УДК 51 (07.07)

Уравнения с двумя переменными (диофантовы уравнения)

Юрковец Л.В.
Белорусский национальный технический университет

Простейшим видом уравнений в целых числах являются уравнения вида $ax+by=c$ (1), где a,b,c - заданные целые числа, $a \ge b > 0$.

Теорема 1. Уравнение $ax+by=c$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда НОД(a,b) делит число c.

Теорема 2. Если числа a и b взаимно простые, то уравнение $ax+by=1$ (2) имеет решение в целых числах.

Правило. Напишем в таблицу две строки $(1;0;a)$ и $(0;1;b)$, соответствующие уравнениям $ax+by=a$ и $ax+by=b$.

Числа, записываемые в этой строке в столбцах неизвестных, дают решение уравнения $ax+by=1$ (2). Их мы будем записывать x_0 и y_0.

Тогда числа $x_1 = c \cdot x_0$ и $y_1 = c \cdot y_0$ будут одним из решений уравнения $ax+by=c$ (1), где a и b взаимно простые.

В общем случае: если $(x_1;y_1)$ - некоторое решение уравнения (1), то для каждого целого n пары $\begin{cases} x = x_1 + bn \\ y = y_1 - an \end{cases}$, $n \in Z$ также будут решениями уравнения (1).

Пример. Решить уравнение $11x+25y=10$ (1) в целых числах.

Решение. Перейдем к уравнению $11x+25y=1$ (2).

q	x	y	r - остаток
	0	1	25
2	1	0	11
3	-2	1	3
1	7	-3	2
	-9	4	1
	$x_0=-9$	$y_0=4$	Решение уравнения (2)
	$x_1 = x_0 \cdot 10 = -90$	$y_1 = y_0 \cdot 10 = 40$	Одно решение уравнения (1)
Все решения уравнения (1) имеют вид $\begin{cases} x = -90+25n \\ y = 40-11n \end{cases}; n \in Z$.			