В плоскости $x_2' = 0$ кубически анизотропных сред условия существования лакун можно записать как условия существования решений уравнений относительно углов q и θ^* в интервале от нуля до p/2:

$$\begin{aligned}&\left(A_1^2+4A_2^2+9A_2A_4+6A_4^2-A_1\left(A_2+3A_4\right)-\right.\\&\left.-\left(A_1-A_2-2A_4\right)\left(3A_1+4A_2+A_4\right)\cos 2\theta\right)^2-16\left(A_1+A_4\right)^2\times\\&\times\left(\left(\frac{1}{2}\left(A_1+A_2\right)\cos^2\theta+\left(A_4-A_1\right)\sin^2\theta\right)^2+\left(A_2+A_4\right)^2\sin^2 2\theta\right)=0,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(A_1-3A_2-4A_4\right)\left(A_1+3A_2+2A_4\right)-\right.\\&\left.-\left(A_1-A_2-2A_4\right)\left(3A_1+7A_2+4A_4\right)\cos 2\theta^*\right)^2-16\left(A_1+A_2+2A_4\right)^2\times\\&\times\left(\left(\frac{1}{2}\left(A_1+A_2\right)\cos^2\theta^*+\left(A_4-A_1\right)\sin^2\theta^*\right)^2+\left(A_2+A_4\right)^2\sin^2 2\theta^*\right)=0.\end{aligned} \tag{9}$$

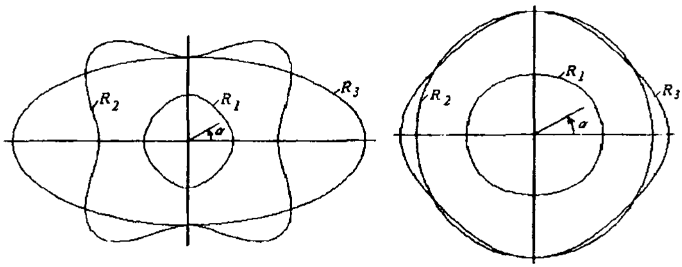

Рис. 1. Кривые рефракции в плоскости $x_2' = 0$

Расчет, проведенный на основании формул (8), (9) для ряда кубически анизотропных сред показывает, что в плоскости $x_2' = 0$ лакуны отсутствуют у молибдена, алмаза, вольфрама и алюминия. Для некоторых других кубически анизотропных материалов значения углов q и θ^* приведены в таблице 1.

Как следует из таблицы 1, в большинстве случаев q > θ^*, обратное неравенство выполняется, например, для германия. Случаев, когда при q ? 0 угол θ^* равен нулю, либо при θ^* ? 0 угол q равен нулю, для известных кубически анизотропных сред не выявлено.

С помощью формул (7) легко получить бихарактеристики, которые позволяют построить характеристические поверхности и являются составляющими групповой скорости распространения упругой волны [2, 3].

Таблица 1.

Значения углов q и θ для некоторых кубически анизотропных тел*

Материал	Упругие постоянные, ´10^{10}, Н/м^2			Плотность, г, кг/м^3	Угол θ	Угол θ*
	A_1	A_2	A_4			
германий	12.89	4.83	6.71	5460	17°28'	20°40'
золото	18.6	15.7	4.20	19300	32°07'	31°30'
никель	24.65	14.73	12.47	8750	29°36'	28°38'
серебро	12.40	9.34	4.61	10505	32°27'	31°11'
медь	16.84	12.14	7.54	8930	33°07'	31°19'
свинец	4.66	3.92	1.44	11342	35°03'	33°26'

Литература

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.

2. Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.

3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, ч. 2. М., 1981.

4. О. Н. Скляр, С. М. Босяков // Материалы, технологии, инструменты, 2000, т. 5, № 4, С.26-28.

5. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. Т. IV. М., 1984.

УДК 546.621:621.785

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВОВ АЛЮМИНИЯ С НИКЕЛЕМ И МАРГАНЦЕМ

Е. Ю. Василевич, В. Г. Шепелевич

В последние десятилетия активно ведутся исследования алюминиевых сплавов, полученных сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы при скоростях охлаждения 10^5 К/с и выше. При этом особый интерес представляют сплавы алюминия с переходными элементами [1], что обусловлено их низкой взаим-