УДК 51(07.07)

Решение уравнений второй степени с тремя неизвестными

Егорова Л.В
Белорусский национальный технический университет

Геометрически решение уравнения $x^2+y^2=z^2$ можно истолковать как нахождение всех пифагоровых треугольников, т.е. прямоугольных треугольников, у которых и катеты $x;y$ и гипотенуза z выражаются целыми числами.

Пример. Найти все решения уравнения $x^2+2y^2=z^2$, в целых положительных попарно взаимно простых числах x, y и z.

Решение. Заметим, что если x, y и z есть решение данного уравнения и x, y и z не имеют общего делителя, отличного от 1, то они и попарно взаимно просты.

Если x и y кратны простому числу p > 2, то из уравнения $\left(\frac{x}{p}\right)^2+2\left(\frac{x}{p}\right)^2=\left(\frac{z}{p}\right)^2$ следует, что z кратно p (т.к. его левая часть целое число).

То же самое будет, если x и z или y и z делятся на p. Число x должно быть числом нечётным для того, чтобы общий наибольший делитель x, y и z был равен 1.

Запишем уравнение в виде:

$$2y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x).$$

Но z+x и z-x имеют общим наибольшим делителем 2. Поэтому, или числа z+x и $\frac{z-x}{2}$ взаимно просты, или взаимно просты числа $\frac{z+x}{2}$ и $z-x$. В первом случае из равенства $(z+x)\frac{z-x}{2}=y^2$ следует, что $z+x=n^2, z-x=m^2$, а во втором случае из равенства $\frac{z+x}{2}(z-x)=y^2$ следует $z+x=2m^2, z+x=n^2$, где n и m – целые, m – нечётное число и n,m > 0.

Общие формулы, дающие все решения уравнения в целых положительных без общего делителя, большего 1 , числах x, y и $z: x=\pm(a^2-2b^2), y=2ab, z=a^2+2b^2$, где a и b положительны, взаимно просты и a нечётно. При этих условиях величины a и b выбираются произвольно, но так, чтобы x было положительно.