МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

А. Н. Рудый

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Конспект лекций

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

А. Н. Рудый

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Конспект лекций

Минск
БНТУ
2014

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.17я7
Р83

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Чигарев;*
кандидат технических наук, доцент *В. И. Юринок*

Рудый, А. Н.
Р83 Элементы математической теории надежности : конспект лекций / А. Н. Рудый. – Минск : БНТУ, 2014. – 131 с.
ISBN 978-985-550-211-2.

В издании рассмотрены основные законы распределения времени наработки на отказ, возникающие в теории надежности, их характеристики. Рассмотрено также резервирование и его виды, а также связанные с надежностью случайные процессы и потоки событий (потоки отказов и потоки восстановлений). Для закрепления теоретического материала приводятся упражнения. Расчет показателей надежности проводится в пакете Mathematica.

Издание предназначено для студентов 3-го курса энергетического факультета.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.17я7

ISBN 978-985-550-211-2

Введение

В основу курса положены лекции спецкурса, читаемого автором для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические сети и системы» ЭФ БНТУ, цель которого – ввести математические термины и характеристики, используемые в теории надежности, а также изложить математическую составляющую, лежащую в ее основе.

Теория надежности широко используется в инженерной практике на этапах проектирования, сооружения и эксплуатации электроэнергетических систем. В процессе проектирования необходимо правильно рассчитывать надежность создаваемой системы, в процессе эксплуатации экспериментально проверить показатели надежности.

В лекциях рассмотрены основные законы распределения времени наработки на отказ, возникающие в теории надежности, их характеристики. Рассмотрено также резервирование и его виды, а также связанные с надежностью случайные процессы и потоки событий(потоки отказов и потоки восстановлений).Для закрепления теоретического материала приводятся необходимые упражнения. Расчет показателей надежности проводится в пакете Mathematica.

Автор благодарит М. И. Фурсанова за внимание и советы при подготовке курса, Е. Л. Бохан и Д. А. Исаева за подготовку рукописи к печати.

§ 1. Вероятностное пространство

Определение 1. *Вероятностным пространством* будем называть тройку (Ω, U, P), где Ω – пространство элементарных исходов, U – алгебра событий, P – вероятность (функция на U со значениями во множестве действительных чисел R).

Замечание. Ω – это произвольное множество, U – алгебра событий (совокупность подмножеств множества Ω, замкнутая относительно операций сложения, умножения и разности событий). Свойства функции P:

1) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in U$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ – для несовместных событий (события *A* и *B* несовместны, если $A \cdot B = \varnothing \Leftrightarrow$ если произойдет *A*, то это исключает, что произойдет *B*, и наоборот).

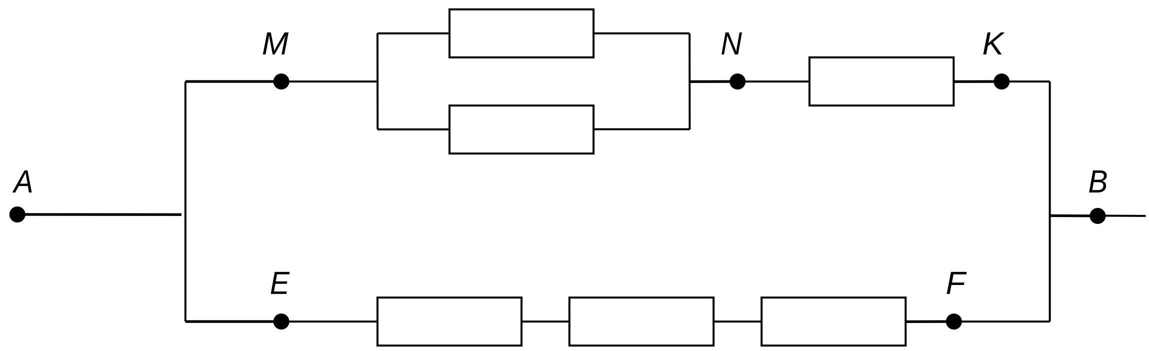
Определение 2. События *A* и *B* независимы, если

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

Определение 3. Пусть $P(B) \neq 0$. Тогда условная вероятность наступления события *A* при условии, что *B* произошло,

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{2}$$

Пример 1. Вероятность отказа каждого элемента электрической цепи равна 0,1. Элементы работают независимо друг от друга. Отказ элемента – его деструкция, приводящая к разрыву соответствующего участка цепи. Найти вероятность того, что между точками *A* и *B* будет идти электрический ток.



Решение. Схема в примере – это логическая модель надежности. При последовательном соединении элементов модели удобно вычислять вероятность работы соответствующего участка (произведение вероятностей работ каждого элемента), при параллельном – отказ (произведение вероятностей отказов каждого элемента).

$$P_{\text{работы}}(EF)=0{,}9^3;\ P_{\text{отказа}}(MN)=(0{,}1)^2;\ P_{\text{работы}}(MN)=1-(0{,}1)^2=0{,}99;$$

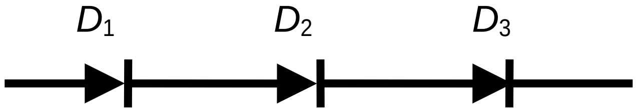
$$P_{\text{работы}}(MK)=(1-(0{,}1)^2)\cdot 0{,}9=0{,}99\cdot 0{,}9=0{,}891;$$

$$P_{\text{отказа}}(AB)=(1-(0{,}9)^3)(1-0{,}891)=0{,}029539;$$

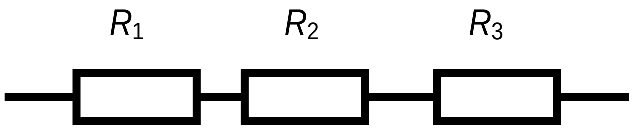
$$P_{\text{работы}}(AB)=1-P_{\text{отказа}}(AB)=1-0{,}029539=0{,}970461.$$

Замечание. При построении логической модели надежности каждому элементу реальной электрической цепи ставят в соответствие элемент логической модели. При этом, если элемент электрической цепи работоспособен, то ему соответствует элемент логической модели, имеющий бесконечную проводимость, а неработоспособному элементу соответствует элемент с нулевой проводимостью.

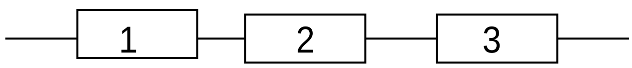
Например, электрической цепи с диодами



или резисторами

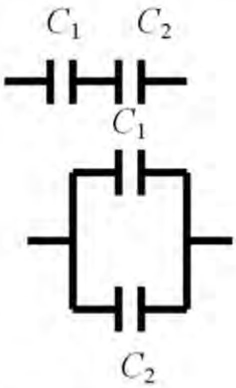
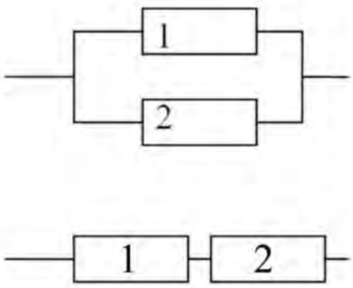
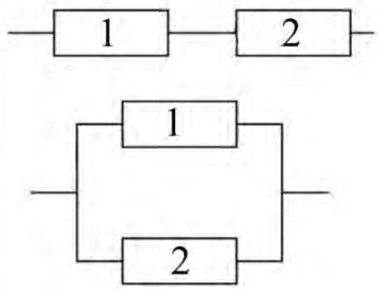


при отказах типа «обрыв» соответствует логическая модель



.

Для конденсаторов можно рассматривать два типа отказов: короткое замыкание или обрыв. Тогда имеет место следующие соответствия электрической цепи и логических моделей.

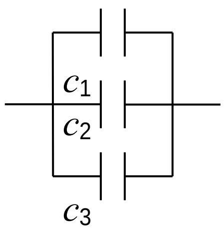
Электрическая цепь	Логические модели	
	Тип: короткое замыкание	Тип: обрыв
		

Пример 2. Построить логическую модель и определить вероятность безотказной работы схемы соединения конденсаторов.

Типы отказов конденсаторов:

1) короткое замыкание;

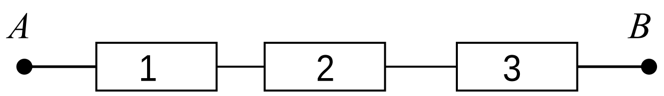
2) обрыв.



Вероятность безотказной работы каждого $p_i = 0{,}8;\ i = 1, 2, 3$.

Решение.

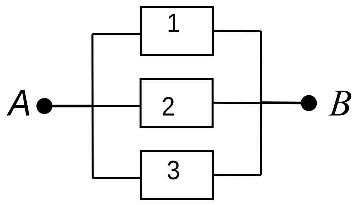
1) Логическая модель надежности:



.

$$P_{\text{работы}}(AB) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

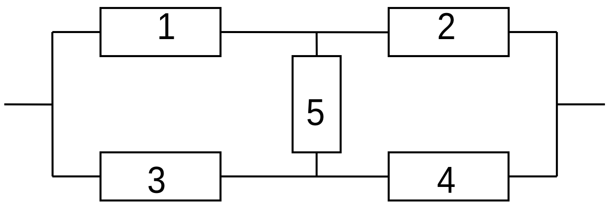
2) Логическая модель надежности:



$P_{\text{отказа}}(AB) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0,2^3 = 0,008$.

$P_{\text{работы}}(AB) = 1 - (0,2)^3 = 0,992$.

Пример 3. Найти вероятность безотказной работы схемы, логическая модель которой:

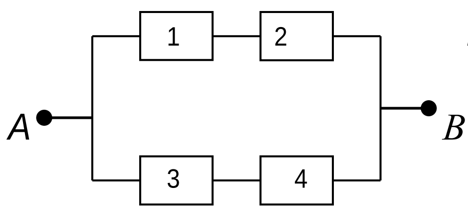


Вероятность безотказной работы каждого элемента $p_i = 0,9;\ i = 1, ..., 5$.

Решение. Пусть $q_i = 1 - p_i;\ i = 1, ..., 5$. Применим метод разложения относительно особого элемента: пусть гипотеза H_1 – 5-й элемент отказал, H_2 – 5-й элемент работоспособен.

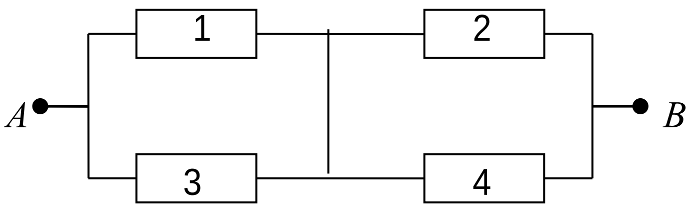
$$P(H_1) = 1 - p_5 = q_5 = 0,1;\ P(H_2) = p_5 = 0,9.$$

Этим гипотезам соответствуют схемы:



$P_{\text{отказа}}(AB) = (1 - p_1 \cdot p_2)(1 - p_3 \cdot p_4) = 0,0361$

$P_{\text{работы}}(AB) = 1 - 0,0361 = 0,9639$.



$$P_{\text{работы}}(AB) = (1 - q_1 q_3)(1 - q_2 q_4) = (1 - (0,1)^2)^2 = 0,9801.$$

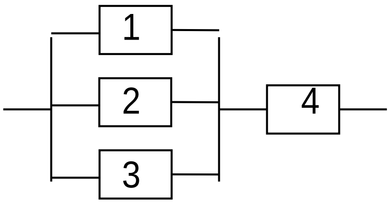
Далее по формуле полной вероятности:

$$P_{\text{работы}} = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = 0{,}1\cdot 0{,}9639 + 0{,}9\cdot 0{,}9801 = 0{,}97839.$$

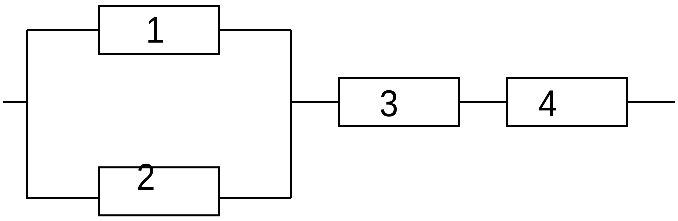
Упражнения

1.1. Найти вероятность безотказной работы схемы, логические модели которых:

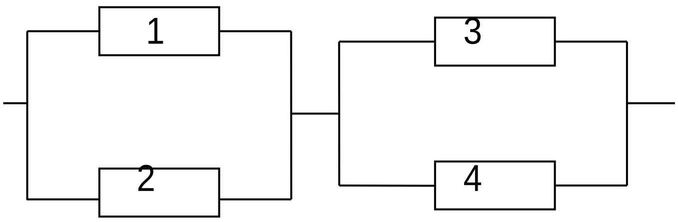
а)



б)



в)



.

Вероятности безотказной работы элементов равны p_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

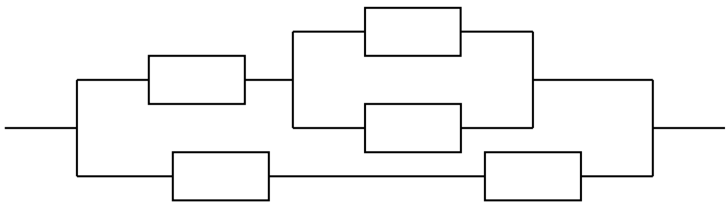
Ответ. а) $p_4(1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3))$;

б) $p_3\cdot p_4(1-(1-p_1)(1-p_2))$;

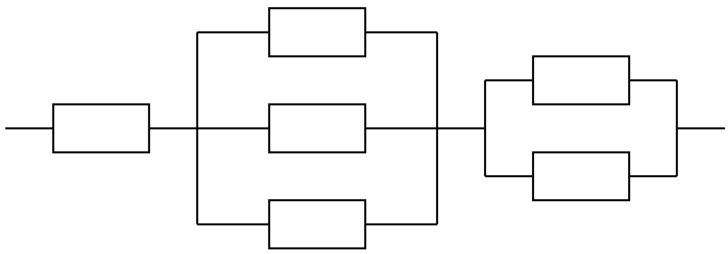
в) $(1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4))$.

1.2. Вероятности безотказной работы каждого элемента за время T равны 0,9. Найти вероятность безотказной работы за время T схем, логические модели которых:

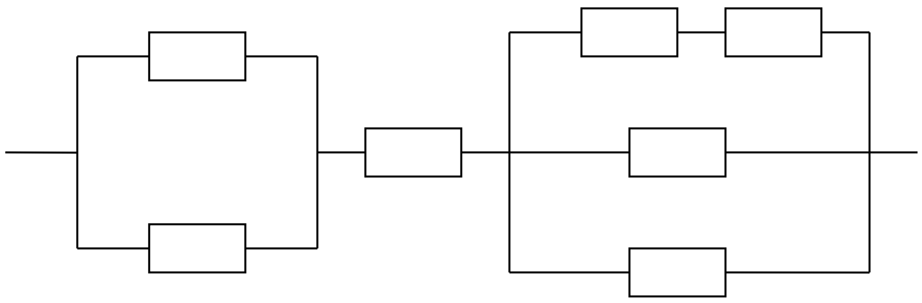
а)



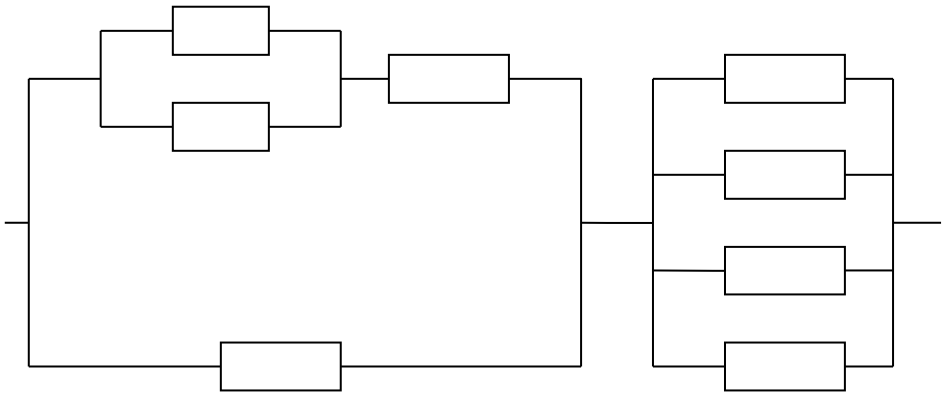
б)



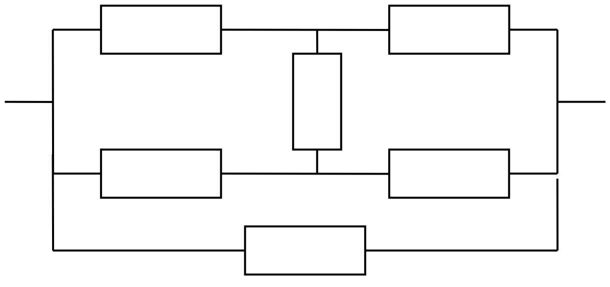
в)



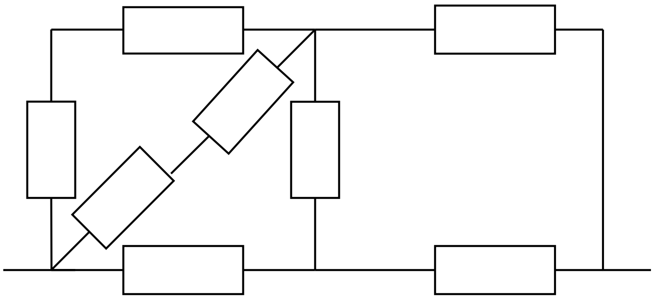
г)



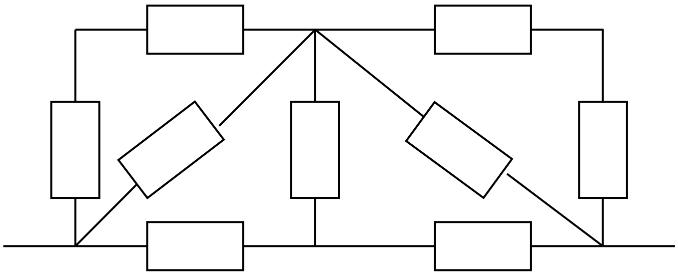
д)



е)



ж)



Ответ. а) 0,97929; б) 0,890109; в) 0,8893; г) 0,989; д) 0,998128; е) 0,985; ж) 0,99586.

§ 2. Случайные величины

Определение 1. Пусть (Ω, U, P) – вероятностное пространство. Действительнозначную функцию $X : \Omega \to R$, определенную на Ω будем называть случайной величиной (для краткости СВ *X*), если $\forall t \in R$ множество $U_t = \{\omega | X(\omega) < t\} \in U$. При этом функция $F_X(t) = P(X < t)$ называется функцией распределения СВ *X*. Если множество значений СВ *X* – конечно или счетно, то СВ *X* называется дискретной, если значения СВ *X* целиком заполняют некоторый интервал действительной оси, то СВ *X* называется непрерывной.

Замечание. Среди непрерывных СВ будем рассматривать абсолютно-непрерывные, а именно такие, что

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \tag{1}$$

где $f(x) \geq 0$, $f(x)$ – кусочно-непрерывна.

При этом функция $y = f(t)$ называется плотностью вероятностей СВ *X* и верны формулы:

$$f(t) = F'(t), \forall t \in R, \tag{2}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt, \tag{3}$$

где *M*(*X*) – математическое ожидание (среднее значение) СВ *X*;

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt - M^2(X)$ – дисперсия СВ *X*; (4)

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение СВ *X*. (5)

Для дискретной случайной величины *X*, заданной законом

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{6}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X). \tag{7}$$

Определение 2. Дискретная СВ X называется распределенной по закону Бернулли $B(n, p)$ (биномиальному закону), если значения X: 0, 1, …, n и

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k};\ q = 1 - p;\ 0 < p < 1, k = 0,1,...,n, \tag{8}$$

$n \in Z,\ n > 0;\ n, p$ – параметры распределения.

Замечание. $M(X) = np;\ D(X) = npq$.

Пример 1. Система состоит из 4-х блоков, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы любого из них за время t p = 0,8. Для нормальной работы системы за время t необходимо, чтобы работали хотя бы 3 блока. Найти вероятность того, что:

1) система будет работать в течение времени t;

2) система откажет.

Решение. Пусть СВ X – число работающих исправно в течение времени t блоков. Тогда по формуле (8)

1)

$$P_1 = P(X = 4) + P(X = 3) = C_4^4 p^4 q^0 + C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}8^4 + 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}8192;$$

2) $P_2 = 1 - P_1 = 1 - 0{,}8192 = 0{,}1808$.

Замечание. Биномиальный закон распределения часто применяется при статистическом контроле качества изделий, когда мало сведений о природе и поведении изделий и их нужно разделить на исправные и неисправные.

Определение 3. Дискретная СВ X называется распределенной по закону Пуассона $\Pi(\lambda)$, если значения X

$$X: 0, 1, 2, ..., m, ... \text{ и } P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{9}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения, k = 0, 1, 2, ...

Замечание. $M(X) = \lambda;\ D(X) = \lambda$.

Теорема 1 (теорема Пуассона). Пусть СВ X распределена по закону Бернулли с параметром p. Пусть $p \to 0,\ n \to \infty$, так что $n \cdot p = \lambda = \text{const}$, тогда

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} C_n^k p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{10}$$

Замечание. Из теоремы 1 следует, что распределение Пуассона $\Pi(n \cdot p)$ – предельный случай биномиального распределения при $n \to \infty$.

Если n велико, а p мало, то вместо формулы (8) для распределения $B(n, p)$ используют формулу (9), где $\lambda = n \cdot p$.

Пример 2. Радиоэлектронная система (РЭС) состоит из 200 узлов. Вероятность отказа каждого из них за время t равна 0,005. Найти:

1) среднее число отказавших за время t узлов;

2) вероятность того, что за время t откажет менее 3-х узлов;

3) вероятность отказа хотя бы одного узла за время t.

Решение. Пусть СВ X – число отказавших за время t узлов. Тогда:

1) $M(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}005 = 1$;

2) $P_1 = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = n \cdot p = 1$. Поэтому $p_1 = e^{-1} + e^{-1} + \dfrac{1}{2}e^{-1} = \dfrac{5}{2}e^{-1} = 0{,}92$;

3) $p_2 = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-1} = 0{,}63$.

Определение 4. Непрерывная СВ T называется распределенной по нормальному закону $N(a;\sigma)$, если ее функция плотности вероятностей

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

Замечание. $M(T) = a$; $D(T) = \sigma^2$;

$$P(\alpha \le T < \beta) = P(\alpha < T < \beta) = P(\alpha < T \le \beta) = P(\alpha \le T \le \beta) = \\ = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{12}$$

где $\Phi(t)$ – интегральная функция Лапласа:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{13}$$

При этом $F(t) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{t-a}{\sigma}\right)$ – функция распределения СВ X.

Если число испытаний n для СВ X, распределенной по закону Бернулли $B(n, p)$ велико, то используют приближенную формулу:

$$P(m_1 \le T < m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (14)$$

где p – вероятность успеха в одном испытании;

$q = 1 - p$;

$o\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ при $npq \to \infty$.

Пример 3. Пусть СВ T задает момент времени выхода из строя производимой детали; $F_T(t) = P(T < t)$ – вероятность того, что деталь откажет на промежутке $[0; t)$. Предположим, что T распределена по закону $N(1000; 250)$; ($a = 1000$ ч; $\sigma = 250$ ч).

1) Найти вероятность того, что деталь проработает безотказно не менее 1250 ч.

2) Вероятность того, что наработка на отказ будет находится в интервале $(a - 2\sigma; a + 2\sigma)$.

3) Вероятность того, что безотказно проработав до 1250 ч, деталь безотказно проработает и до 1750 ч.

Решение.

1) Искомая вероятность равна вероятности того, что T примет значение из промежутка $(1250; +\infty)$

$$P(T > 1250) = 1 - F_T(1250) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{1250 - a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi(1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587.$$

2) По формуле (12)

$$P(a - 2\sigma < T < a + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{a + 2\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 2\sigma - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

3) Необходимо вычислить условную вероятность $P(T > 1710 | T > 1250)$. Пусть событие A: $T > 1750$, событие B: $T > 1250$. Тогда по формуле (2) § 1

$$P(T > 1710 | T > 1250) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(T > 1750)}{P(T > 1250)} = \frac{\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1750 - a}{\sigma}\right)}{\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1250 - a}{\sigma}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \Phi(3)}{\frac{1}{2} - \Phi(1)} = \frac{0,5 - 0,49865}{0,50 - 0,3413} = 0,0085.$$

Замечание. СВ *T* из примера 3 называется **временем жизни** или **временем наработки на отказ**.

Определение 5. Непрерывная СВ *X* называется распределенной по экспоненциальному закону $\mathrm{Ex}(\alpha)$, если ее функция плотности вероятностей

$$f(t) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha t};\ t \geq 0 \\ 0;\ t < 0 \end{cases}, \tag{15}$$

где $\alpha > 0$ – параметр распределения.

Замечание.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t};\ t \geq 0 \\ 0;\ t < 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$M(X) = \frac{1}{\alpha};\ D(X) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Пример 4. Время *T* наработки элемента на отказ распределено по экспоненциальному закону $\mathrm{Ex}(5 \cdot 10^{-5})$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{ч}}$. Найти вероятность безотказной работы элемента за 500 ч.

Решение. $P(T > 500) = 1 - F(500) = e^{-\alpha t}\Big|_{t=500} = e^{-0,025} = 0,9753$.

Замечание. СВ *T* в примерах 3 и 4 – время жизни элемента – непрерывна. Поэтому в примерах и всюду в дальнейшем $P(T = t_0) = 0;\ P(T \geq t_0) = P(T > t_0)$.

Пример 5. Вероятность безотказной работы изделия в течение 60 ч равна 0,9. Предполагается, что время жизни элемента распределено по экспоненциальному закону. Найти условную плотность вероятности того, что изделие откажет в момент времени t, при условии, что до этого изделие работало безотказно.

Решение. СВ *T* – время жизни элемента; $F_T(t) = 1 - e^{-\alpha t}$.

$$P(T > 60) = 0,9,\ 1 - P(T < 60) = 0,9; 1 - F(60) = 0,9; 1 - (1 - e^{-60\alpha}) = 0,9;$$

$$e^{-60\alpha}=0,9;\ -60\alpha=\ln 0,9;\ \alpha=-\frac{\ln 0,9}{60}=\frac{\ln\frac{10}{9}}{60}=17,56\cdot 10^{-4}\ \ \frac{1}{\text{ч}};$$

$$P(T\ge t)=1-P(T<t)=1-(1-e^{-\alpha t})=e^{-\alpha t}.$$

Пусть $t_1 \ge t$. Тогда

$$F_T\left(t_1 \middle| T\ge t\right)=P\left(T<t_1 \middle| T\ge t\right)=\frac{P(t\le T<t_1)}{P(T\ge t)}=$$

$$=\frac{(1-e^{-\alpha t_1})-(1-e^{-\alpha t})}{e^{-\alpha t}}=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t}}.$$

Тогда

$$f_T\left(t_1 \middle| T\ge t\right)=F_T'\left(t_1 \middle| T\ge t\right)=\frac{\alpha e^{-\alpha t_1}}{e^{\alpha t}}.\Rightarrow f_t\left(t \middle| T\ge t\right)=\alpha.$$

Упражнения

2.1. Электронная система в состоянии выполнить свои задания при как минимум четырех исправных каналах из 5 имеющихся. Вероятность P работы каждого канала в течение времени t равна 0,8. Найти вероятность того, что:

1) система будет работать;

2) система откажет.

Ответ 2.1. 1) 0,73728; 2) 0,26272.

2.2. Система имеет 4 резервных элемента. Вероятность p отказа каждого из них в течение времени t: p = 0,25. Найти вероятность того, что в течение времени t будет исправен:

1) один элемент;

2) хотя бы один элемент;

3) откажут все;

4) найти среднее число отказавших элементов.

Ответ 2.2. 1) 0,046875; 2) 0,9961; 3) 0,0039.

2.3. Устройство состоит из 4 независимо работающих элементов. Вероятность того, что за время t откажет хотя бы один из них, равна 0,5904. Найти вероятность того, что за это время откажут:

1) 2 элемента;

2) менее 2-х;

3) не менее 2-х;

4) найти среднее число отказавших элементов.

Ответ 2.3. 1) 0,1536; 2) 0,8192; 3) 0,1808; 4) 0,8.

2.4. Радиосхема состоит из 2000 узлов. Вероятность p отказа любого из них за время t: $p = 0{,}001$. Найти вероятность того, что за время t в системе произойдет:

1) 3 отказа;

2) менее 3-х отказов;

3) не менее 3-х отказов;

4) хотя бы один отказ;

5) найти средне число отказавших элементов.

Ответ 2.4. 1) 0,180447; 2) 0,67667; 3) 0,32333; 4) 0,864665; 5) 2.

2.5. Время T жизни элемента распределено по закону $\mathrm{Ex}\left(2\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) Написать функцию распределения $F_T(t)$ и функцию плотности вероятностей $f_T(t)$ для СВ T.

2) Определить вероятность того, что элемент будет в рабочем состоянии через: а) 500 ч; б) 1000 ч.

3) Определить вероятность того, что время жизни лежит в промежутке $[500\ \text{ч};\ 1000\ \text{ч}]$.

4) Определить среднее время жизни.

5) Определить вероятность того, что наработка на отказ элемента < 1000 ч, при условии, что до 500 ч он работал нормально.

6) Определить какое время наработки на отказ можно гарантировать с вероятностью $p = 0{,}6$.

Ответ 2.5. 2а) 0,99; 2б) 0,9801; 3) 0,00995; 4) 50000 ч; 5) 0,01005; 6) 25541 ч.

2.6. Время T жизни элемента распределено по закону N (2000 ч; 500 ч).

1) Написать функцию распределения $F_T(t)$ и функцию плотности вероятностей $f_T(t)$ для СВ T.

2) Определить вероятность того, что элемент будет в рабочем состоянии через: а) 2000 ч; б) 3000 ч.

3) Определить вероятность того, что наработка на отказ лежит в промежутке $[2000\ \text{ч};\ 3000\ \text{ч}]$.

4) Определить среднее время жизни.

5) Определить вероятность того, что время жизни элемента < 3000 ч, при условии, что до 2000 ч он работал нормально.

6) Определить, какое время жизни можно гарантировать с вероятностью $p = 0{,}6$.

Ответ 2.6. 2а) 0,5; 2б) 0,0228; 3) 0,4772; 4) 2000 ч; 5) 0,9544; 6) 1875 ч.

2.7. Конструкторское бюро разрабатывает прибор, рабочий ресурс которого равен: a) 7000 ч; b) 9000 ч; c) 12000 ч. При разработке можно использовать одну из четырех деталей A, B, C, D. Время наработки на отказ деталей A, B, C, D распределено соответственно по законам

$\mathrm{Ex}\left(\frac{1}{3}\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$; $\mathrm{Ex}\left(\frac{1}{5}\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$; $N(8000\ \text{ч};\ 2000\ \text{ч})$; $N(8000\ \text{ч};\ 500\ \text{ч})$. Какую из деталей предпочтительней использовать? Расположить детали в порядке убывания предпочтения.

Ответ 2.7. a) *D*, *C*, *B*, *A*; b) *C*, *B*, *A*, *D*; c) *B*, *C*, *A*, *D*.

§ 3. **Основные понятия теории надежности**

Определение 1. Пусть СВ T $(T \ge 0)$ задает момент времени выхода из строя элемента (время наработки на отказ, или время жизни). Функцию распределения $F_T(t) = P(T < t)$ будем называть функцией ненадежности ($F_T(t)$ задает вероятность отказа элемента на промежутке [0 ; t)). Функцию

$$p_T(t) = 1 - F_T(t) \tag{1}$$

будем называть функцией надежности ($p(t)$ задает вероятность того, что элемент откажет на промежутке $[t; +\infty)$, или его время жизни $\ge t$).

Пример 1. Вероятность того, что изделие работало безотказно на промежутке времени [0; 4500), равна 0,406. Предположим, что время жизни T распределено по экспоненциальному закону.

1) Найти $T_{\text{ср}}$ – среднее время жизни.

2) Найти вероятность того, что изделие будет исправно при $t = T_{\text{ср}}$.

Решение.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{по формуле (1) } p(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Тогда $p(4500) = 0{,}406$; $e^{-\alpha \cdot 4500} = 0{,}406$; $\alpha = -\dfrac{\ln(0{,}406)}{4500} = \dfrac{1}{5000}\ \left(\dfrac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) $T_{\text{ср}} = \dfrac{1}{\alpha} = 5000$ ч.

2) $p(5000) = e^{-\frac{1}{5000}\cdot t}\Big|_{t=5000} = e^{-1} = 0{,}367872$.

Замечания.

1. Так как $T \ge 0$, то $p(0) = 1$.

2. Так как $F_T(t)$ – неубывающая функция и $\lim\limits_{t \to +\infty} F_T(t) = 1$, то $p(t)$ – невозрастающая функция и $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 0$.

Пример 2. Пусть T распределена по закону $\text{Ex}(\alpha)$,

$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ Тогда $p(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

На рис. 1 приведем графики $p(t)$ для $\text{Ex}\left(\dfrac{1}{5}\cdot 10^{-3}\ \dfrac{1}{\text{ч}}\right)$, $\text{Ex}\left(\dfrac{1}{3}\cdot 10^{-3}\ \dfrac{1}{\text{ч}}\right)$.

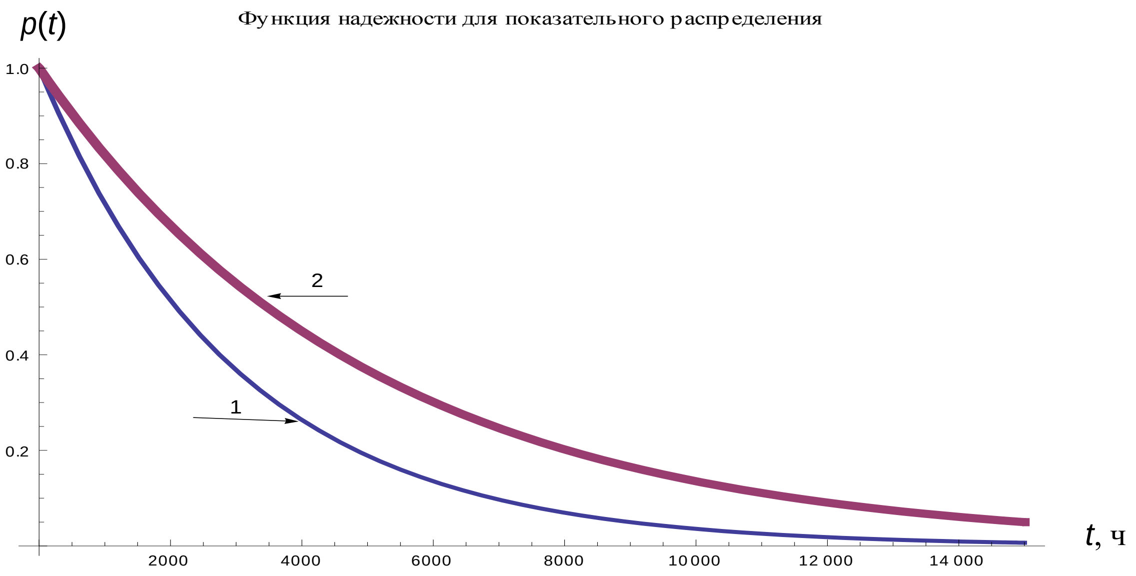


Рис. 1. Графики $p(t)$ для экспоненциальных распределений:
$$1)\ \mathrm{Ex}\left(\frac{1}{3}\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right);\ \ 2)\ \mathrm{Ex}\left(\frac{1}{5}\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right).$$

Пример 3. Пусть T распределена по закону $N(a, \sigma)$,

$$F_T(t) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right), \text{ тогда } p(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

На рис. 2 приведем графики $p(t)$ для N(5000 ч, 1500 ч) и N(5000 ч, 500 ч).

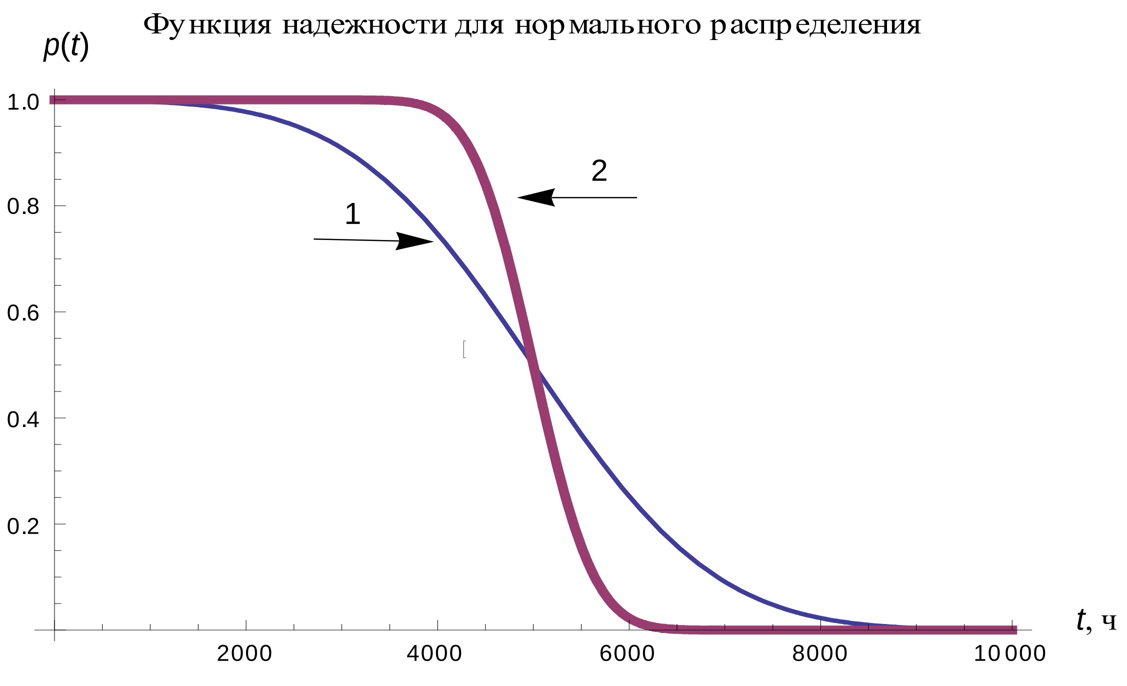


Рис. 2. Графики $p(t)$ для: 1) N(5000 ч, 1500 ч); 2) N(5000 ч, 500 ч)

Определение 2. Условная плотность вероятности отказа элемента в момент времени t, при условии, что на промежутке $\left[0;\, t\right)$ он работал безотказно, называется интенсивностью отказа элемента в момент времени t. Интенсивность отказа обозначим через $\lambda(t)$. Таким образом, $\lambda(t) = f_T(t \mid T \geq t)$.

Замечание. $\lambda(t) \cdot \Delta t$ равно, при небольших Δt, вероятности того, что элемент, проработав безотказно на промежутке $\left[0;\, t\right)$, откажет на промежутке $\left[t;\, t + \Delta t\right)$. При этом $f(t) \cdot \Delta t$ равно вероятности отказа элемента на промежутке $\left[t;\, t + \Delta t\right)$, независимо от того, работоспособен он или нет в момент времени t.

Теорема 1.

$$\lambda(t) = -\frac{p_T'(t)}{p_T(t)} = \frac{f_T(t)}{p_T(t)}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$, событие A – элемент откажет на промежутке $\left[t;\, t + \Delta t\right)$, событие B – элемент откажет на промежутке $\left[t;\, +\infty\right)$ (то есть безотказно проработает на промежутке $\left[0;\, t\right)$). Тогда $B \cdot A = A$ и

$$P(A) = P(BA) = P(B) \cdot P(A \mid B), \tag{4}$$

но $P(A) = f(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $P(A \mid B) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $P(B) = p_T(t)$, где $o(\Delta t)$ – бесконечно-малая более высокого порядка малости, чем Δt, при $\Delta t \to 0$. Подставив найденные вероятности в формулу (4), получим:

$$f(t)\Delta t + o(\Delta t) = p_T(t) \cdot (\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)) = p_T(t) \cdot \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$f(t) = p_T(t) \cdot \lambda(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

и в пределе при $\Delta t \to 0$ получим $f(t) = p_T(t) \cdot \lambda(t)$.

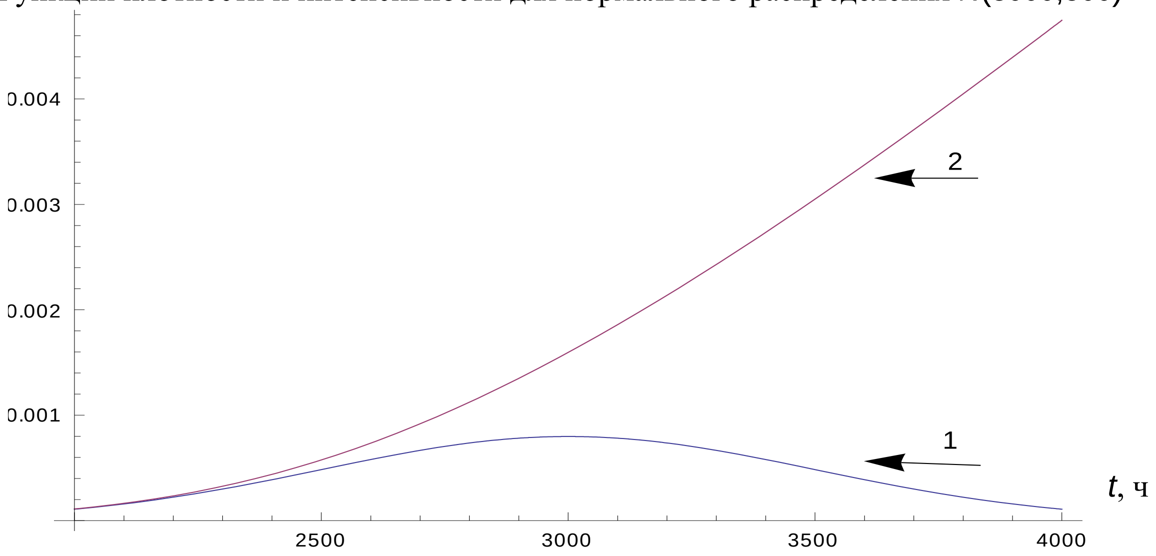
Упражнение. Доказать, что для экспоненциального распределения $\mathrm{Ex}(\alpha)$ интенсивность отказов $\lambda(t)$ – постоянна и $\lambda(t) = \alpha$.

Замечание. При статистическом оценивании значений $f(t) \cdot \Delta t$ и $\lambda(t) \cdot \Delta t$ число отказавших элементов на промежутке $\left[t;\, t + \Delta t\right)$ делят на число всех испытуемых (при оценивании $f(t) \cdot \Delta t$) и на число исправных к моменту времени t (при оценивании $\lambda(t) \cdot \Delta t$).

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ является важным показателем надежности. Его нетрудно оценить статистически и он дает наглядное представление о поведении объекта исследования. Показатель $f(t)$ менее нагляден.

Например, рассмотрим промежуток $[0;\,4000\text{ ч}]$ и $\Delta t = 1$ ч, тогда $f(t)\Delta t = f(t)$, $\lambda(t)\Delta t = \lambda(t)$. Тогда для распределений $N(3000\text{ ч};\,500\text{ ч})$ и $W(0{,}3;\,0{,}01)$ (распределение Вейбулла, см. § 7, п. 7.4) графики $f(t)$ и $\lambda(t)$ будут иметь вид, представленный на рис. 3.

Функции плотности и интенсивности для нормального распределения N(3000;500)



Функции плотности и интенсивности для W(0,3;0,01)

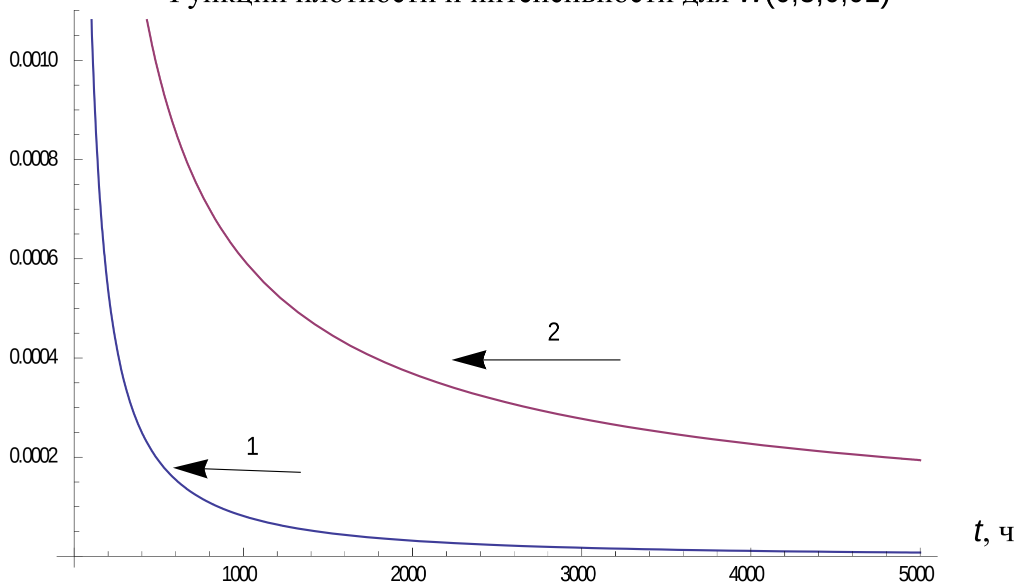
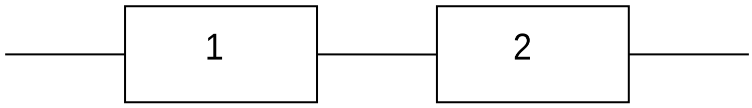


Рис. 3. Графики: 1→ $f(t)$; 2→ $\lambda(t)$

График функции $\lambda(t)$ имеет во многих случаях типичную U-образную форму. Например, для системы, логическая модель надежности которой:



,

причем время жизни первого элемента $W(0{,}3;\ 0{,}01)$ (распределение Вейбулла, см. § 7, п. 7.4), а второго – $N(2500;\ 400)$, график $\lambda(t)$ имеет вид, представленный на рис. 4.

Рис. 4. График функции $\lambda(t)$ интенсивности отказов системы

Замечание. Отказы на промежутке $[0;\ 200\text{ ч}]$ – приработочные, отказы на промежутке $[2000;\ +\infty)$ вызваны старением.

Выпишем зависимости между показаниями надежности $F_T(t),\ f_T(t),\ p_T(t)$ и $\lambda(t)$.

1. $F_T(t)+p_T(t)=1.$ (5)

$$f(t)=F_T'(t)=-p_T'(t). \tag{6}$$

$$\left[\begin{aligned} &F_T(t)=\int_0^t f(x)dx \\ &p_T(t)=\int_t^{+\infty} f(x)dx \end{aligned}\right. \tag{7}$$

2. $\lambda(t)=-\dfrac{p'(t)}{p(t)}=\dfrac{f(t)}{p(t)}$ (см. теорему 1).

3. Выразим $p(t)$ через $\lambda(t)$. Для этого решим дифференциальное уравнение (3) с начальными данными $p(0)=1$.

$$\frac{p'}{p}=-\lambda(t);\ \frac{dp}{p}=-\lambda(t)dt;$$

$$\ln|p| = -\int_0^t \lambda(x)dx + C;$$

$$p = C_1 e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}, \text{ так как } p(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Таким образом,

$$p = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}. \tag{8}$$

Найдем еще $M(T) = T_{\text{ср}}$ – среднее время наработки на отказ (среднее время жизни).

$$T_{cp} = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = -\int_0^{+\infty} td(p(t)) = \left| \begin{matrix} u = t \\ dv = -d(p(t)) \end{matrix} \right| =$$

$$-t \cdot p(t)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p(t)dt = \int_0^{+\infty} p(t)dt.$$

Из физических соображений считаем, что $p(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to +\infty$.

Таким образом,

$$M(T) = T_{\text{ср}} = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} p(t)dt. \tag{9}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} D(T) &= \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt - M^2(T) = -\int_0^{+\infty} t^2 d(p(t)) - M^2(T) = \\ &= \int_0^{+\infty} 2t \cdot p(t)dt - M^2(T). \end{aligned} \tag{10}$$

Упражнения

3.1. Пусть время жизни T элемента распределено равномерно на отрезке $[0, b]$ (обозначим такое распределение $U(0, b)$).

Выписать:

1) функцию плотности вероятностей $f_T(t)$;

2) функция распределения $F_T(t)$;

3) функцию надежности $p_T(t)$;

4) функцию интенсивности отказов $\lambda(t)$;

5) среднее время жизни.

Ответ. $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{b}, t\in[0,b]\\ 0, t>b\end{cases}$; $F(t)=\begin{cases}\frac{t}{b}, t\in[0,b]\\ 1, t>b\end{cases}$; $p(t)=\begin{cases}1-\frac{t}{b}, t\in[0,b]\\ 0, t>b\end{cases}$;

$\lambda(t)=\frac{1}{b-t}, t\in[0,b]$; $T_{ср}=\frac{b}{2}$.

3.2. Пусть время жизни T элемента распределено по закону:

а) $\mathrm{Ex}(\alpha)$;

б) $N(a;\sigma)$.

Выписать:

1) функции $f_T(t)$, $F_T(t)$;

2) функцию надежности $p_T(t)$;

3) функцию интенсивности отказов $\lambda(t)$;

4) $T_{ср}$.

Ответ. а) $f(t)=\alpha\cdot e^{-\alpha t}$, $F(t)=1-e^{-\alpha t}$, $p(t)=e^{-\alpha t}$, $\lambda(t)=\alpha, T_{ср}=\frac{1}{\alpha}$;

б) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$, $F(t)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$, $p(t)=\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$, $\lambda(t)=\frac{f(t)}{p(t)}$, $T_{ср}=a$.

3.3. Время T наработки элемента на отказ распределено по закону $\mathrm{Ex}(\alpha)$.

Найти вероятность того, что элемент будет в рабочем состоянии в момент времени $T_{ср}$ (откажет на промежутке $(T_{ср};+\infty)$).

Ответ. e^{-1}.

3.4. Время T наработки элемента на отказ распределено по закону $\mathrm{Ex}(\alpha)$.

Вероятность того, что элемент работал безотказно на промежутке $[0;1500\text{ ч})$, p = 0,607. Найти вероятность того, что элемент будет в рабочем состоянии в момент времени t = 6000 ч.

Ответ. 0,1358.

3.5. Время T наработки элемента на отказ распределено по закону $N(a;\sigma)$. Вероятность того, что элемент в рабочем состоянии в момент времени $t=3000$ ч, $p_1=0{,}9088$. Та же вероятность для момента времени $t=4000$ ч $p_2=0{,}7475$. Найти вероятность того, что элемент будет в рабочем состоянии в момент времени: а) t = 5000 ч; б) t = 7000 ч.

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) 0,09.

§ 4. Статистическое оценивание показателей надежности

Пусть на промежутке времени $[0; T)$ испытывается N_0 одинаковых элементов. Разобьем промежуток на n частичных промежутков одинаковой длины Δt точками $t_0 = 0, t_1, ..., t_n = T$. Пусть $N(t_i)$ – число исправных элементов в момент времени t_i, тогда $n_i = N(t_{i-1}) - N(t_i)$ – число отказавших элементов на i-м промежутке $[t_{i-1}, t_i)$. Будем предполагать, что отказы происходят в серединах промежутков $t_i^* = \dfrac{t_{i-1} + t_i}{2}$, тогда

$$f(t_i^*) = \frac{n_i}{N_0 \Delta t}, \qquad (1)$$

$$P(t_i^*) = \frac{N(t_i)}{N_0}, \qquad (2)$$

или

$$P(t_i^*) = \frac{N - \sum_{k=1}^{i} n_k}{N_0}. \qquad (3)$$

Для вычисления $\lambda(t_i^*)$ воспользуемся формулой (3) § 3, получим:

$$\lambda(t_i^*) = \frac{n_i}{N(t_i)\Delta t}. \qquad (4)$$

Иногда [1, с. 33] находят среднее число $N_{\text{ср}} = \dfrac{N(t_{i-1}) + N(t_i)}{2}$ работающих элементов и применяют формулу (5).

$$\lambda(t_i^*) = \frac{n_i}{N_{\text{ср}} \Delta t}. \qquad (5)$$

При этом для оценки среднего времени жизни $T_{\text{ср}}$ применяют формулу (6).

$$\overline{T_{\text{ср}}} = \frac{1}{N - N(t_n)} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i t_i^*, \qquad (6)$$

где $N - N(t_n)$ – число испытанных образцов;

n_i – число отказавших на промежутке $[t_{i-1}, t_i)$ образцов.

Пример 1. Из 1000 лампочек в первый месяц работы перегорело 12, а через год за месяц перегорело 8, среди оставшихся 600 лампочек. Определить, когда лампа работает менее надежно.

Решение. $\Delta t = 1$ мес. По формуле (5)

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\text{ мес.}\right) = \frac{12}{\frac{1000+988}{2}\cdot 1} = 0{,}012\ \frac{1}{\text{мес.}};$$

$$\lambda\left(12\frac{1}{2}\text{ мес.}\right) = \frac{8}{\frac{600+592}{2}\cdot 1} = 0{,}013\ \frac{1}{\text{мес.}};$$

$$\lambda\left(12\frac{1}{2}\right) > \lambda\left(\frac{1}{2}\right),$$

поэтому через год лампа работает менее надежно.

Пример 2. На испытаниях находилось $N = 100$ элементов в течении 500 ч. Найти $P(t^*)$, $f(t^*)$, $\lambda(t^*)$, $\overline{T}_{\text{ср}}$, если данные об отказах:

Интервалы времени, ч	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500
Число отказавших элементов	2	1	1	3	3

Решение. Применим формулы (1), (3), (5), $\Delta t = 100$ ч. Получим таблицу:

Интервалы времени, ч	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500
Число отказавших элементов	2	1	1	3	3
$f(t^*)$, $\frac{1}{\text{ч}}$	$\frac{2}{10^4}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{3}{10^4}$	$\frac{3}{10^4}$
$p(t^*)$	0,98	0,97	0,96	0,93	0,9
$\lambda(t^*)$, $\frac{1}{\text{ч}}$	$\frac{2}{\frac{100+98}{2}\cdot 100} =$ $= 0{,}000202$	$\frac{1}{\frac{98+97}{2}\cdot 100} =$ $= 0{,}0001025$	$\frac{1}{\frac{97+96}{2}\cdot 100} =$ $= 0{,}0001036$	$\frac{3}{\frac{96+93}{2}\cdot 100} =$ $= 0{,}0003174$	$\frac{3}{\frac{93+90}{2}\cdot 100} =$ $= 0{,}0003278$

По формуле (6) $\overline{T}_{\text{ср}} = \dfrac{1}{10}(2\cdot 50 + 1\cdot 150 + 1\cdot 250 + 3\cdot 350 + 3\cdot 450) = 290$ ч. Испытания были закончены, когда отказали 10 элементов.

Упражнения

4.1. На испытаниях находилось 100 элементов в течение а) 500 ч; б) 400 ч. Данные об отказах собраны в таблицах. Найти $p(t^*)$, $f(t^*)$, $\lambda(t^*)$, $\overline{T}_{\text{ср}}$.

а)

Интервалы времени, ч	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500
Число отказавших элементов	5	4	3	2	1

б)

Интервалы времени (час)	0–80	80–160	160–240	240–320	320–400
Число отказавших элементов	3	2	1	1	3

Ответ: а)

Интервалы времени, ч	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500
Число отказавших элементов	5	4	3	2	1
$f(t^*)$, $\frac{1}{\text{ч}}$	$\frac{5}{10^4}$	$\frac{4}{10^4}$	$\frac{3}{10^4}$	$\frac{2}{10^4}$	$\frac{1}{10^4}$
$p(t^*)$	0,95	0,91	0,88	0,86	0,85
$\lambda(t^*)$, $\frac{1}{\text{ч}}$	$5{,}1\cdot 10^{-4}$	$4{,}3\cdot 10^{-4}$	$3{,}35\cdot 10^{-4}$	$2{,}3\cdot 10^{-4}$	$1{,}17\cdot 10^{-4}$

$\overline{T}_{\text{ср}} = 183{,}33$ ч.

Ответ: б)

Интервалы времени, ч	0–80	80–160	160–240	240–320	320–400
Число отказавших элементов	3	2	1	1	3
$f(t^*),\ \frac{1}{\text{ч}}$	$\frac{3}{8000}$	$\frac{2}{8000}$	$\frac{1}{8000}$	$\frac{1}{8000}$	$\frac{3}{8000}$
$p(t^*)$	0,97	0,95	0,94	0,93	0,9
$\lambda(t^*),\ \frac{1}{\text{ч}}$	$\frac{3}{\frac{100+97}{2}\cdot 80}$	$\frac{2}{\frac{97+95}{2}\cdot 80}$	$\frac{1}{\frac{94+95}{2}\cdot 80}$	$\frac{1}{\frac{93+94}{2}\cdot 80}$	$\frac{1}{\frac{90+93}{2}\cdot 80}$

$$\overline{T}_{\text{ср}} = \frac{1}{10}(3\cdot 40 + 2\cdot 120 + 1\cdot 200 + 1\cdot 280 + 3\cdot 360) = 192 \text{ ч.}$$

4.2. Из 4000 СВЧ-диодов за месяц испытаний перегорело 5 диодов, а через полгода из оставшихся 3970 диодов за месяц перегорело 3. Определить, когда диод работает более надежно.

Ответ: через полгода.

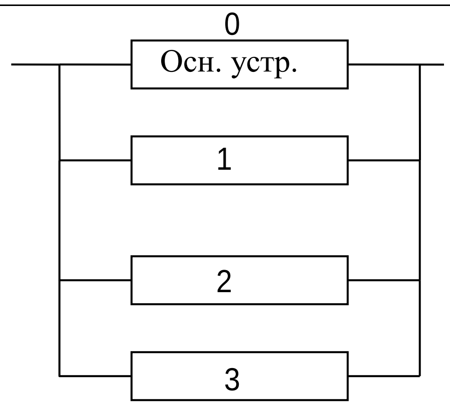
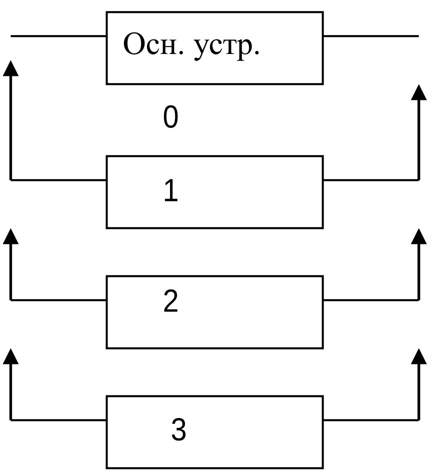
§ 5. Показатели надежности для сложных систем

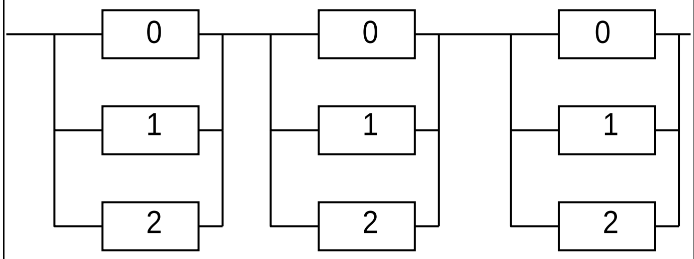
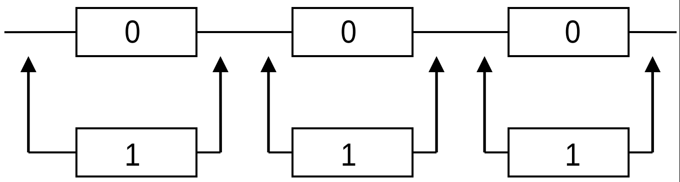
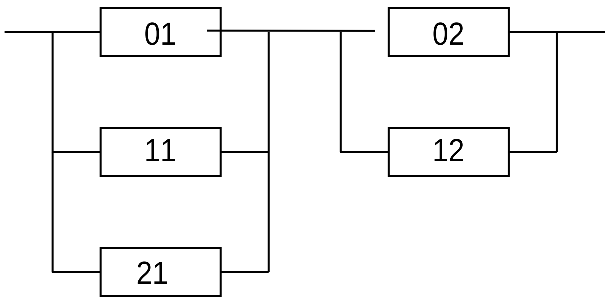
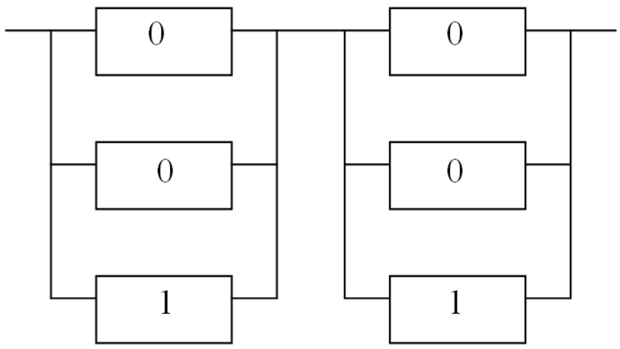
5.1. Техническая система может быть невосстанавливаемой и восстанавливаемой. В последнем случае она продолжает работу после устранения отказа. При анализе работы таких систем рассматривают потоки случайных событий (потоки отказов и потоки восстановлений).

Для повышения надежности системы применяют структурное резервирование, когда в систему включают резервные единицы, которые, в случае отказа основного устройства, продолжают выполнять его функции. Резервирование может быть общим и поэлементным. Отношение числа n_p резервных элементов к числу n_0 основных называется **кратностью резервирования**.

Можно также резервировать элементы подсистем в системе. Кратность в различных резервируемых подсистемах может быть различной. Если она одинакова, то ее называют **кратностью резервирования всей системы.**

Пример 1.

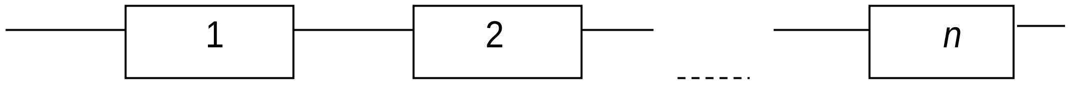
Тип резервирования	Логическая схема	Комментарий
Общее резервирование, постоянно включенный резерв		Целая кратность 3
Резервирование замещением		Целая кратность 3

Тип резервирования	Логическая схема	Комментарий
Поэлементное, с постоянным резервом		Целая кратность 2
Поэлементное, замещением		Целая кратность 1
Поэлементное, с постоянным резервом		Для элемента 01 – целая кратность 2, для элемента 02 – целая кратность 1
Поэлементное, с постоянным резервом		Дробная кратность $\frac{1}{2}$

Замечание. В случае резервирования замещением резервные элементы подключаются после отказа соответствующих основных.

Элементы $\boxed{01}$, $\boxed{02}$, $\boxed{0}$, в таблице соответствуют основному устройству.

5.2. Рассмотрим нерезервированную невосстанавливаемую систему, логическая модель надежности которой:



Тогда функция надежности системы

$$P_T(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t), \tag{1}$$

где $p_i(t)$ – функция надежности i-го элемента.

Если $\lambda(t)$ и $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ функции интенсивности отказов системы и ее элементов, то, используя формулу (8) § 3, получим:

$$p_T(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt} = e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\right)dt} \Rightarrow \lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t), \tag{2}$$

то есть при последовательном соединении элементов интенсивности их отказов суммируются и дают интенсивность отказов системы.

В частности, если $\lambda_i(t) = \lambda_i - \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (распределения $\text{Ex}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$), то из формулы (2) следует:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \text{const}, \tag{3}$$

то есть время жизни системы также распределено экспоненциально, при этом среднее время жизни

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}. \tag{4}$$

Пример 2. Нерезервированная система состоит из 3-х последовательно соединенных элементов. Время жизни элементов – экспоненциальное: $\text{Ex}(0{,}0001\ \frac{1}{\text{ч}})$, $\text{Ex}(0{,}00008\ \frac{1}{\text{ч}})$, $\text{Ex}(0{,}00007\ \frac{1}{\text{ч}})$. Определить показатели надежности системы: λ, $T_{\text{ср}}$, $p(t)$, $f(t)$.

Решение. По формулам (1)–(4):

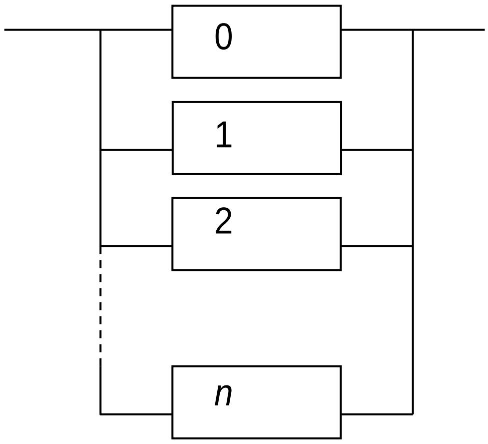
$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0{,}00025\ \frac{1}{\text{ч}};$$

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{0{,}00025} = 4000\ \text{ч};$$

$$f(t) = 0,00025e^{-0,00025t};$$

$$p(t) = e^{-0,00025t}.$$

5.3. Рассмотрим резервированную невосстанавливаемую систему с постоянно включенным резервом кратности n:



Тогда функция ненадежности системы

$$F_T(t) = \prod_{i=0}^{n} F_i(t) = \prod_{i=0}^{n} (1 - p_i(t)), \tag{5}$$

где $F_i(t)$, $i = 0, ..., n$ – функции ненадежности элементов.

Поэтому

$$p_T(t) = 1 - \prod_{i=0}^{n} (1 - p_i(t)), \tag{6}$$

где $p_T(t)$, $p_i(t)$, $i = 0, ..., n$ – функции надежности системы и ее элементов.

$$f_t(t) = -p'_T(t) = \sum_{i=0}^{n} (1 - p_0(t)) \cdot ... \cdot f_i(t) \cdot ... \cdot (1 - p_n(t)); \tag{7}$$

$$\lambda_t(t) = \frac{f_T(t)}{p_T(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} (1 - p_0(t)) \cdot ... \cdot f_i(t) \cdot ... \cdot (1 - p_n(t))}{1 - \prod_{i=0}^{n} (1 - p_i(t))}. \tag{8}$$

Замечание. Из формулы (8) видно, что если время жизни элементов распределено по экспоненциальным законам, то время жизни системы не будет экспоненциальным.

Предположим, что $p_i(t)=e^{-\lambda t}, \forall i$, тогда $p(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^{n+1}$. Найдем $T_{\text{ср}}$. По формуле (8) § 3:

$$T_{\text{ср}}=\int_0^{+\infty} p(t)dt=\int_0^{+\infty}(1-(1-e^{-\lambda t})^{n+1})dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 1-e^{-\lambda t}=x \\ t=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x) \\ dt=\dfrac{dx}{\lambda(1-x)} \end{array}\right|=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\frac{1-x^{n+1}}{1-x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^1(1+x+\ldots+x^n)dx= \qquad (9)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Резервирование естественно предполагает повышение надежности системы. Выигрыш от введения резерва можно определить введя коэффициенты:

k_T – выигрыш в надежности по $T_{\text{ср}}$:

$$k_T=\frac{T_{\text{ср резерв}}}{T_{\text{ср нерезерв}}}; \qquad (10)$$

k_p – выигрыш в надежности по вероятности безотказной работы $p(t)$:

$$k_p=\frac{p_{\text{резерв}}(t)}{p_{\text{нерезерв}}(t)}; \qquad (11)$$

k_λ – выигрыш в надежности по интенсивности отказов $\lambda(t)$:

$$k_\lambda=\frac{\lambda_{\text{нерезерв}}}{\lambda_{\text{резерв}}}. \qquad (12)$$

Пример 3. Резервированная невосстанавливаемая система состоит из 3-х параллельно соединенных элементов (постоянно включенный резерв кратности 2). Время жизни каждого элемента $\text{Ex}(\lambda)$. Определить:

1) показатели надежности системы: $p(t),\ f(t), \lambda(t),\ T_{\text{ср}}$;

2) выигрыш в надежности k_T , k_p , k_λ .

Решение. По формуле (6) $p(t) = 1-(1-e^{-\lambda t})^3$. Поэтому

$$p(t) = 3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t};$$

$$f(t) = -p'(t) = (3e^{-\lambda t} - 6e^{-2\lambda t} + 3e^{-3\lambda t})\lambda;$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{(3e^{-\lambda t} - 6e^{-2\lambda t} + 3e^{-3\lambda t})\lambda}{3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}} = \frac{(3 - 6e^{-\lambda t} + 3e^{-2\lambda t})\lambda}{3 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}}.$$

По формуле (9)

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6\lambda}.$$

2) По формулам (10)–(12):

$$k_T = \frac{T_{\text{ср резерв}}}{T_{\text{ср нерезерв}}} = \frac{\frac{11}{6\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{11}{6};$$

$$k_p = \frac{p_{\text{резерв}}}{p_{\text{нерезерв}}} = \frac{3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = 3 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t};$$

$$k_\lambda = \frac{\lambda_{\text{нерезерв}}}{\lambda_{\text{резерв}}} = \frac{\lambda}{\lambda(t)} = \frac{3 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}}{3 - 6e^{-\lambda t} + 3e^{-2\lambda t}}.$$

Из расчетов видно, что $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda$ и $\lim\limits_{t\to\infty} k_\lambda = 1$; $\lim\limits_{t\to\infty} k_p = 3$.

Замечание. Рассмотрим формулу (6) и предположим, что $p_i(t) = p_э(t),\ \forall\, i$, тогда $p_{\text{сист}}(t) = 1-(1-p_э(t))^{n+1}$; $1-p_{\text{сист}}(t) = (1-p_э(t))^{n+1}$, откуда, прологарифмировав, получим формулу (13):

$$n = \frac{\ln(1-p_{\text{сист}})}{\ln(1-p_э)} - 1, \tag{13}$$

которую можно использовать для нахождения кратности резервирования, которая бы обеспечивала необходимые показатели надежности системы.

Пример 4. Время наработки элемента на отказ $\text{Ex}(10^{-3}\frac{1}{\text{ч}})$. Определить кратность его резервирования такими же элементами, чтобы вероятность безотказной работы системы в течение t = 1000 ч была 0.9.

Решение. $p_{\text{сист}}(1000) = 0{,}9$. $p_{\text{элемента}} = e^{-\lambda t}$. $p_{\text{элемента}}(1000) = e^{-1} = 0{,}36788$.

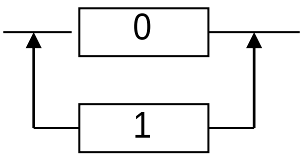
Тогда по формуле (13) $n = \dfrac{\ln(1-0{,}9)}{\ln(1-0{,}36788)} - 1 = 4{,}02$.

Округляя в большую сторону, получим $n = 5$.

Замечание. Необходимо отметить, что с ростом t кратность резервирования возрастает. Например, для вероятности p = 0,9 и распределения $\text{Ex}(\lambda)$

$$n = \frac{\ln(1-0{,}9)}{\ln(1-e^{-\lambda t})} - 1 \approx \ln 10 \cdot e^{\lambda t} - 1.$$

5.4. Рассмотрим резервированную невосстанавливаемую систему (резерв кратности 1, замещением):



Пусть $f_0(t)$, $f_1(t)$ – функции плотности вероятностей распределения времени наработки на отказ элементов; $p_0(t)$, $p_1(t)$ – функции надежности элементов, $f(t)$, $p(t)$ – аналогичные функции для системы. Тогда T – время наработки системы на отказ: $T = T_0 + T_1$, где T_0, T_1 – время наработки на отказ элементов. Найдем $p(t)$. Рассмотрим промежуток $[0, t)$ и разобьем его на n частичных промежутков длины $\Delta\tau$. Отказ 0-го элемента может произойти на любом из этих частичных промежутков. Пусть c_i – точка отказа на i-м промежутке. Тогда по формуле полной вероятности

$$p(t) = P(T > t) = p_0(t) + \lim_{\Delta\tau\to 0}(f_0(c_1)\Delta\tau \cdot p_1(t - c_1) + f_0(c_2)\Delta\tau \cdot p_1(t - c_2) + \ldots \tag{10}$$

$$+ f_0(c_n)\Delta\tau \cdot p_1(t - c_n)) = p_0(t) + \int_0^t f_0(\tau)\, p_1(t-\tau)\, d\tau$$

или

$$p(t) = p_0(t) + (f_0 * p_1)(t), \tag{11}$$

где $f_0 * p_1$ – свертка функций $f_0(t), p_1(t)$.

Далее

$$f(t) = -p_t'(t) = -(p_0(t) + \int_0^t f_0(\tau) p_1(t-\tau)d\tau)_t' =$$

$$= f_0(t) - f_0(\tau)\cdot p_1(t-\tau)\Big|_{\tau=t} - \int_0^t (f_0(\tau)p_1(t-\tau))_t' d\tau =$$

$$= f_0(t) - f_0(t) + \int_0^t f_0(\tau) f_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_0(\tau) f_1(t-\tau)d\tau .$$

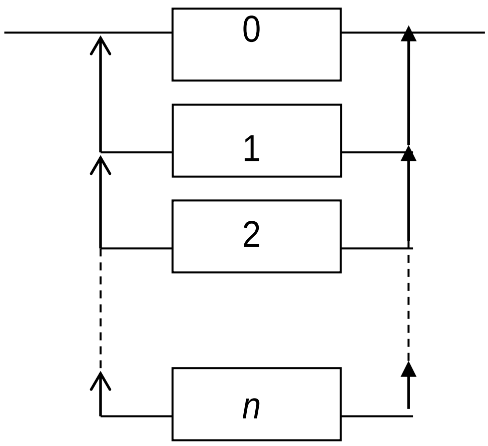
Таким образом

$$f(t) = \int_0^t f_0(\tau) f_1(t-\tau)d\tau , \tag{12}$$

или

$$f(t) = (f_0 * f_1)(t) . \tag{13}$$

Аналогично, для резервирования замещением кратности n:



получаем формулы (14), (15):

$$p(t) = p_0(t) + (f_0 * p_1)(t) + (f_0 * f_1 * p_2)(t) + ... + (f_0 * ... * f_{n-1} * p_n)(t) . \tag{14}$$

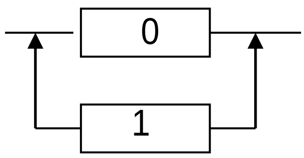
$$f(t) = (f_0 * ... * f_{n-1} * f_n)(t) . \tag{15}$$

$p(t)$ можно находить такие же и по формуле (16):

$$p(t) = 1 - F_T(t) = 1 - \int_0^t (f_0 * ... * f_n)(x)dx . \tag{16}$$

Пример 5. Рассмотрим резервированную невосстанавливаемую систему (резерв замещением, кратности 1):

$\mathrm{Ex}(10^{-2}\frac{1}{\text{ч}})$



$\mathrm{Ex}(2\cdot 10^{-2}\frac{1}{\text{ч}})$.

Найдем показатели надежности $p(t), f(t), \lambda(t), T_{\text{ср}}$ системы.

$$f_0(t)=\lambda_0 e^{-\lambda_0 t};\ \ f_1(t)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t};\ \ p_0(t)=e^{-\lambda_0 t};\ \ p_1(t)=e^{-\lambda_1 t};$$

$$p(t)=e^{-\lambda_0 t}+\int_0^t \lambda_0 e^{-\lambda_0 \tau}\cdot e^{-\lambda_1 (t-\tau)}d\tau = e^{-\lambda_0 t}+\int_0^t \lambda_0 e^{-\lambda_1 t}\cdot e^{(\lambda_1-\lambda_0)\tau}d\tau =$$

$$=e^{-\lambda_0 t}+\lambda_0 e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}e^{(\lambda_1-\lambda_0)\tau}\Big|_0^t = e^{-\lambda_0 t}+\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}\cdot(e^{(\lambda_1-\lambda_0)t}-1)=$$

$$=e^{-\lambda_0 t}+\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}(e^{-\lambda_0 t}-e^{-\lambda_1 t})=\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}e^{-\lambda_0 t}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}e^{-\lambda_1 t};$$

$$f(t)=-p'(t)=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}(e^{-\lambda_0 t}-e^{-\lambda_1 t});$$

$$T_{\text{ср}}=\int_0^{+\infty} p(t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_0}e^{-\lambda_0 t}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}\right)dt=$$

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_0(\lambda_1-\lambda_0)}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_0)}=\frac{\lambda_1+\lambda_0}{\lambda_0\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}.$$

Таким образом,

$$p_{\text{резер}}(t)=2e^{-\frac{t}{100}}-e^{-\frac{t}{50}},$$

$$f(t)=2\cdot 10^{-2}\left(e^{-\frac{t}{100}}-e^{-\frac{t}{50}}\right)\left(\frac{1}{\text{ч}}\right),$$

$$T_{\text{ср}} = 150 \text{ ч}, \; \lambda_{\text{резер}}(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{100}}}{2 - e^{-\frac{t}{100}}}.$$

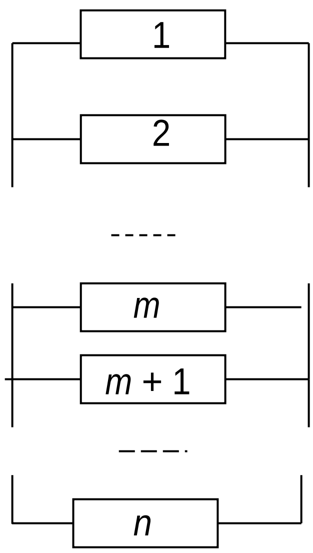
Найдем еще выигрыши k_T, k_p, k_λ в надежности системы по T_{cp}, $p(t)$, $\lambda(t)$ при сравнении ее с нерезервированной системой.

$$k_T = \frac{T_{\text{ср резерв}}}{T_{\text{ср нерезерв}}} = \frac{150}{\frac{1}{\lambda_0}} = \frac{150}{100} = 1{,}5;$$

$$k_p = \frac{p(t)_{\text{резерв}}}{p(t)_{\text{нерезерв}}} = \frac{2e^{-\frac{t}{100}} - e^{-\frac{t}{50}}}{e^{-\frac{t}{100}}} = 2 - e^{-\frac{t}{100}};$$

$$k_\lambda = \frac{\lambda_{\text{нерезерв}}}{\lambda_{\text{резерв}}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{резер}}} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{100}}}{2 - e^{-\frac{t}{100}}}} = \frac{2 - e^{-\frac{t}{100}}}{2 - 2e^{-\frac{t}{100}}}.$$

5.5. Рассмотрим резервированную систему из n элементов одинаковой надежности, для работы которой необходимо, чтобы работало не менее m элементов:



(17)

Тогда функцию надежности $p_c(t)$ системы найдем по формуле полной вероятности (18).

$$p_c(t) = C_n^m p^m(t)(1 - p(t))^{n-m} + C_n^{m+1} p^{m+1}(t)(1 - p(t))^{n-m-1} + \ldots + p^n(t) =$$
$$= \sum_{k=m}^{n} C_n^k \cdot p^k(t)(1 - p(t))^{n-k}, \tag{18}$$

где $p(t)$ – функция надежности каждого элемента.

Найдем функцию плотности вероятностей распределения времени наработки на отказ

$$f_c(t) = -p_c'(t) = mC_n^m \cdot p^{m-1}(1-p)^{n-m} \cdot f(t), \tag{19}$$

где $f(t)$ – функция плотности вероятностей для каждого элемента.

Действительно:

$$f_c(t) = -p_c'(t) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k \cdot k \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k} \cdot f(t) - \sum_{k=m}^{n-1} C_n^k p^k (n-k)(1-p)^{n-k-1} \cdot f(t) =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k} \cdot f(t) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} \cdot f(t) =$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot p^{m-1}(1-p)^{n-m} \cdot f(t) + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k} \cdot f(t) -$$

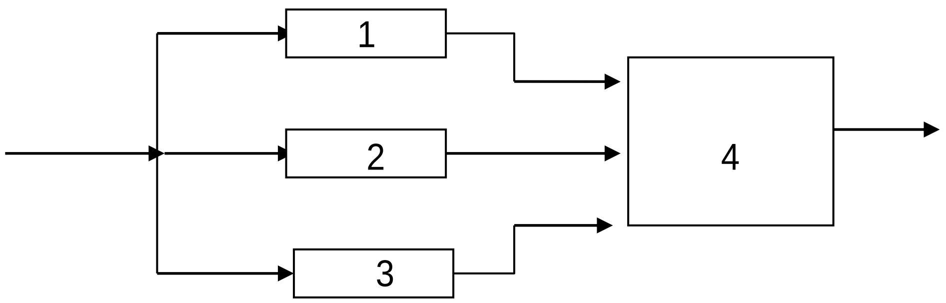
$$- \sum_{k=m}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k-1} \cdot f(t) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot p^{m-1}(1-p)^{n-m} \cdot f(t) =$$

$$= m \cdot C_n^m p^{m-1}(1-p)^{n-m} \cdot f(t). \tag{20}$$

Данный тип резервирования используется в цифровых устройствах, когда сигнал в двоичном коде (логическое 0 или 1) подается на систему вида (17), состоящую из нечетного числа элементов одинаковой надежности.

Для нормальной работы системы необходимо, чтобы сигнал проходил без искажений большинство элементов (закон большинства, или мажоритарный закон). На практике часто рассматривают системы «2 из 3-х» или «3 из 5».

Пример 6. Рассмотрим систему «2 из 3-х»:



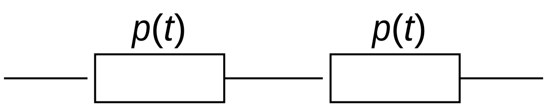
Сигналы на входе и выходе элементов – в двоичном коде. Сигнал на выходе четвертого элемента формируется по мажоритарному принципу из 3 входящих и равен значению большинства. Элементы 1, 2, 3 – равнонадежны: $p_1(t) = p_2(t) = p_3(t) = p(t)$.

Для нормальной работы такой системы необходимо и достаточно, чтобы работали без искажений хотя бы 2 из 3 первых элементов и 4-й элемент.

Тогда, используя формулу (18), получим

$$p_c(t) = (p^3(t) + C_3^2 p^2(t)(1 - p(t)) \cdot p_4(t) = (3p^2(t) - 2p^3(t)) \cdot p_4(t).$$

Предположим, что $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = e^{-\lambda t}$ и найдем выигрыш k_p в надежности по вероятности безотказной работы системы при сравнении ее с системой



$$k_p = \frac{p_c(t)}{p^2(t)} = \frac{3p^3 - 2p^4}{p^2} = 3p - 2p^2.$$

Решим неравенство $k_p > 1;\ 3p - 2p^2 > 1$.

$2p^2 - 3p + 1 < 0 \Rightarrow p \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, т.е. при $p(t) > \frac{1}{2}$ надежность системы, по сравнению с нерезервированной, больше. Найдем интервал времени:

$$e^{-\lambda t} > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le t < \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Найдем $T_{\text{ср}}, \lambda_c$.

$$T_{\text{ср}} = \int\limits_0^{+\infty} p(t)dt = \int\limits_0^{+\infty} (3p^3 - 2p^4)dt = \int\limits_0^{+\infty} (3e^{-3\lambda t} - 2e^{-4\lambda t})dt = \frac{1}{2\lambda}.$$

$$\lambda_c(t) = -\frac{p_c'(t)}{p_c(t)} = -\frac{(3e^{-3\lambda t} - 2e^{-4\lambda t})'}{3e^{-3\lambda t} - 2e^{-4\lambda t}} = \frac{(9 - 8e^{-\lambda t})\lambda}{3 - 2e^{-\lambda t}};$$

$$\lambda_c(0) = \lambda \text{ и } \lim_{t\to\infty} \lambda_c(t) = 3\lambda.$$

Упражнения

5.1. Нерезервированная невосстанавливаемая система состоит из 3 последовательно соединенных элементов. Время жизни элементов экспоненциальное: $\text{Ex}(0,0002\frac{1}{\text{ч}})$, $\text{Ex}(0,0003\frac{1}{\text{ч}})$, $\text{Ex}(0,0005\frac{1}{\text{ч}})$. Определить показатели надежности системы: $p(t), f(t), \lambda(t), T_{\text{ср}}$. Определить время, в течение которого система будет исправна с вероятностью $p = 0,9$.

5.2. Резервированная невосстанавливаемая система состоит из 2-ух параллельно соединенных элементов (постоянно включенный резерв). Время жизни каждого элемента $\text{Ex}(0,0005\frac{1}{\text{ч}})$. Определить:

а) показатели надежности системы: $p(t), f(t), \lambda(t), T_{\text{ср}}$;

б) выигрыш в надежности k_T, k_p, k_λ при t = 2000 ч.

Ответ.

а) $p(t) = 2e^{-0,0005t} - e^{-0,001t}$,

$f(t) = 0,001(e^{-0,0005t} - e^{-0,001t})$,

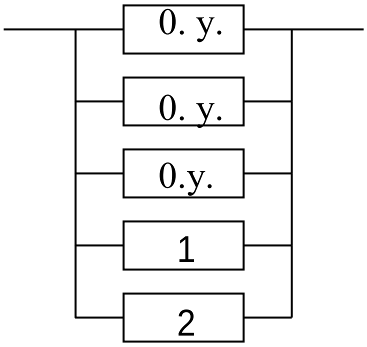
$\lambda = \dfrac{0,001(e^{0,0005t} - 1)}{2e^{0,0005t} - 1}$,

$T_{\text{ср}} = 3000$ ч, $T_{\text{ср}}$ (для одного элемента) = 2000 ч.

5.3. Нерезервированная система состоит из 2-х последовательно соединенных элементов. Время жизни каждого $U(0; 1000\text{ ч})$. Найти показатели надежности системы. Найти $T_{\text{ср}}$.

5.4. Невосстанавливаемая система состоит из 2-х параллельно соединенных элементов. Время жизни каждого $U(0; 1000\text{ ч})$. Найти показатели надежности системы. Найти $T_{\text{ср}}$.

5.5. Система состоит из пяти параллельно соединенных элементов. Время наработки на отказ каждого $\mathrm{Ex}\left(0{,}001\ \frac{1}{ч}\right)$. Для нормальной работы системы необходимо, чтобы работали хотя бы 3 из 5 элементов:



(резерв кратности $\frac{2}{3}$).

Пусть T – время наработки на отказ системы. Написать формулы для $p(t)$, $f(t)$, найти $T_{ср}$.

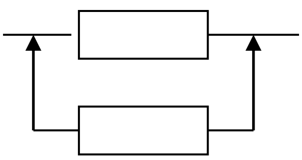
Ответ: $T_{ср} = 783$ ч.

5.6. Время наработки элемента на отказ $\mathrm{Ex}\left(10^{-3}\ \frac{1}{ч}\right)$. Определить кратность его резервирования такими же элементами, чтобы вероятность безотказной работы системы в течение t = 1500 ч была равна 0,9.

Ответ: 9.

5.7. Рассмотрим резервированную систему (резерв замещением кратности 1):

$\mathrm{Ex}\left(10^{-3}\ \frac{1}{ч}\right)$



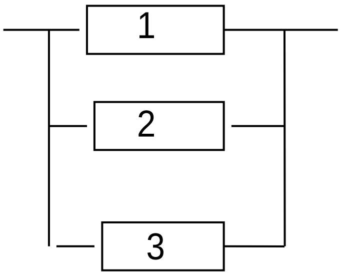
$\mathrm{Ex}\left(10^{-3}\ \frac{1}{ч}\right)$

а) Найти показатели надежности.

б) Определить выигрыш в надежности k_T, k_p, k_λ при t = 2000 ч.

Ответ: $k_T = 2$, $k_\lambda = 1{,}5$, $k_p = 3$, $T_{ср} = 2000$ ч.

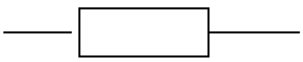
5.8. Система состоит из трех параллельно соединенных элементов. Время наработки на отказ каждого $\mathrm{Ex}\left(10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$. Для нормальной работы системы необходимо, чтобы работало хотя бы 2 элемента из 3-х:



а) Найти показатели надежности работы системы.

б) Определить выигрыш в надежности k_p при сравнении ее с системой

$\mathrm{Ex}\left(10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$



Ответ: $k_p = 3 \cdot e^{-0,001t} - 2 \cdot e^{-0,002t}$.

§ 6. **Гамма-функция и ее свойства**

Определение 1. Несобственный интеграл

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx, \qquad (1)$$

где $z>0$, называется эйлеровым интегралом 2-ого рода, а функция $\Gamma(z)$ переменной z называется гамма-функцией Эйлера. При этом функция

$$I(z,t)=\frac{\int_0^t x^{z-1}e^{-x}dx}{\Gamma(z)} \qquad (2)$$

называется неполной гамма-функцией.

Замечание. Проинтегрируем по частям интеграл (1):

$$\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx=\left|\begin{array}{l} u=e^{-x}\Rightarrow du=-e^{-x} \\ dv=x^{z-1}dx\Rightarrow v=\frac{1}{z}x^z \end{array}\right|=\frac{1}{z}\left(e^{-x}x^z\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x^z e^{-x}dx\right)=\frac{1}{z}\cdot\Gamma(z+1).$$

Таким образом,

$$\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z),\ \forall z>0. \qquad (3)$$

Так как $\Gamma(1)=1$, то из формулы (3) следует:

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,\ \Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2!\ \Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2!=3!\ \ldots$$

$$\Gamma(n)=(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=(n-1)\cdot(n-2)!=(n-1)!$$

Таким образом,

$$\Gamma(n)=(n-1)!. \qquad (4)$$

Еще одно соотношение для функции $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \qquad (5)$$

Поэтому при $z=\frac{1}{2}$ получим:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Далее, используя формулу (3), получим:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\ldots=$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

То есть

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi},\ n\in N. \tag{6}$$

Замечание. Перепишем формулу (3) в виде:

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}, \tag{7}$$

что позволяет доопределить функцию $\Gamma(z)$ для отрицательных значений z.

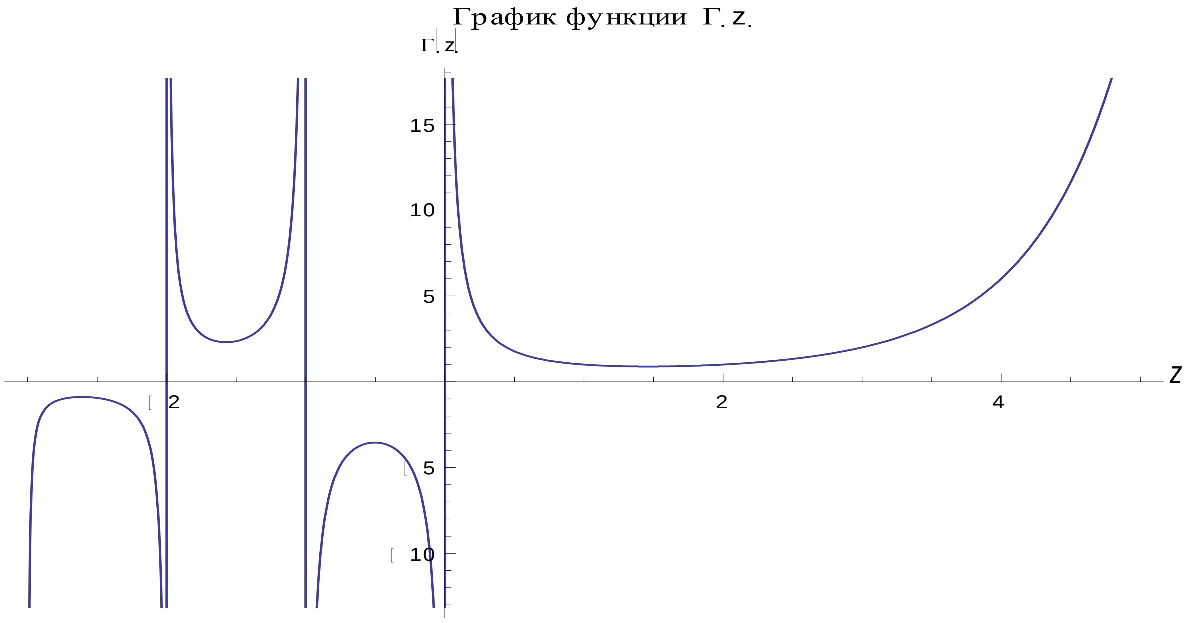


Рис. 1. График функции $\Gamma(z)$

Пример 1. Найти $\Gamma\left(3\frac{1}{2}\right)$.

Решение. По формуле (6):

$$\Gamma\left(3\frac{1}{2}\right)=\frac{(2\cdot 3-1)!!}{2^3}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{5!!}{8}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

Упражнения

6.1. Вычислить 1) $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)$; 2) $\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)$, если а) $\alpha=0{,}2$; б) $\alpha=0{,}4$.

6.2. Проверить справедливость формулы $\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}$ при $z=2;\ \frac{5}{2};\ 3$.

6.3. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)\Gamma(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)\Gamma(x)$;

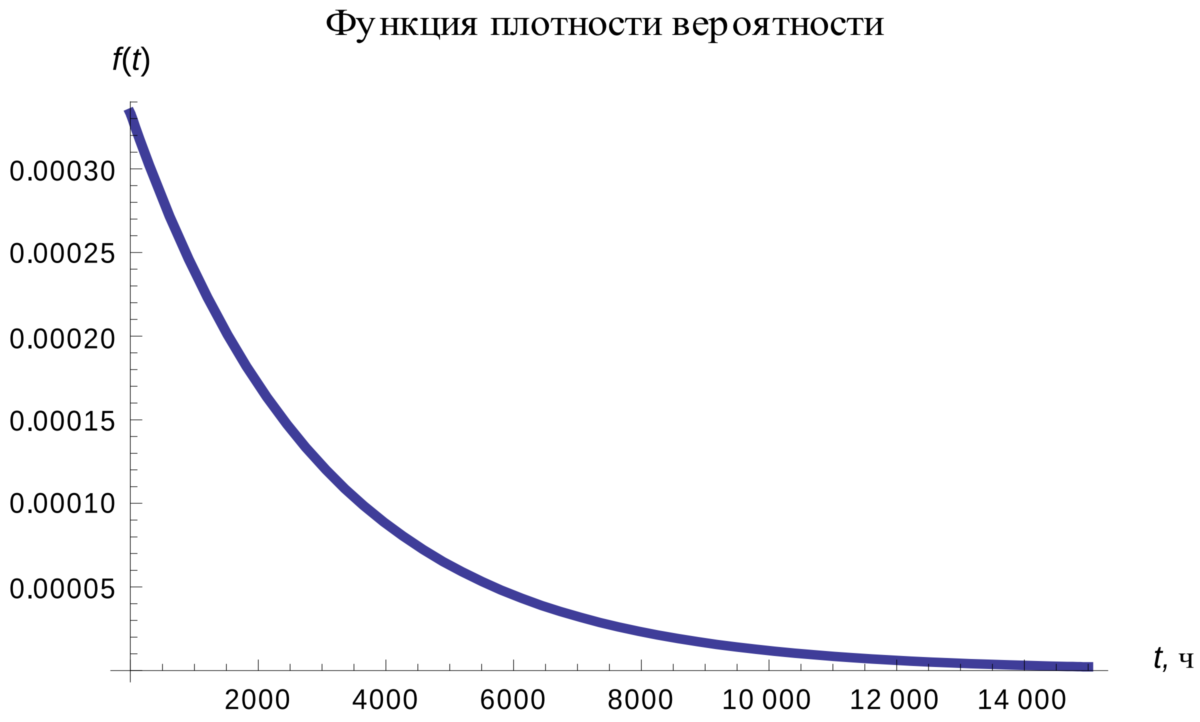
в) $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)\Gamma(x)$.

Ответ: а) –1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{6}$.

§ 7. Некоторые законы распределения времени наработки на отказ

7.1. Экспоненциальный закон $\mathrm{Ex}(\lambda)$. Подробно рассмотрен в §§ 2, 3.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t};\ p(t) = e^{-\lambda t};\ \lambda(t) = \lambda;\ f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t};\ T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}.$$



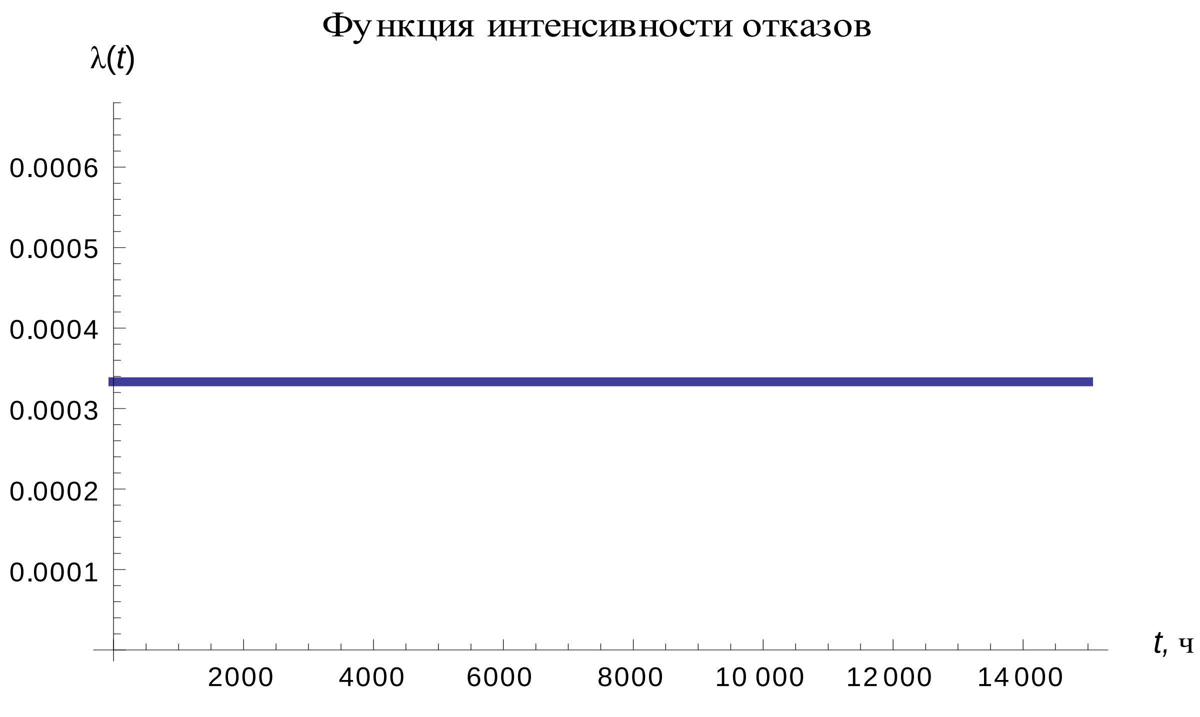


Рис. 1. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для $\mathrm{Ex}\left(\frac{1}{3000}\,\frac{1}{\text{ч}}\right)$

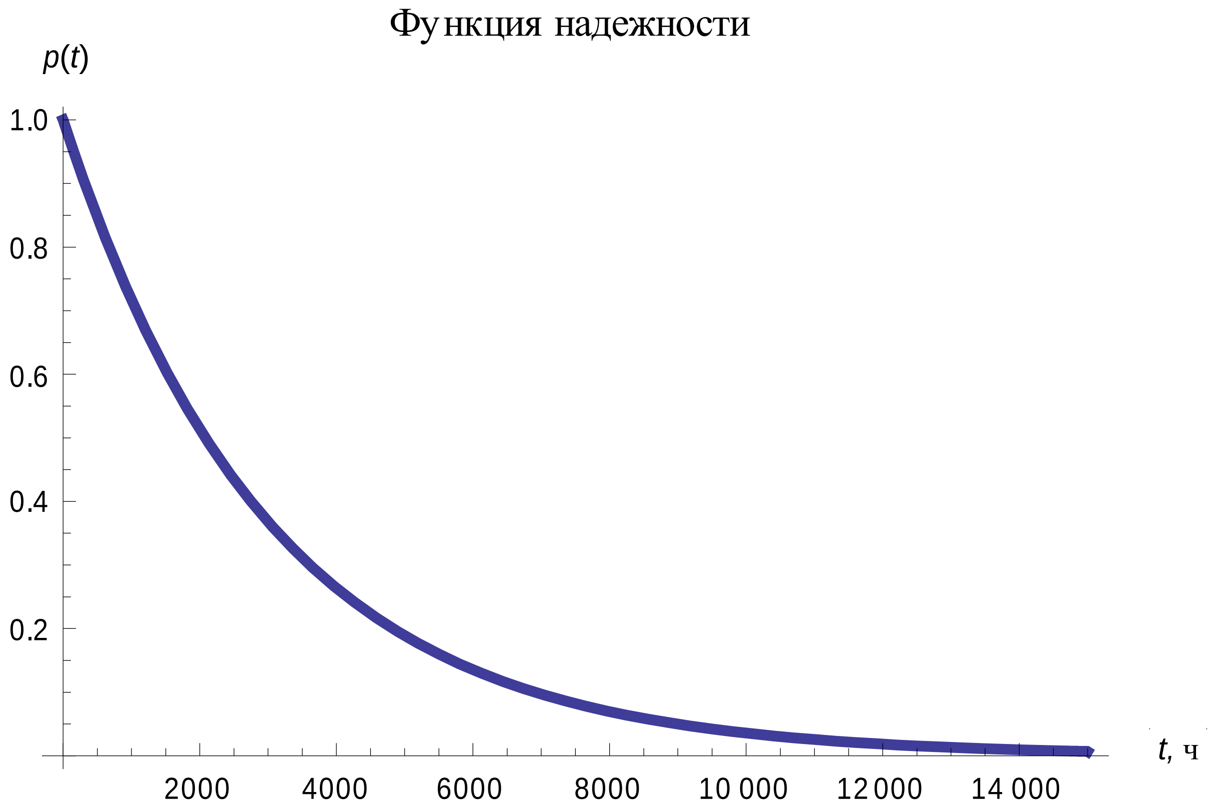


Рис. 1 (Окончание)

7.2. Нормальный закон $N(a;\sigma)$; $3\sigma < a$. Подробно рассмотрен в §§ 2, 3.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(t) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right),$$

$$p(t) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right); \ \lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}; \ T_{\text{ср}} = a.$$

7.3. Распределение Рэлея $R(\lambda)$.

Определение 1. Случайная величина T называется распределенной по закону Рэлея $R(\lambda)$, если ее функция распределения

$$F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^2}; \ \lambda > 0 \text{ – параметр распределения.} \quad (1)$$

Замечание.

$$p(t) = 1 - F(t) = e^{-(\lambda t)^2} \text{ – функция надежности,} \quad (2)$$

$$f(t) = F'(t) = 2\lambda^2 t e^{-(\lambda t)^2} \text{ – функция плотности распределения вероятностей,} \quad (3)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = 2\lambda^2 t \text{ – функция интенсивности отказов.} \quad (4)$$

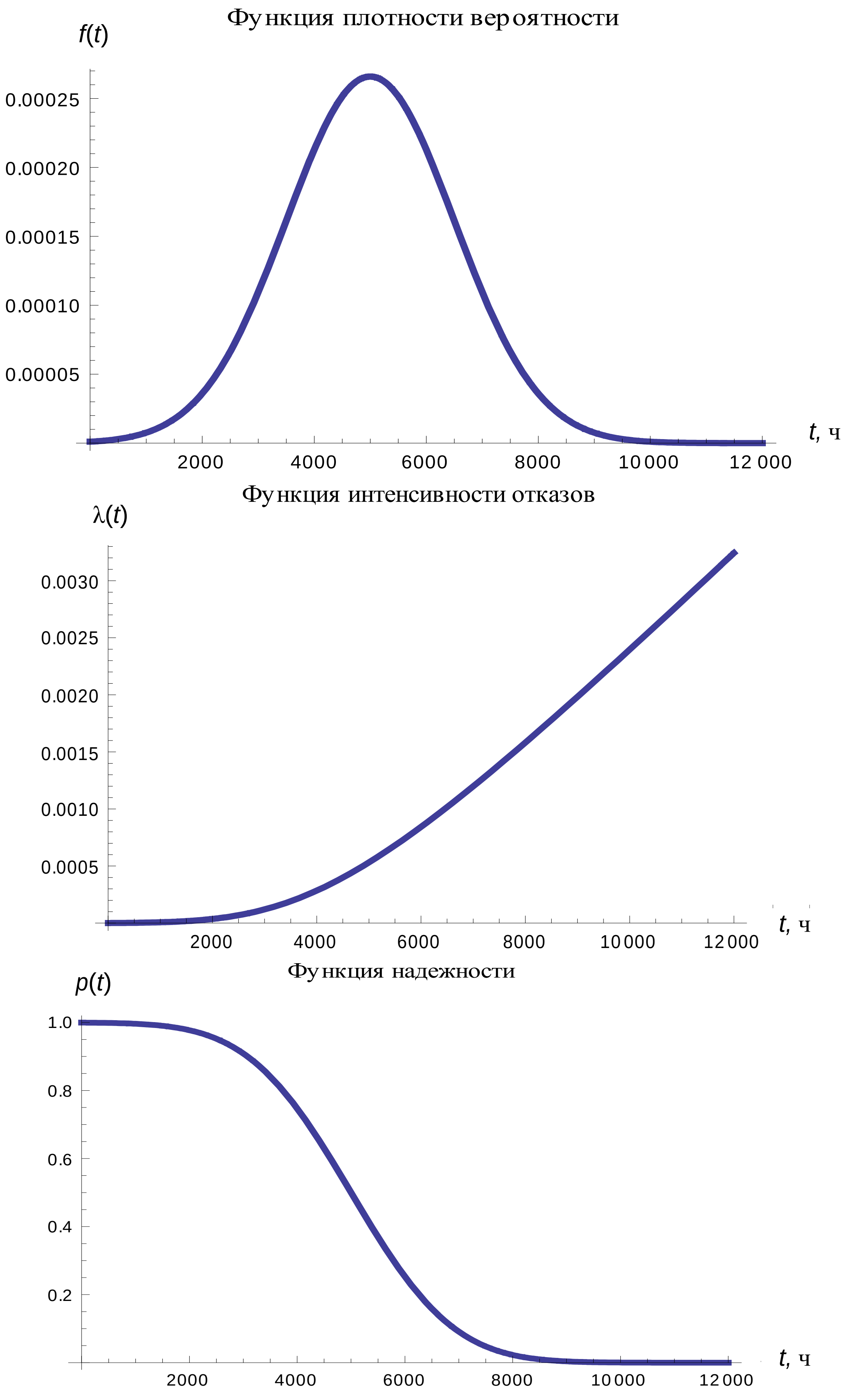


Рис. 2. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения N(5000 ч; 1500 ч)

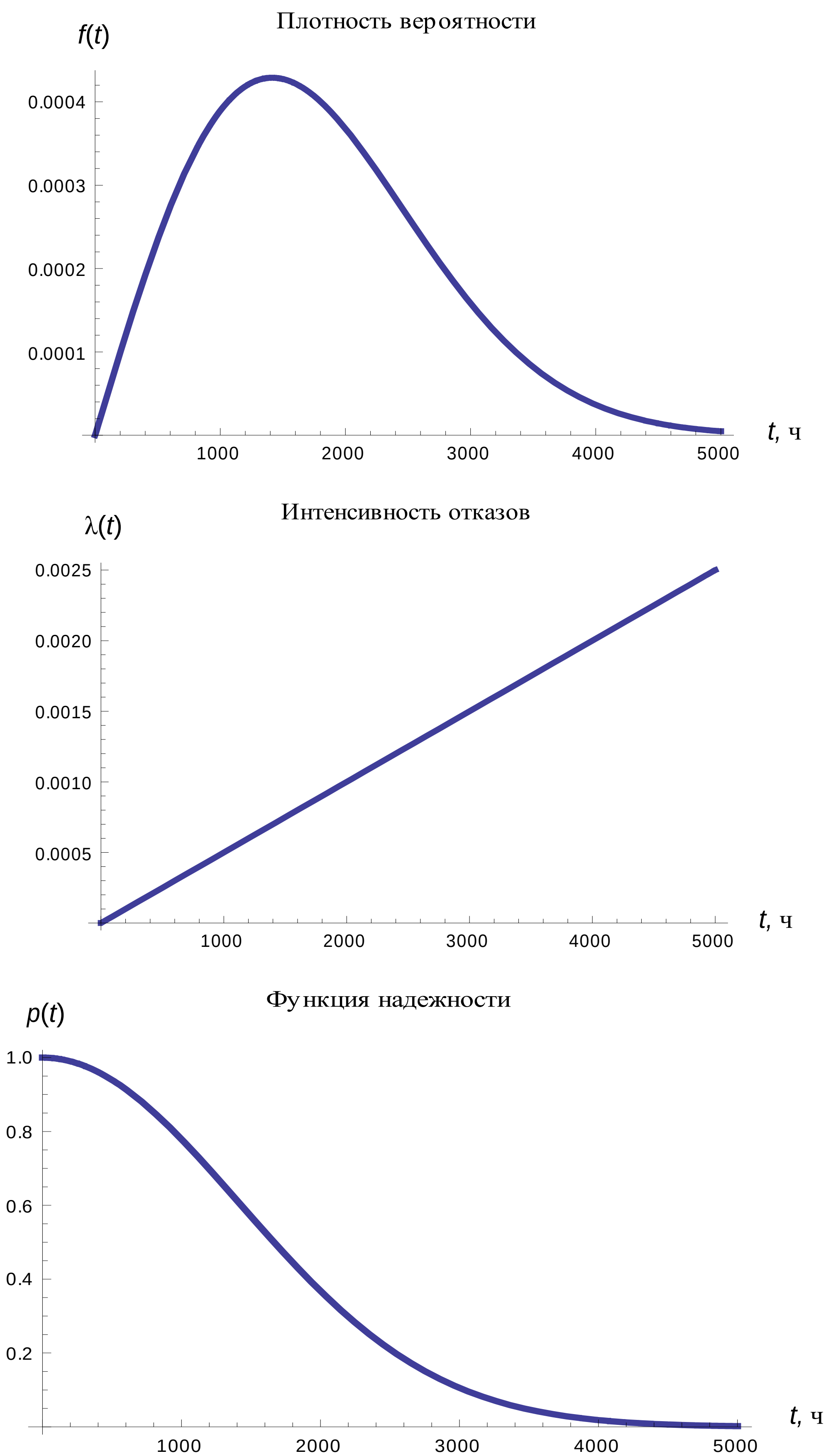


Рис. 3. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для $R\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$

График $\lambda(t)$ в распределении $R(\lambda)$ прямо пропорционально зависит от t. Поэтому этот закон применяют для исследования систем с ярко выраженным эффектом старения.

Так как $p'(t) = -f(t)$, то точка локального максимума для функции $y = f(t)$ $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ будет точкой перегиба для функции $p(t)$.

Найдем еще $M(T)$ и $D(T)$. По формуле (9) § 3

$$M(t) = T_{cp} = \int_0^{+\infty} p(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)^2} d(\lambda t) = \left|x = \lambda t\right| = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

так как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ – интеграл Пуассона. Таким образом,

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}. \qquad (5)$$

По формуле (10) § 3

$$D(T) = \int_0^{+\infty} 2t \cdot p(t)dt - M^2(T) = \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-(\lambda t)^2} dt - \frac{\pi}{4\lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)^2} d(\lambda t)^2 - \frac{\pi}{4\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} e^{-(\lambda t)^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\pi}{4\lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\pi}{4\lambda^2} = \frac{4-\pi}{4\lambda^2}.$$

Таким образом, $D(T) = \frac{4-\pi}{4\lambda^2}$. (6)

Пример 1. Время *T* наработки системы на отказ распределено по закону $R(\lambda)$. При этом интенсивность отказов $\lambda(t)$ при t = 1000 ч равна $\lambda(1000) = \frac{1}{500}\left(\frac{1}{\text{ч}}\right)$.

Найти:
1) вероятность безотказной работы системы в течение 500 ч;
2) $f(500)$, $\lambda(500)$;
3) $T_{\text{ср}}$.

Решение.

$$\lambda(1000) = 2\lambda^2 \cdot 1000 = \frac{1}{500} \Rightarrow \lambda^2 = 10^{-6};\ \lambda = 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}.$$

Тогда:

1) $p(500) = e^{-(\lambda \cdot 500)^2} = e^{-\frac{1}{4}} = 0,7788$;

2) $f(500) = 2 \cdot \lambda^2 \cdot 500 e^{-(\lambda \cdot 500)^2} = 2 \cdot 500 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\frac{1}{4}} = 10^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{4}} = 0,7788 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}$;

$\lambda(500) = 2 \cdot \lambda^2 \cdot 500 = 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ч}}$;

3) $T_{\text{ср}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda} = 500\sqrt{\pi} = 886$ ч.

7.4. Распределение Вейбулла.

Определение 2. Случайная величина T называется распределенной по закону Вейбулла $W(\alpha, \lambda)$, если ее функция распределения

$$F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha},\ \alpha > 0,\ \lambda > 0 \text{ – параметры распределения, } t \geq 0. \quad (7)$$

Замечание.

$$p(t) = 1 - F_T(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha} \text{ – функция надежности,} \quad (8)$$

$$f(t) = F_T'(t) = \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} \text{ – функция плотности распределения вероятностей,} \quad (9)$$

$$\lambda(t) = \alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot t^{\alpha-1} \text{ – функция интенсивности отказов.} \quad (10)$$

При $\alpha = 1$ $W(1; \lambda)$ становится экспоненциальным распределением $\text{Ex}(\lambda)$.
При $\alpha = 2$ $W(2; \lambda)$ становится распределением Рэлея $R(\lambda)$.

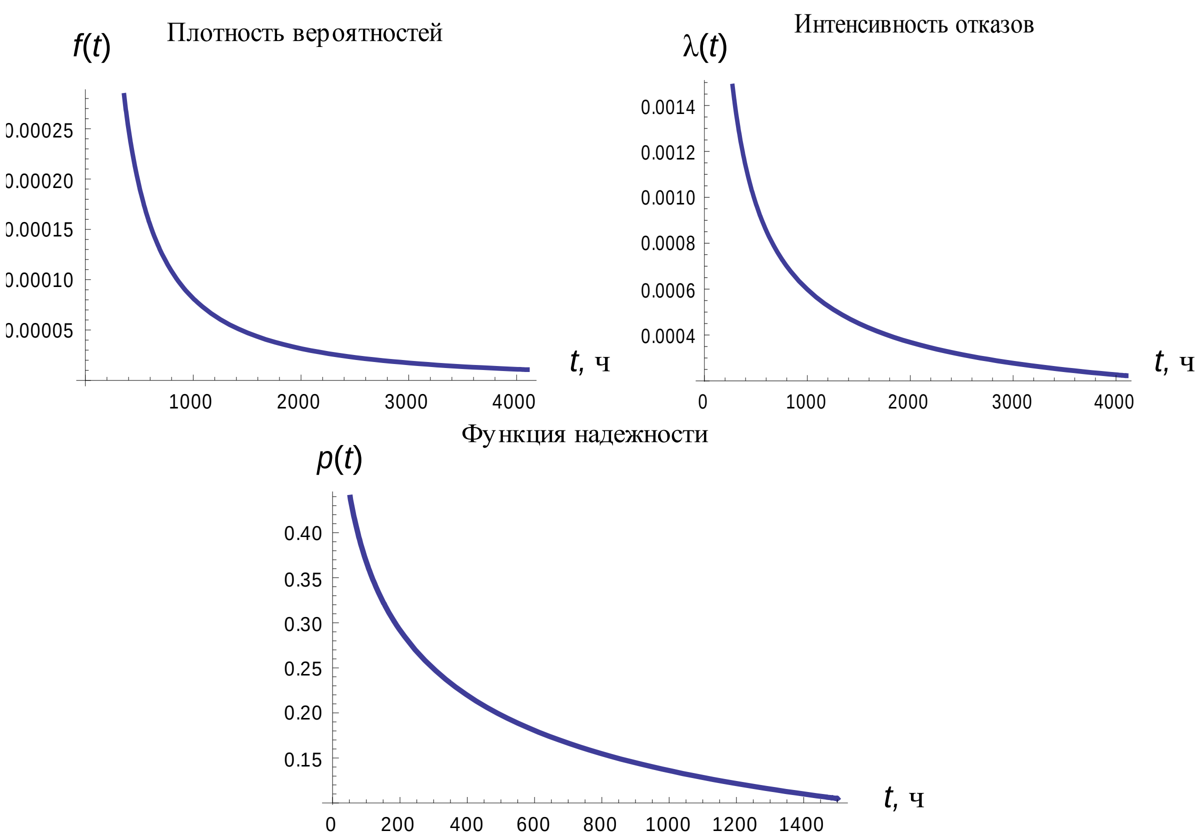


Рис. 4. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $W(0{,}3;\ 0{,}01\ \frac{1}{ч})$

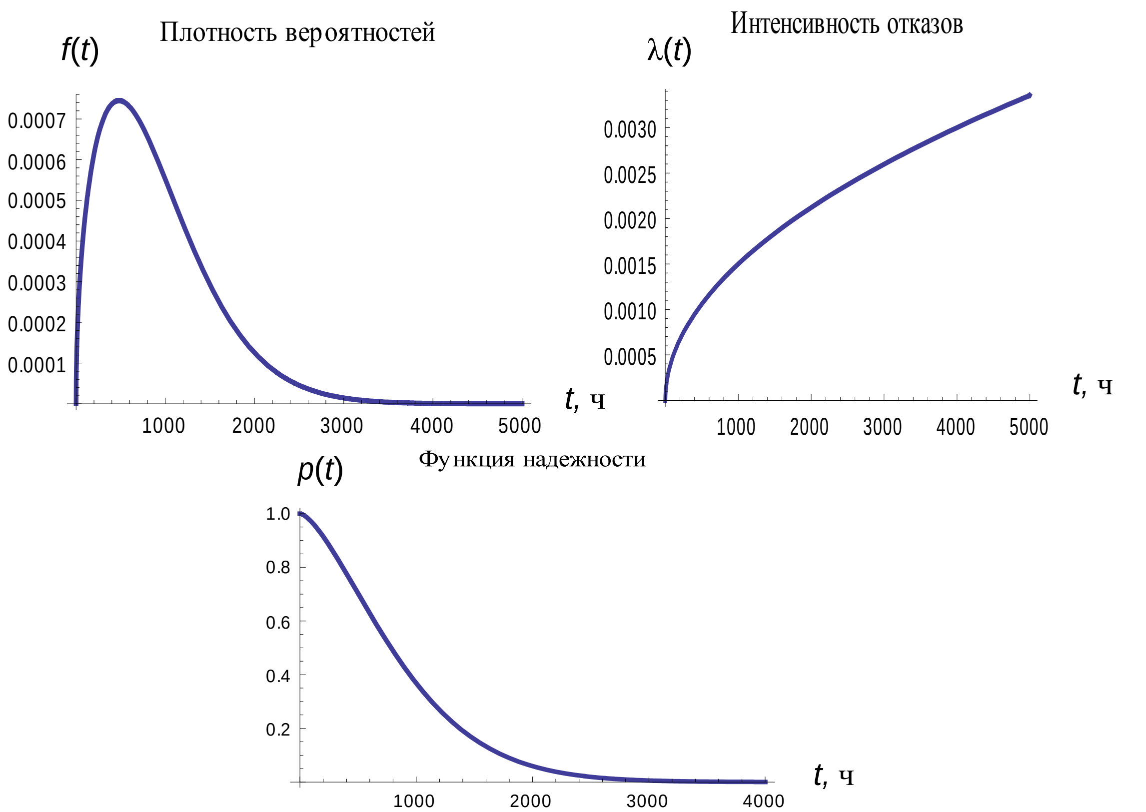


Рис. 5. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $W(1{,}5;\ 0{,}001\ \frac{1}{ч})$

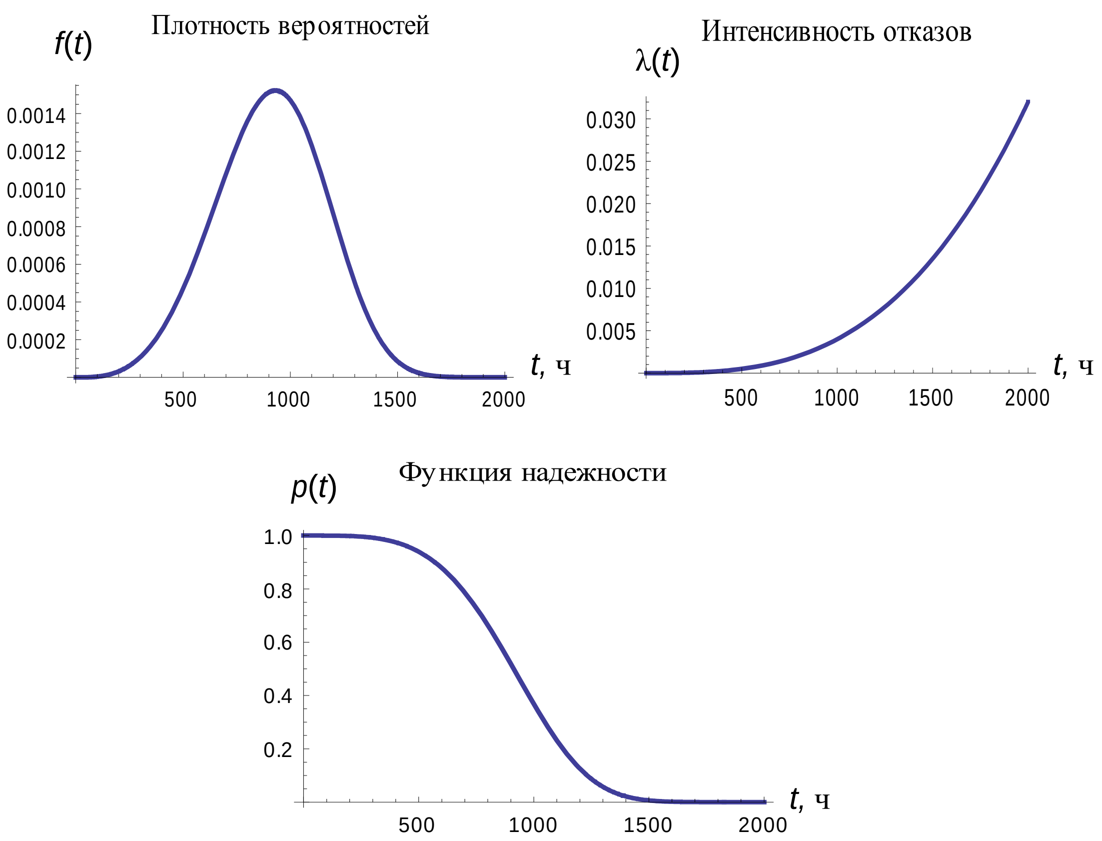


Рис. 6. Графики $f(t), \lambda(t), p(t)$ для распределения $W(4\,;\ 0{,}001\ \frac{1}{\text{ч}})$

Найдем $M(T)$ и $D(T)$.

$$M(t) = T_{\text{ср}} = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)^{\alpha}} dt = \left| \begin{array}{c} (\lambda t)^{\alpha} = x \\ t = \dfrac{1}{\lambda} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}} \\ dt = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{1}{\alpha} \cdot x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda \cdot \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

Таким образом,

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right). \qquad (11)$$

$$D(T)=\int_0^{+\infty} 2t\cdot p(t)dt-M^2(T)=\int_0^{+\infty} 2t\cdot e^{-(\lambda t)^{\alpha}}dt-M^2(T)=$$

$$=\left|\begin{array}{c}(\lambda t)^{\alpha}=x\\ t=\frac{1}{\lambda}x^{\frac{1}{\alpha}};\ dt=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty} 2\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot x^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot x^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-x}dx-M^2(T)=2\frac{1}{\lambda^2\alpha}\int_0^{+\infty} x^{\frac{2}{\alpha}-1}e^{-x}dx-M^2(T)=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\lambda^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)=\frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right).$$

Таким образом,

$$D(T)=\frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right). \qquad (12)$$

Пример 2. Время T наработки системы на отказ распределено по закону Вейбулла $W(0,4;\lambda)$. При этом интенсивность отказов $\lambda(t)$ в момент времени t = 1000 ч равна $\lambda(1000)=5\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{ч}$. Найти:

1) вероятность безотказной работы системы за это время;
2) $T_{ср}$.

Решение.

1) По формуле (10):

$$\lambda(t)=0,4\cdot\lambda^{0,4}\cdot t^{-0,6};\ \lambda(1000)=0,4\cdot\lambda^{0,4}\cdot 10^{-1,8}=5\cdot 10^{-4};$$

$$\lambda^{0,4}=\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 10^{1,8}}{0,4}=\frac{25}{2}\cdot 10^{-2,2}.$$

По формуле (8):

$$p(t)=e^{-(\lambda t)^{0,4}}=e^{-\lambda^{0,4}\cdot t^{0,4}}.$$

$$p(1000)=e^{-\lambda^{0,4}\cdot 10^{1,2}}=e^{-\frac{25}{2}\cdot 10^{-2,2}\cdot 10^{1,2}}=e^{-\frac{25}{2}\cdot 10^{-1}}=e^{-1,25}=0,2865.$$

2) По формуле (11)

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(3\frac{1}{2}\right).$$

Далее (см. пример 1 § 6)

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{\lambda}\cdot 3,3233.$$

Так как $\lambda^{0,4} = \frac{25}{2}\cdot 10^{-2,2}$, то $\lambda = \left(\frac{25}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot 10^{-5,5}$ и $T_{\text{ср}} = \frac{1}{\left(\frac{25}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\cdot 10^{5,5}\cdot 3,3233 = 1902$ ч.

Упражнения

7.1. Нерезервированная невосстанавливаемая система состоит из трех последовательно соединенных элементов. Время жизни элементов распределено по закону Рэлея $R\left(3\cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$, $R\left(4\cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$, $R\left(5\cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$. Определить показатели надежности системы: $p(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, $T_{\text{ср}}$. Определить время, в течение которого система будет исправна с вероятностью $p = 0,9$.

Ответ. $\lambda(t) = 0,0001t$, $p(t) = e^{-0,00005t^2}$, $f(t) = 0,0001te^{-0,00005t^2}$, $T_{\text{ср}} = 125$ ч, $t = 46$ ч.

7.2. Нерезервированная система состоит из n последовательно соединенных элементов, время жизни которых $R(\lambda_i)$, $i = 1, ..., n$.

1) Найти показатели надежности системы.

2) Определить по какому закону распределено время жизни системы.

Ответ. 1) $p(t) = e^{-t^2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)}$; $f(t) = -p'(t) = 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)te^{-t^2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)}$;

$\lambda(t) = 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)t$.

2) $R\left(\sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2}\right)$.

7.3. Резервированная невосстанавливаемая система состоит из двух параллельно соединенных элементов (постоянно включенный резерв).

Время жизни каждого элемента $R\left(5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}\right)$. Определить показатели надежности системы: $p(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, $T_{\text{ср}}$. Определить $T_{\text{ср}}$ для одного элемента, выигрыш в надежности k_T.

Ответ. $p(t) = 2\cdot e^{-25\cdot 10^{-6}t^2} - e^{-50\cdot 10^{-6}t^2}$, $T_{\text{ср}} = 229$ ч, $T_{\text{ср}}$ (для одного элемента) = 177 ч, $k_T = 1{,}29$.

7.4. Время T наработки элемента на отказ распределено по закону Вейбулла $W(\alpha;\lambda)$. При этом интенсивность отказов $\lambda(t)$ $\lambda(100\text{ ч}) = 2\cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{ч}}$, $\lambda(200\text{ ч}) = 4\cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{ч}}$. Найти :

1) параметры $\alpha;\lambda$;

2) показатели надежности при $t = 2000$ ч;

3) $T_{\text{ср}}$, $D(T)$.

Ответ.

1) $\alpha = 2$, $\lambda = 10^{-3}$;

2) $f(2000) = 7{,}326\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{ч}}$, $p(2000) = 0{,}018$, $\lambda(2000) = 4\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}$;

3) $T_{\text{ср}} = 500\sqrt{\pi} = 886$ ч, $D(T) = 0{,}215\cdot 10^{6}\,\frac{1}{\text{ч}^2}$.

7.5. Нерезервированная система состоит из 8 последовательно соединенных элементов, время жизни которых распределено по закону $W(3;\lambda)$. Определить по какому закону распределено время жизни системы.

Ответ. $T \sim W(3, 2\lambda)$.

7.6. Время T наработки детали на отказ распределено по закону Рэлея $R\left(5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}\right)$. Найти показатели надежности работы детали $p(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ при а) $t = 10000$ ч, б) $t = 20000$ ч. Найти $T_{\text{ср}}$, $D(T)$.

7.7. Время T наработки системы на отказ распределено по закону $R(\lambda)$, при этом интенсивность отказов $\lambda(t)$ при $t = 5000$ ч $\lambda(5000) = 10^{-2}\,\frac{1}{\text{ч}}$. Найти:

1) параметр λ;

2) $T_{\text{ср}}$, $D(T)$;

3) показатели надежности работы системы $p(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ а) через 1 месяц, б) через полгода (считать, что в году 8760 ч).

Ответ. $\lambda(4380)=8,76\cdot10^{-3}\dfrac{1}{ч}$; $f(4380)=4,08\cdot10^{-11}\dfrac{1}{ч}$, $p(4380)=4,66\cdot10^{-9}$, $\lambda=0,001\dfrac{1}{ч}$; $T_{ср}=886$ ч, $D(T)=2,15\cdot10^{5}ч^{2}$.

7.8. Нерезервированная система состоит из двух последовательно соединенных элементов. Время жизни 1-го элемента распределено по закону $\mathrm{Ex}\left(10^{-4}\dfrac{1}{ч}\right)$, 2-го – $R\left(5\cdot10^{-3}\dfrac{1}{ч}\right)$. Найти:

1) показатели надежности системы;

2) $T_{ср}$.

7.9. Время T наработки элемента на отказ распределено по закону Вейбулла $W(2;\lambda)$. При этом интенсивность отказов $\lambda(1000\text{ ч})=10^{-3}\dfrac{1}{ч}$. Найти:

1) параметр λ;

2) показатели надежности через t = 2000 ч;

3) $T_{ср}$.

Ответ. $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}}10^{-3}\dfrac{1}{ч}$; $f(2000)=0,00027\dfrac{1}{ч}$, $p(2000)=0,135$, $\lambda(2000)=0,00196\dfrac{1}{ч}$; $T_{ср}=1253$ ч.

7.10. Время T наработки устройства на отказ распределено по закону $W\left(\dfrac{2}{3};\ 10^{-3}\dfrac{1}{ч}\right)$. Найти $T_{ср}$, $D(T)$, показатели надежности через t = 2000 ч.

Ответ. $T_{ср}=750\sqrt{\pi}=1329$ ч; $p(2000)=e^{-\sqrt[3]{4}}$, $D(T)=4,23\cdot10^{6}$ ч^{2}; $f(2000)=1,08\cdot10^{-4}\dfrac{1}{ч}$, $\lambda(2000)=5,3\cdot10^{-4}\dfrac{1}{ч}$.

§ 8. Усеченное нормальное распределение

Рассмотрим СВ T_1 распределенную по нормальному закону $N(a,\sigma)$, $F_{T_1}(t)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$, $f_{T_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<t<+\infty$ (см. § 2 опр. 4). Ограничим интервал t промежутком $[0;+\infty)$ и рассмотрим СВ T с функцией плотности вероятностей $f_T(t)=\begin{cases} c\,f_{T_1}(t), \ t\in[0;+\infty); \\ 0, \ t<0. \end{cases}$ При этом c найдем из условия нормировки:

$$\int_0^{+\infty} f_T(x)dx=1,\quad c\int_0^{+\infty} f_{T_1}(x)dx=1,\quad c(F_1(+\infty)-F_1(0))=1,\quad c\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)\right)=1,$$

$$c=\frac{1}{\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)}. \tag{1}$$

Тогда при $t<0$ $F_T(t)=0$. При $t>0$

$$F_T(t)=\int_0^t f_T(x)dx=c\int_0^t f_{T_1}(x)dx=c(F_{T_1}(t)-F_{T_1}(0))=$$

$$=c\left(\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right)\right)\right)=c\left(\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right).$$

Определение 1. Случайная величина T называется распределенной по усеченному нормальному закону $\mathrm{TN}(a,\sigma)$ (truncated normal), если ее функция плотности вероятностей

$$f_T(t)=c\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}},\ t\geq 0, \tag{2}$$

где c определяется по формуле (1).

Замечание. Функция ненадежности для $\mathrm{TN}(a,\sigma)$

$$F_T(t)=c\left(\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right). \tag{3}$$

Найдем $p(t)$.

$$p(t)=P\left(T\in\left[t;+\infty\right)\right)=F_T(+\infty)-F_T(t)=c\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right).$$

Таким образом,

$$p(t)=c\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right)\text{ – функция надежности,}\qquad(4)$$

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{p(t)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)}\text{ – интенсивность отказов.}\qquad(5)$$

Для $\mathrm{TN}(a,\sigma)$:

$$\mathrm{TN}(a,\sigma):T_{cp}=M(T)=a+k\sigma\text{ – среднее время жизни.}\qquad(6)$$

$$\sigma(T)=\sigma\sqrt{1+\frac{ak}{\sigma}-k^2}\text{ – среднее квадратическое отклонение,}\qquad(7)$$

где

$$k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.\qquad(8)$$

Действительно, найдем, например, $M(T)$.

$$M(T)=\int_0^{+\infty}t\cdot cf(t)dt=c\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=$$

$$=c\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}(t-a)e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}(t-a)e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt+a\cdot c\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=$$

$$=\frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)+a\cdot p(o)=$$

$$=\frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left.\left(-e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\right)\right|_0^{+\infty}+a=\sigma\cdot k+a.$$

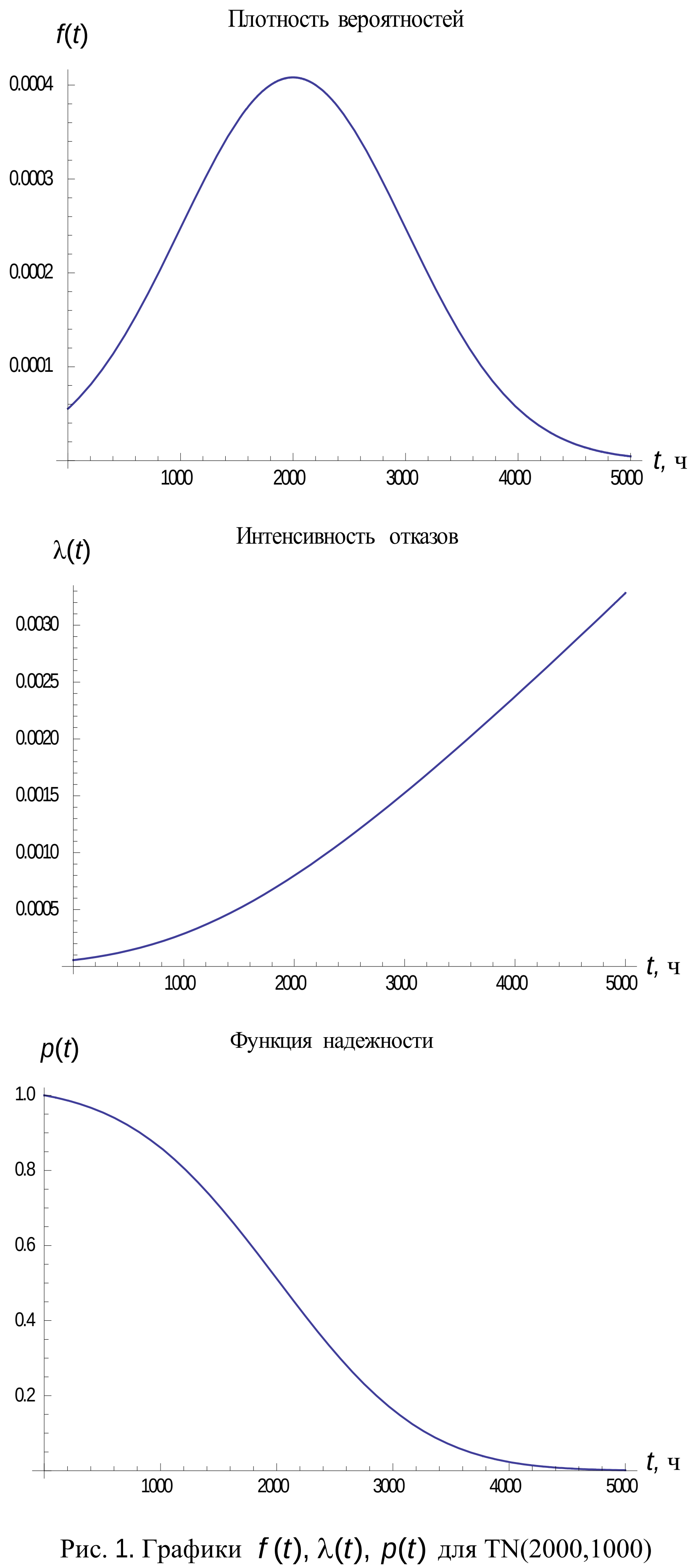


Рис. 1. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для TN(2000,1000)

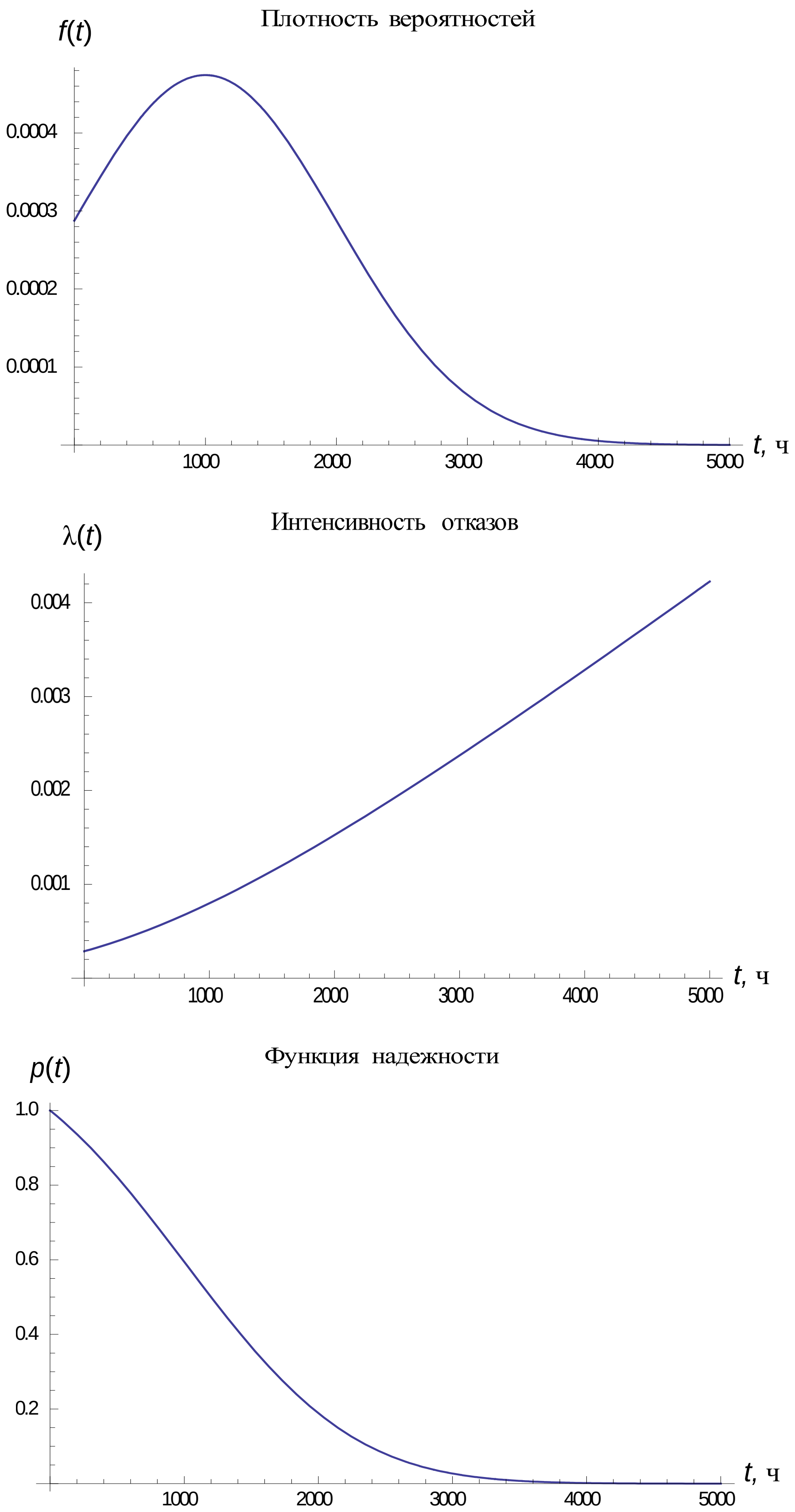


Рис. 2. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для TN(1000,1000)

Пример 1. Время наработки изделия на отказ распределено по закону $\mathrm{TN}(2000\text{ ч},1000\text{ ч})$. Найти $T_{\text{ср}}$, $\sigma(T)$, параметры надежности при $t = 2000$ ч.

Решение. По формуле (1):

$$c = \frac{1}{\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \Phi(2)} = 1{,}02333.$$

По формуле (9):

$$k = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} = \frac{1{,}02333}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{4\cdot 10^6}{2\cdot 10^6}} = \frac{1{,}02333}{\sqrt{2\pi}} e^{-2} = 0{,}05525.$$

По формуле (6):

$$T_{\text{ср}} = a + k\sigma = 2000 + 55{,}25 = 2055{,}25\ (\text{ч}).$$

По формуле (7):

$$\sigma(T) = 1000\sqrt{1 + \frac{a}{\sigma} \cdot k - k^2} = 1000\sqrt{1 + 2 \cdot 0{,}5525 - (0{,}05525)^2} = 1052{,}4\ \ (\text{ч}).$$

По формуле (3):

$$f(2000) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 0{,}000408\ \frac{1}{\text{ч}}.$$

По формуле (4):

$$p(2000) = c\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{2000 - a}{\sigma}\right)\right) = c \cdot \frac{1}{2} = 0{,}512.$$

По формуле (5):

$$\lambda(2000) = \frac{f(2000)}{p(2000)} = 0{,}0008\ \frac{1}{\text{ч}}.$$

§ 9. **Логарифмически нормальное распределение**

Определение 1. Пусть СВ T принимает положительные значения. T называется распределенной по логарифмически нормальному закону $\mathrm{LN}(a;\sigma)$, если $X=\ln(T)$, распределена по нормальному закону $N(a;\sigma)$.

Замечание.

$$F_T(t)=P(T<t)=P(\ln(T)<\ln(t))=F_{\ln(T)}(\ln(t))=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\ln t-a}{\sigma}\right).$$

Таким образом,

$$F_T(t)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\ln t-a}{\sigma}\right), \qquad (1)$$

или

$$F_T(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{(\ln t-a)/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (2)$$

Поэтому

$$f_T(t)=F_T'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{(\ln t-a)'}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\cdot t}e^{-\frac{(\ln t-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3)$$

Можно показать также, что

$$T_{\text{ср}}=M(T)=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}. \qquad (4)$$

$$D(T)=e^{2a+\sigma^2}\cdot(e^{\sigma^2}-1). \qquad (5)$$

Замечание. Логарифмически нормальное распределение применяют при рассмотрении случайных величин, являющихся произведением большого числа независимых случайных величин. Подобно тому, как распределение $N(na;\sqrt{n}\sigma)$ применяют при рассмотрении суммы $S_n=X_1+\ldots+X_n$ одинаково распределенных независимых случайных величин, таких что $M(X_i)=a,\ \sigma(X_i)=\sigma,\ \forall i$ (центральная предельная теорема).

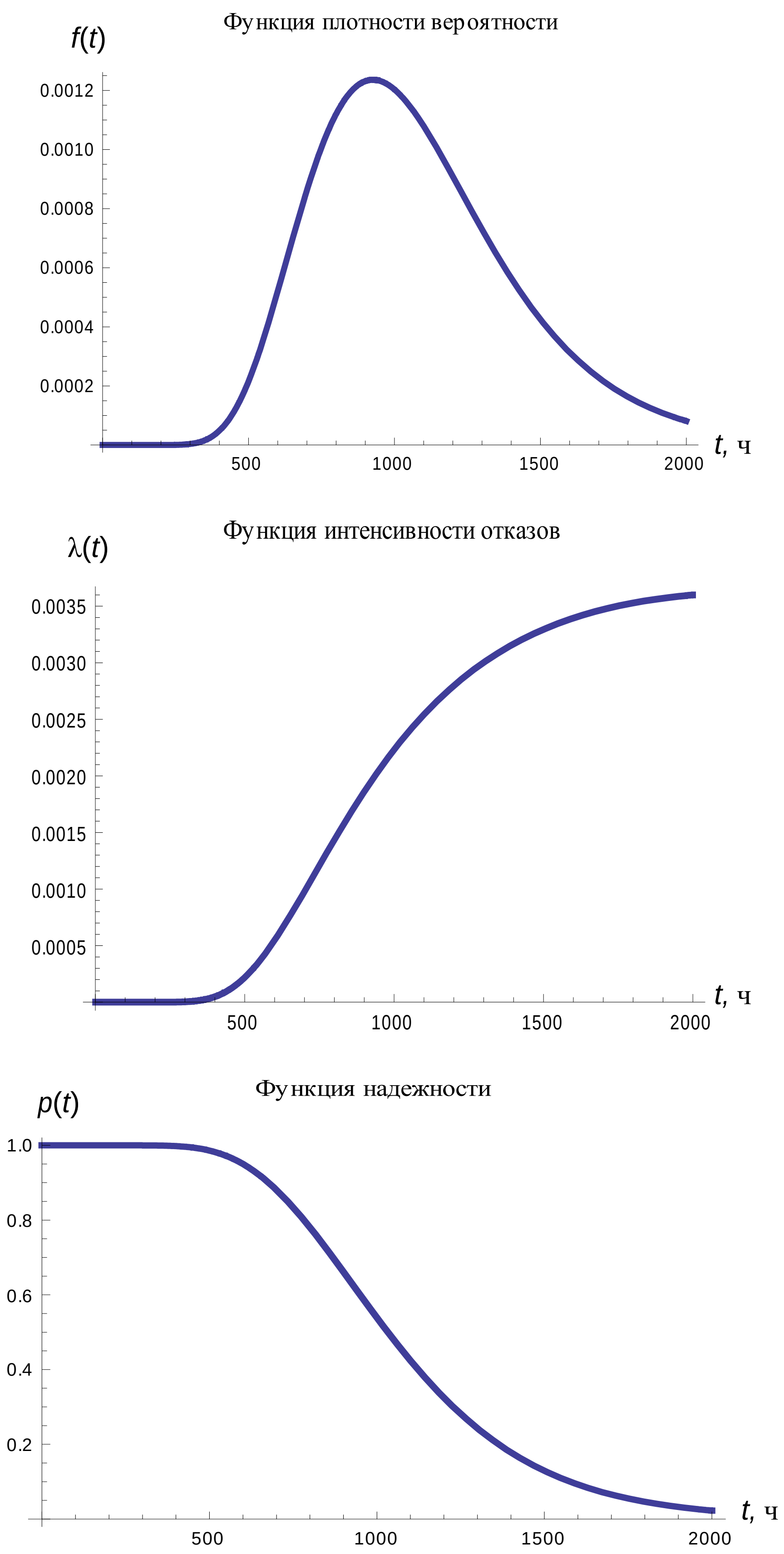


Рис. 1. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $LN(6,94\ ;\ 0,33)$

§ 10. **Гамма-распределение**

Определение 1. Случайная величина T имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, если ее функция распределения

$$F_T(t) = I(\alpha, \lambda t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda t} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \tag{1}$$

где $I(\alpha, \lambda t)$ – неполная гамма-функция (см. § 6);

$\alpha > 0, \lambda > 0$ – параметры распределения; $t \geq 0$.

Замечание.

$$f(t) = F_T'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\lambda t} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right)_t' = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)' =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \cdot t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}.$$

Таким образом,

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \cdot t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \text{ – функция плотности вероятностей,} \tag{2}$$

$$p(t) = 1 - I(\alpha, \lambda t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\lambda t}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ – функция надежности,} \tag{3}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{\lambda^{\alpha} \cdot t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_{\lambda t}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx} \text{ – функция интенсивности отказов.} \tag{4}$$

Из формулы (2) видно, что для $\Gamma(1, \lambda)$ $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$ и, следовательно, распределение $\Gamma(1, \lambda)$ совпадает с $\mathrm{Ex}(\lambda)$.

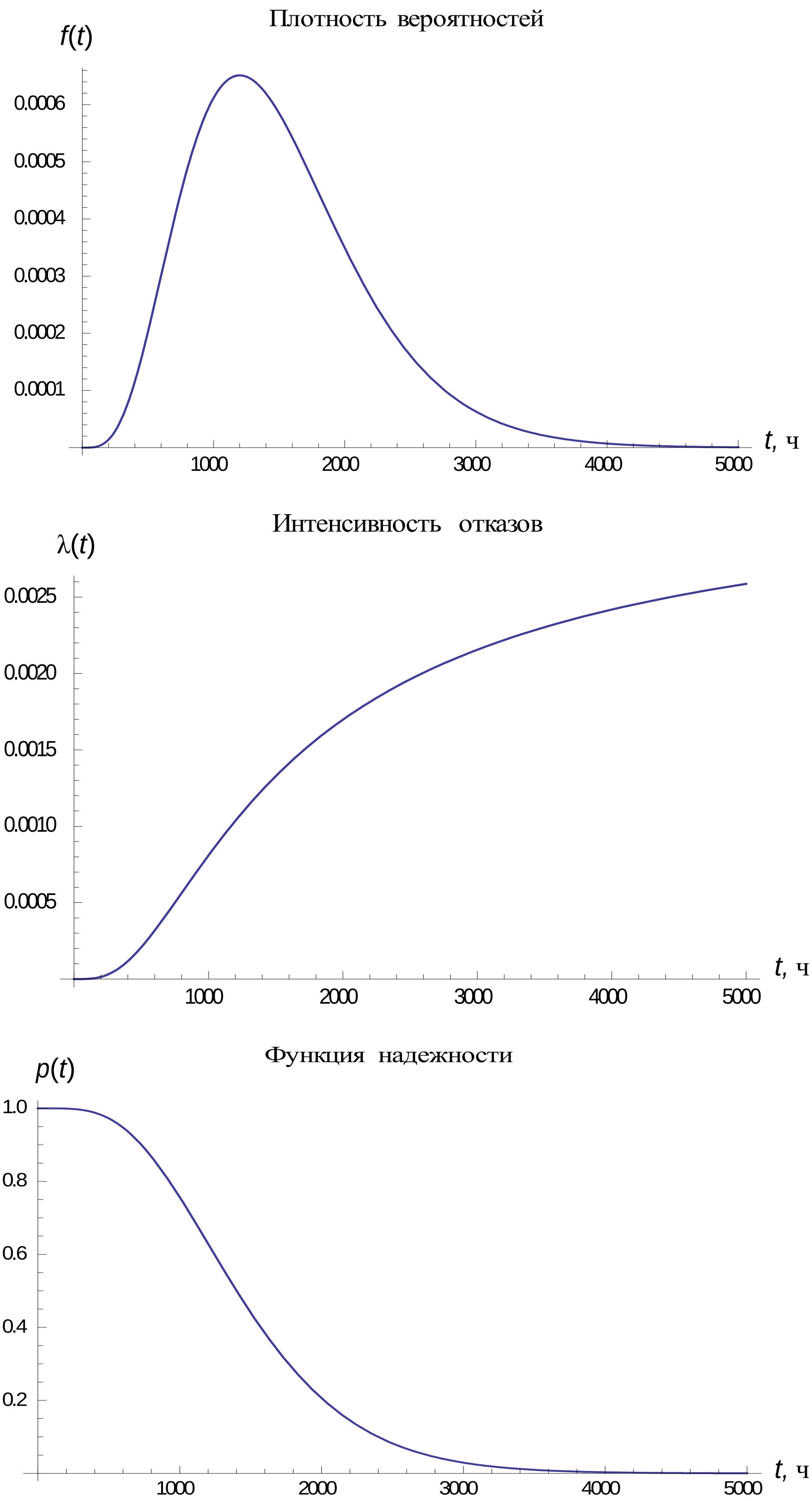


Рис. 1. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $\Gamma(5;1/300)$

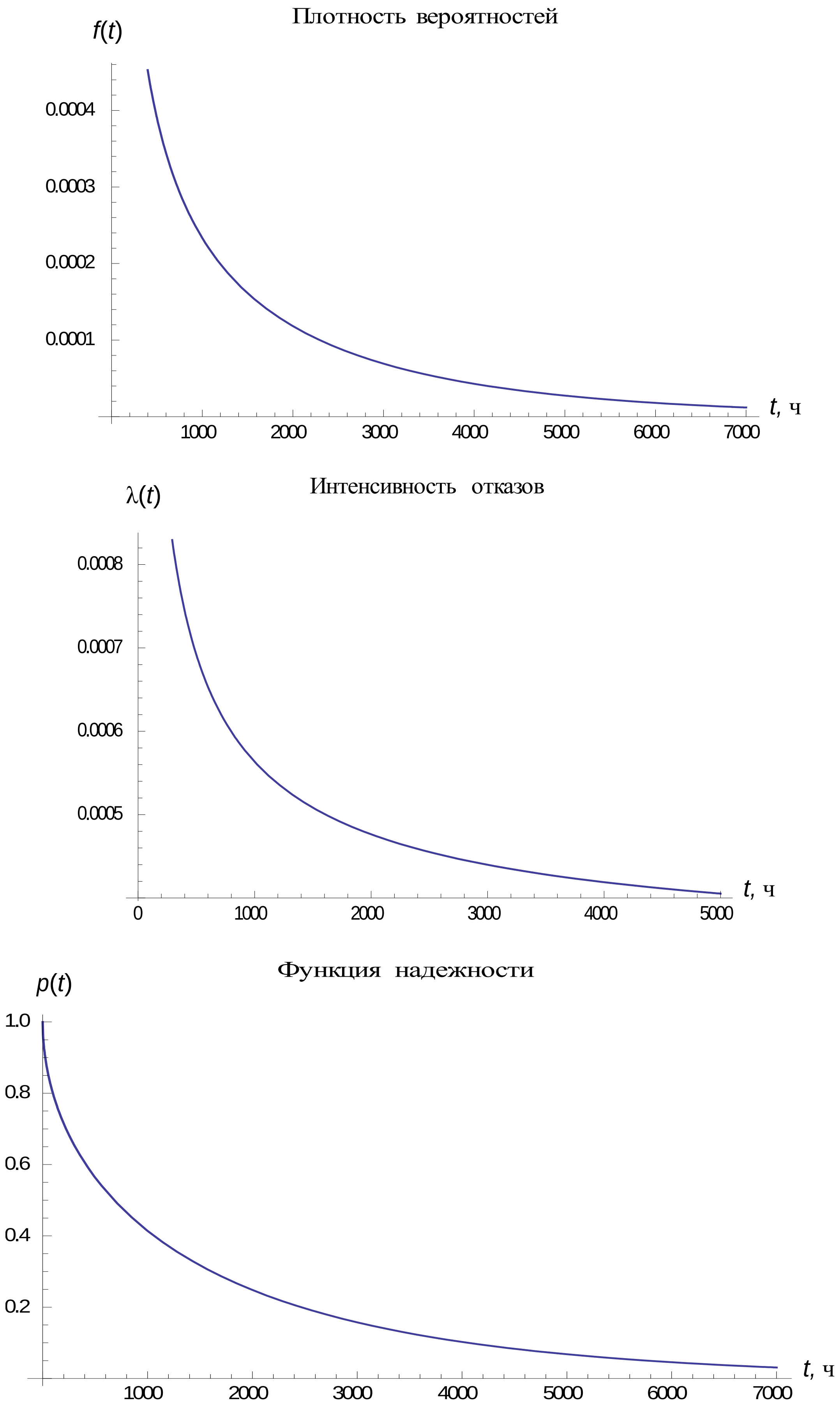


Рис. 2. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $\Gamma(1/2;1/3000)$

Найдем еще $T_{ср}$ и $D(T)$.

$$T_{ср}=M(T)=\int_0^{+\infty} t\cdot f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\lambda t)^{\alpha}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^{+\infty}(\lambda t)^{\alpha}e^{-\lambda t}d(\lambda t)=\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+1)=\frac{\alpha}{\lambda}.$$

Таким образом, $T_{ср}=\dfrac{\alpha}{\lambda}$. (5)

$$D(T)=\int_0^{+\infty} t^2\, f(t)dt-M^2(T)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t\cdot(\lambda t)^{\alpha}\cdot e^{-\lambda t}dt-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda t)^{\alpha+1}\cdot e^{-\lambda t}d(\lambda t)-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+2)-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=\left|\text{по формуле } (3)\ \S\ 6)\right|=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\cdot(\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Таким образом, $D(T)=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$. (6)

Большой интерес представляет случай, когда в распределении $\Gamma(\alpha,\lambda)$ параметр α – натуральное число, $\alpha\in N$.

Определение 2. Пусть $k\in N$, тогда распределение $\Gamma(k,\lambda)$ называется распределением Эрланга порядка k.

Замечание. Так как $\Gamma(k)=(k-1)!$, то из формулы (3) следует:

$$p(t)=\frac{1}{(k-1)!}\int_{\lambda t}^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx=-\frac{1}{(k-1)!}\int_{\lambda t}^{+\infty}x^{k-1}d(e^{-x})=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x^{k-1}\Rightarrow du=(k-1)x^{k-2}\cdot dx\\ dv=d(e^{-x})\Rightarrow v=e^{-x}\end{matrix}\right|=$$

$$-\frac{1}{(k-1)!}\left(x^{k-1}e^{-x}\Big|_{\lambda t}^{+\infty}-\int_{\lambda t}^{+\infty}(k-1)x^{k-2}e^{-x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}+\frac{1}{(k-2)!}\int_{\lambda t}^{+\infty}x^{k-2}e^{-x}dx.$$

И далее, если проводить интегрирование по частям еще $(k-2)$ раз, то получим

$$p(t)=e^{-\lambda t}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}. \qquad (7)$$

Случайная величина *T*, распределенная по закону Эрланга $\Gamma(k,\lambda)$, возникает при рассмотрении модели накапливающихся повреждений, если через случайные интервалы времени в системе возникают единичные повреждения, вызванные потоком случайных событий, и при накоплении k повреждений система отказывает. Тогда, если время между наступлением двух последовательных событий потока распределено по показательному закону $\mathrm{Ex}(\lambda)$, то *T* – время наработки системы на отказ распределена по закону $\Gamma(k,\lambda)$.

Действительно, верна теорема:

Теорема 1. Пусть время между наступлением двух соседних событий потока (время между двумя единичными повреждениями) распределено по закону $\mathrm{Ex}(\lambda)$. Тогда случайная величина Y – число событий потока за время t (число случайных повреждений системы) распределено по закону Пуассона $\Pi(\lambda t)$, т.е. $P(Y=i)=\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$.

Подробнее о потоках случайных событий см. § 14.

Из теоремы 1 следует, что для рассмотренной выше СВ *T* – времени жизни системы – функция надежности

$$p_T(t)=P(T>t)=P(Y<k)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}+\frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t},$$

что совпадает с формулой (7).

Замечание. Для системы рассмотренной выше последовательность моментов времени наступления единичных повреждений можно представить в виде $t_1=T_1, t_2=T_1+T_2, \ldots, t_{k-1}=T_1+\ldots+T_{k-1}, T=t_k=T_1+\ldots+T_{k-1}+T_k$ – время наработки системы на отказ, причем T_i независимы и имеют распределение $\mathrm{Ex}(\lambda)$, $i=1,\ldots,k$.

Пример 1. Время жизни изделия *T* распределено по закону $\Gamma(3,\lambda)$, причем $T_{\text{ср}}=3000$ ч. Найти показатели надежности изделия через 4000 ч.

Решение.

$$T_{\text{ср}}=\frac{k}{\lambda}=\frac{3}{\lambda}=3000\ \text{ч}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{1000}\,\frac{1}{\text{ч}},\ \ \lambda t=\lambda\cdot 4000=4.$$

Тогда по формуле (7)

$$p(t)=\left(\frac{(\lambda t)^0}{0!}+\frac{(\lambda t)^1}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}\right)e^{-\lambda t}\Bigg|_{t=4000}=(1+4+8)e^{-4}=\frac{13}{e^4}=0,238\,.$$

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(3)}\lambda^3t^2\cdot e^{-\lambda t}\Bigg|_{t=4000}=\frac{1}{2}\cdot 10^{-9}\cdot 16\cdot 10^6\cdot e^{-4}=\frac{8}{10^3}e^{-4}=\frac{1}{125}\cdot e^{-4}=1{,}465\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{ч}}.$$

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{p(t)}=\frac{1}{125\cdot 13}\ \frac{1}{\text{ч}}=6{,}157\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{ч}}.$$

Упражнения

10.1. Время T наработки устройства на отказ распределено по закону $\Gamma\left(3;10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) Записать функции $p(t),\ F(t),\ f(t), \lambda(t)$.

2) Найти $T_{\text{ср}}$, $D(T)$.

3) Найти показатели надежности при $t=4000$ ч.

Ответ. $p(t)=e^{-0{,}001t}\left(1+\lambda t+\dfrac{(\lambda t)^2}{2}\right)$, $f(t)=0{,}5\cdot 10^{-9}t^2\cdot e^{-0.001t}$, $T_{\text{ср}}=3000$ ч, $D(T)=3\cdot 10^6$ ч^2, $p(4000)=0{,}238$.

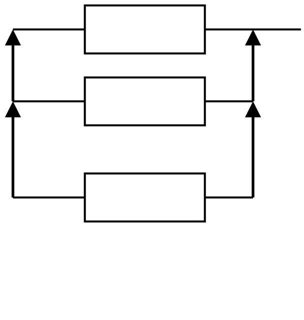
10.2. Время T жизни элемента распределено по закону $\Gamma\left(\frac{5}{2};10^{-5}\frac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) Записать формулы для показателей надежности и найти их значения при $t=10^4$ ч.

2) Найти $T_{\text{ср}}$, $D(T)$.

Ответ. $T_{\text{ср}}=2{,}5\cdot 10^5$ ч, $D(T)=2{,}5\cdot 10^{10}$ ч^2.

10.3. а) Дана резервированная система (резерв замещением кратности $m = 2$):

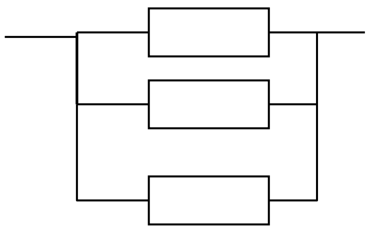


Время жизни каждого элемента распределено по закону $\mathrm{Ex}\left(0{,}001\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) Определить по какому закону распределено T – время жизни системы, записать функцию $p(t)$.

2) Найти $T_{\text{ср}}$.

б) Дана резервированная система (постоянно включенный резерв кратности $m = 2$):

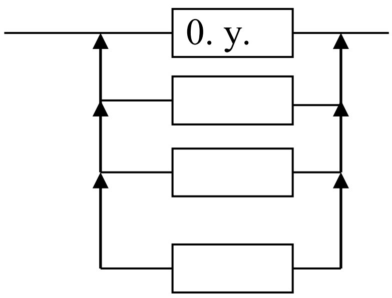


Время жизни каждого элемента распределено по закону $\mathrm{Ex}\left(0{,}001\ \frac{1}{\text{ч}}\right)$.

1) Записать функцию $p(t)$ для СВ T – времени жизни системы.

2) Найти $T_{\text{ср}}$.

10.4. Дана резервированная система (резерв замещением кратности $m = 3$).



Время жизни каждого элемента распределено по закону $\Gamma\left(2; 10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$.

а) Определить, по какому закону распределено T – время жизни системы.

б) Найти показатели надежности.

в) Найти $T_{\text{ср}}$, $D(T)$.

Ответ. а) $\Gamma\left(8; 10^{-3}\frac{1}{\text{ч}}\right)$.

§ 11. Распределение $\chi^2(n)$

Определение 1. Случайная величина T имеет распределение $\chi^2(n)$ (χ^2 с n степенями свободы), если

$$T = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2,$$

где U_i – независимые случайные величины, каждая из которых распределена по закону $U(0;1)$.

Замечание.

1) Рассмотрим распределение $\chi^2(1)$:

$$T = U_1^2;$$

$$F_T = P(T < t) = P(U_1^2 < t) = P\left(-\sqrt{t} < U_1 < \sqrt{t}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\sqrt{t} - a}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{-\sqrt{t} - a}{\sigma}\right)\right) = \left| a = 0;\ \sigma = 1 \right| =$$

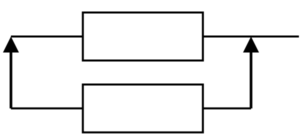
$$= 2\Phi(\sqrt{t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Тогда $f_T(t) = F_T'(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t}$, что совпадает с формулой (2) § 10 для случая $\Gamma\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом $\chi^2(1) \sim \Gamma\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

2) Рассмотрим резервированную систему (резерв замещением):

$\Gamma\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$



$\Gamma\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$

Тогда время жизни системы $T = T_1 + T_2$, поэтому $T \sim \chi^2(2)$.

С другой стороны $f_T(t) = f_1(t) * f_2(t)$, где $f_1(t), f_2(t)$ – функции плотности распределения для СВ T_1 и T_2, и $f_1(t) * f_2(t)$ – свертка функций $f_1(t), f_2(t)$. Поэтому

$$f_T(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \left| \text{по формуле } (2) \ \S\, 10 \text{ для } \alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\tau} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t\tau - t^2}} =$$

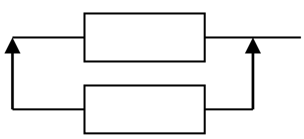
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t} \arcsin\left(\frac{2\tau - t}{t} \right) \Bigg|_0^t = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot 2\arcsin 1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Таким образом, распределение $\chi^2(2) \sim \mathrm{Ex}\left(\frac{1}{2}\right) \sim \Gamma\left(1; \frac{1}{2}\right)$ и

$$\chi^2(2n) \sim \Gamma\left(n; \frac{1}{2}\right). \qquad (1)$$

3) Рассмотрим резервированную систему ($n \geq 1$; резерв замещением):

$\Gamma\left(n; \frac{1}{2}\right)$



$\Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Тогда (см. формулу (1)) время жизни системы $T = T_1 + T_2$, поэтому $T \sim \chi^2(2n+1)$.

С другой стороны,

$$f_T(t)=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau=\left|\text{по формуле } (2)\ \S\,10 \text{ для } \alpha=n, \alpha=\frac{1}{2}\right|=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\int_0^t \tau^{n-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\tau^{n-1}\Rightarrow du=(n-1)\tau^{n-2} \\ dv=(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\Rightarrow v=-2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\left(-2\tau^{n-1}(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^t+2(n-1)\int_0^t\tau^{n-2}(t-\tau)^{\frac{1}{2}}d\tau\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}2(n-1)\int_0^t\tau^{n-2}(t-\tau)^{\frac{1}{2}}d\tau=$$

$$=\left|\text{интегрируя еще } (n-2) \text{ раза по частям}\right|=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot1\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{2n-3}\cdot\int_0^t(t-\tau)^{n-\frac{3}{2}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(n-1)!2^{n-1}}{(2n-3)!!}\cdot\left(-\frac{2}{2n-1}\cdot(t-\tau)^{n-\frac{1}{2}}\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(n-1)!2^{n}}{(2n-1)!!}t^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\cdot t^{n-\frac{1}{2}}\sim\Gamma\left(n+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\chi^2(2n+1) \sim \Gamma\left(n+\frac{1}{2};\, \frac{1}{2}\right). \qquad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) следует, что

$$\chi^2(n) \sim \Gamma\left(\frac{n}{2};\, \frac{1}{2}\right), \qquad (3)$$

по формуле (2) § 10

$$f_{\chi^2(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t}, \qquad (4)$$

а по формуле (3) § 10

$$p(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\frac{1}{2}t}^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx \text{ – функция надежности.} \qquad (5)$$

По формулам (5), (6) § 10

$$T_{\text{ср}} = n, \qquad (6)$$

$$D(\chi^2(n)) = 2n. \qquad (7)$$

Замечание. При больших n $\chi^2(n)$ приближается к нормальному $N(n, \sqrt{2n}\,)$.

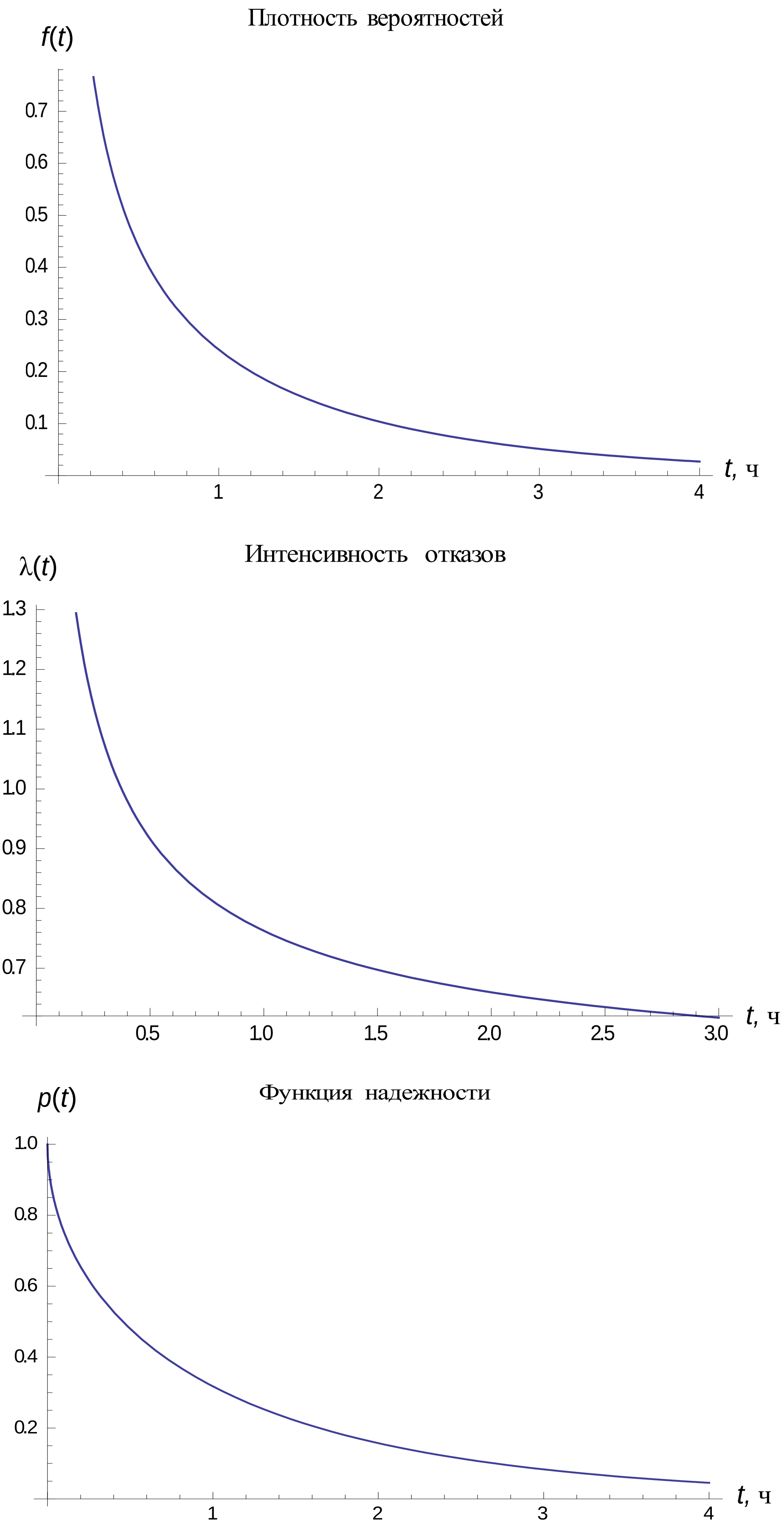


Рис. 1. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $\chi^2(n)$, $n = 1$

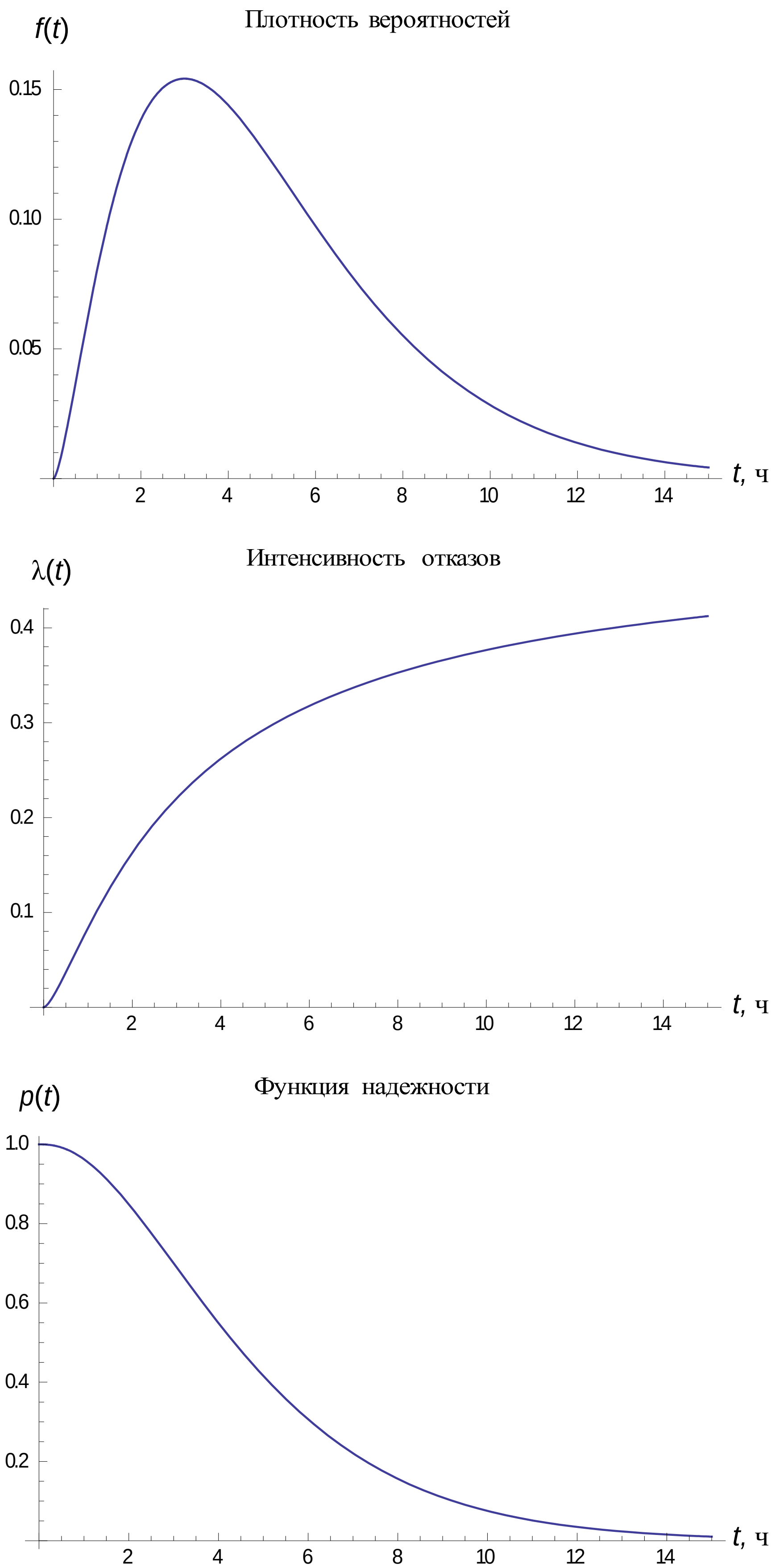


Рис. 2. Графики $f(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$ для распределения $\chi^2(n)$, $n = 5$

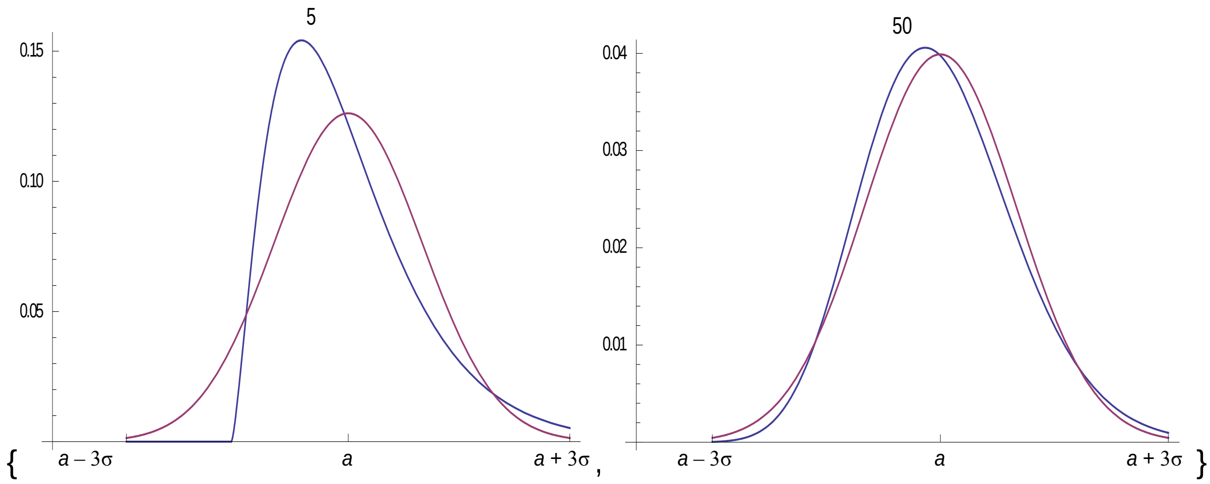


Рис. 3. Графики функции плотности вероятностей $f(x)$
для $\chi^2(n)$ и $N(n, \sqrt{2n})$ при $n = 5$, $n = 50$

§ 12. Случайные процессы

Определение 1. Пусть (Ω, U, P) – вероятностное пространство, $T \subset R$ – промежуток времени. Пусть любому $t \in T$ поставлена в соответствие некоторая случайная величина $X(t) = X(t, \omega), \omega \in \Omega$. Тогда говорят, что $X(t)$ – случайный процесс (будем писать СП $X(t)$). Если $t \in \{0, 1, 2, ...\}$, то $X(t)$ – процесс с дискретным временем, если $t \in [0, \tau]$, то $X(t)$ – процесс с непрерывным временем. Зафиксируем $\omega_0 \in \Omega$, тогда неслучайная функция $X(t) = X(t, \omega_0), t \in T$ называется реализацией (траекторией) СП $X(t, \omega)$. Если же зафиксировать $t = t_0$, то случайная величина $X(t_0, \omega)$ – сечение СП $X(t)$ (состояние случайного процесса при $t = t_0$).

Пример 1. Пусть $U(t)$ – напряжение, подаваемое на устройство в течение времени $[0, \tau]$. СП $U(t)$ – процесс с непрерывным временем и непрерывными состояниями.

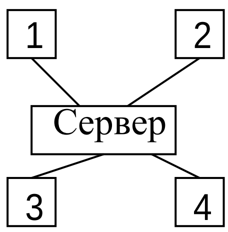
Пример 2. В течение суток непрерывно измеряется количество $X(t)$ автомобилей, въехавших на охраняемую стоянку на промежутке времени $[0, t)$, $0 < t \le 24$. $Y(t)$ – количество автомобилей, покинувших стоянку на промежутке $[0, t)$, $Z(t) = X(t) - Y(t)$ – количество автомобилей на стоянке в момент времени t.

$X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ процессы с непрерывным временем и дискретными состояниями. Значения $X(t)$, $Y(t)$: 0, 1, 2, …, n, … Значения $Z(t)$: 0, 1, …, n_e, где n_e – расчетная емкость стоянки.

Пример 3. Для определения интенсивности движения на нерегулируемом перекрестке в течение каждых 15 мин подсчитывается количество $X(n)$ транспортных средств, прибывающих на перекресток с главного направления ($X(1)$ – количество автомобилей за первые 15 мин, $X(2)$ – количество автомобилей за последующие после первого замера 15 мин и т.д.

$X(n)$ – случайный процесс с дискретным временем $n = 1, 2, …$ и дискретными состояниями.

Пример 4. Рассматривается работа локальной вычислительной сети со структурой типа «звезда», состоящей из сервера и 4 компьютеров.



Сеть работоспособна, если работает сервер и хотя бы один из компьютеров. Сеть не работает при выходе из строя сервера или всех компьютеров. Можно выделить следующие состояния сети:

s_0 – работают все компьютеры и сервер;

s_1 – отказал один компьютер, сеть исправна;

s_2 – отказало 2 компьютера, сеть исправна;

s_3 – отказало 3 компьютера, сеть исправна;

s_4 – отказало 4 компьютера или сервер, сеть неисправна.

В любой момент времени t сеть может находиться в одном из пяти состояний множества $S=\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$. С работой сети связывают случайный процесс $X(t)$, где $X(t)$ – дискретная СВ, принимающая значения из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, при этом вероятности $p(X(t)=i)=P$ (в момент времени t сеть находится в состоянии s_i) $= p_i(t)$ – зависит от интенсивности переходов сети из состояния в состояние (интенсивности отказов и интенсивности восстановлений).

$X(t)$ – случайный процесс с непрерывным временем и дискретными состояниями.

Пример 5. Пусть СВ X распределена равномерно на отрезке $[-2; 2]$, $X \sim U[-2; 2]$, $X(t)=X\cdot\sin t, t\geq 0$, $X(t)$ – случайный процесс с непрерывным временем и непрерывными состояниями.

Пусть $t_1=\frac{\pi}{6}, t_2=\frac{3\pi}{4}, t_3=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow X\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}X$, $X\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{X\sqrt{2}}{2}$, $X\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-X$ – сечения СП $X(t)$;

$$\frac{1}{2}X \sim U[-1;1], -\frac{X\sqrt{2}}{2} \sim U\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right], -X \sim U[-2;2].$$

Пусть $X(\omega_0)=1 \Rightarrow X(t)=\sin t$ – реализация СП $X(t)$.

Пусть $X(\omega_0)=-\frac{1}{2} \Rightarrow X(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ – реализация СП $X(t)$.

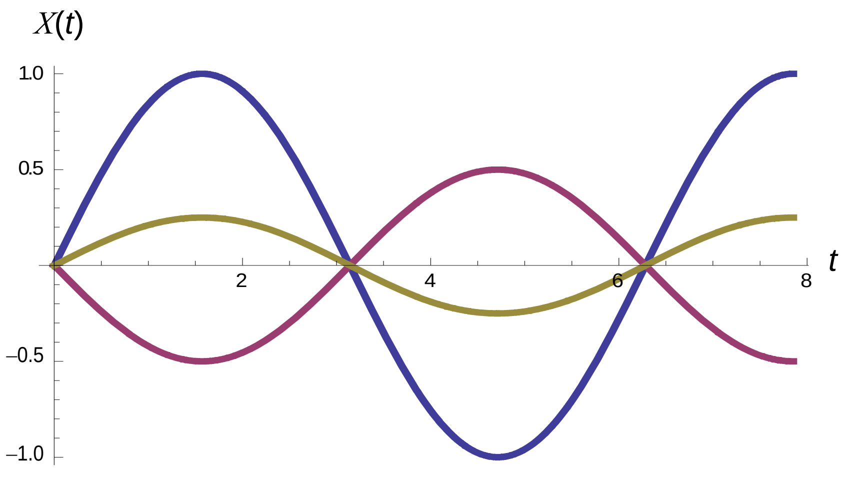


Рис. 1. Реализации СП $X(t)$, $X(t)=\sin t$, $X(t)=-(1/2)\sin t$, $X(t)=(1/4)\sin t$

§ 13. Цепи Маркова

Определение 1. Пусть $X(t)$ – СП с дискретным временем $t \in \{0, 1, 2, ...\}$ и дискретными состояниями $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. СП $X(t)$ называется цепью Маркова, если $\forall t_1, t_2, ..., t_{e-1}, t_e \in Z$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_{e-1} < t_e$, $\forall s_i, s_j \in S$ и для любых подмножеств $B_1, B_2, ..., B_{e-2} \subset S$ выполняется равенство (1).

$$P\Big(X(t_e) = s_j \Big| X(t_1) \in B_1, X(t_2) \in B_2, ..., X(t_{e-2}) \in B_{e-2}, X(t_{e-1}) = s_i\Big) = \\ = P\Big(X(t_e) = s_j \Big| X(t_{e-1}) = s_i\Big). \tag{1}$$

(Вероятность того, в каком состоянии система будет в будущем не зависит от прошлого, а только от того в каком состоянии она находится в настоящий момент времени).

Замечание. Если строго следовать определению 1 из § 12, то в качестве S надо брать множество $S = \{1, 2, ..., n\}$ и запись $X(t_e) = s_j$ подразумевает $X(t_e) = j$.

Определение 2. Цепь Маркова $X(t)$ называется однородной, если $\forall s_i, s_j \in S$:

$$P\Big(X(t+1) = s_j \Big| X(t) = s_i\Big) = p_{ij}(t) = p_{ij}, \ \forall t, \tag{2}$$

т.е. переход системы из состояния в состояние не зависит от времени. При этом матрица $P = (p_{ij}), i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., n$ называется матрицей вероятностей переходов цепи Маркова (первая строка матрицы задает вероятности переходов цепи из состояния s_1 во все другие состояния, вторая – аналогичные вероятности для состояния s_2 и т.д.

Пример 1. Устройство состоит из трех последовательно соединенных одинаковых элементов. В начальный момент они все неисправны. За один шаг конструктор, выбирая с равной вероятностью любой из трех элементов, заменяет его на аналогичный запасной элемент, каждый из которых исправен с вероятностью $\frac{1}{2}$. Работа заканчивается, когда устройство заработает. Пусть $X(n)$ – число исправных элементов в устройстве через n шагов. Тогда $X(n)$ – СП с дискретным временем и дискретными состояниями $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, где состояние s_i – в устройстве $i - 1$ исправный элемент, $i = 1, 2, 3, 4$.

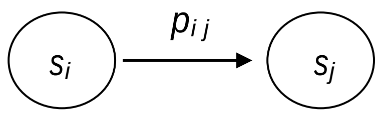
При этом $X(n)$ является цепью Маркова (равенство (1), очевидно, выполняется). Цепь Маркова $X(n)$ является однородной. Выпишем матрицу P вероятностей переходов:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

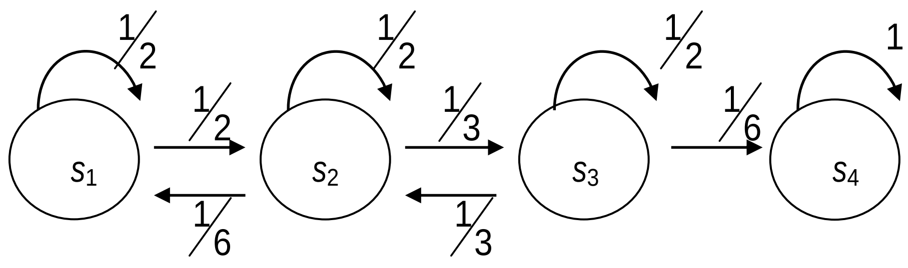
Действительно, найдем, например, условные вероятности переходов из состояния s_2 во все другие. s_2 – в устройстве один исправный элемент и два неисправных. Тогда $p_{23} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, где $\frac{2}{3}$ – вероятность удалить неисправный элемент, $\frac{1}{2}$ – вероятность того, что запасной элемент исправен; $p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, где $\frac{1}{3}$ – вероятность удалить исправный элемент, $\frac{1}{2}$ – вероятность того, что запасной элемент неисправен. Аналогично

$$p_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ p_{24} = 0.$$

Определение 3. Ориентированный граф, вершинами которого являются состояния $s_1, \ldots, s_n$ системы, а на дугах (i, j) задают условные вероятности p_{ij} переходов из состояния s_i в состояние s_j называется графом состояний системы:



Пример 2. Рассмотрим цепь Маркова из примера 1, тогда граф состояний системы:



Замечание. Зная граф состояний системы, можно легко построить матрицу вероятностей переходов, и наоборот.

Определение 4. Вектор $\vec{p}^{(0)} = (p_1^{(0)},..., p_n^{(0)})$, где $p_i^{(0)} = P(X(0) = s_i)$, называется вектором вероятностей состояний системы в начальный момент времени или вектором начальных вероятностей.

Вектор $\vec{p}^{(m)} = (p_1^{(m)},..., p_n^{(m)})$, где $p_i^{(m)} = P(X(m) = s_i)$, называется вектором вероятностей состояний системы через m шагов или m-шаговым распределением вероятностей.

Теорема 1.

$$(p_1^{(1)},..., p_n^{(1)}) = (p_1^{(0)},..., p_n^{(0)}) \cdot P,$$

где P – матрица вероятностей переходов.

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$P(X(1) = s_1) = P(X(0) = s_1) \cdot p_{11} + P(X(0) = s_2) \cdot p_{21} + ... +$$

$$+P(X(0) = s_n) \cdot p_{n1} = p_1^{(0)} \cdot p_{11} + p_2^{(0)} \cdot p_{21} + ... + p_n^{(0)} \cdot p_{n1} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)},..., p_n^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ ... \\ p_{n1} \end{pmatrix},$$

где умножение в правой части формулы проводится как умножение матриц «строка на столбец».

Аналогично

$$P(X(1) = s_i) = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)},..., p_n^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ ... \\ p_{ni} \end{pmatrix},$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что

$$(p_1^{(m)},..., p_n^{(m)}) = (p_1^{(0)},..., p_n^{(0)}) \cdot P^m, \quad (4)$$

где *P* – матрица вероятностей переходов. Таким образом, $P(m) = P^m$ – матрица вероятностей переходов цепи Маркова за m шагов, и для матриц $P(m)$ выполняется условие

$$P(m_1) \cdot P(m_2) = P(m_1 + m_2), \quad (5)$$

называемое уравнением Чепмена–Колмогорова.

Для матриц $P=(p_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ и векторов, которые фигурируют в формулах (4) и (5), выполняются равенства (6) и (7).

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1;\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^{(m)}=1. \tag{7}$$

Такие матрицы и векторы называются стохастическими.

Пример 3. Для цепи Маркова из примера 1 найдем векторы распределения вероятностей через а) 1 шаг; б) 2 шага; ($\vec{p}^{(0)}=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$ – система находится в состоянии s_1). По формуле (3):

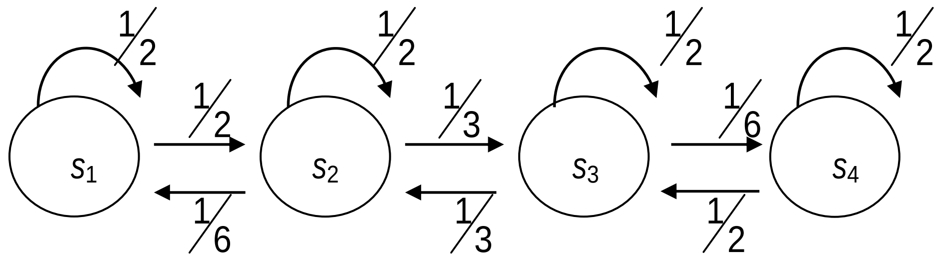
а) $$\vec{p}^{(1)}=\vec{p}^{(0)}\cdot P=(1,\ 0,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0;\ 0\right);$$

б) по формуле (4):

$$\vec{p}^{(2)}=\vec{p}^{(0)}\cdot P^2=(\vec{p}^{(0)}\cdot P)P=\vec{p}^{(1)}\cdot P=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{6};0\right).$$

Определение 5. Цепь Маркова называется регулярной, если $\exists\, m\in N$ такое, что все элементы матрицы P^m положительны. (Из любого состояния s_i в любое другое состояние s_j можно попасть за конечное число шагов с ненулевой вероятностью).

Пример 4. Цепь Маркова из примера 1 нерегулярна. Изменим условие примера 1. И будем считать, что работа не заканчивается, когда цепь будет в состоянии s_4, а конструктор будет продолжать заменять элементы по тому же алгоритму. Тогда граф будет иметь вид:



Такая цепь Маркова – регулярна.

Теорема 2. Пусть цепь Маркова $X(t)$ – регулярна. Тогда:

1) матрица вероятностей переходов P имеет единственный неподвижный стохастический вектор $\vec{q}$, все координаты которого положительны:

$$\vec{q} \cdot P = \vec{q}; \tag{8}$$

2) если $\vec{p}$ – любой стохастический вектор, то

$$\lim_{m \to \infty} \vec{p} \cdot P^m = \vec{q}. \tag{9}$$

Вектор $\vec{q}$ называется вектором финальных вероятностей.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что при $m \to \infty$ регулярная цепь Маркова будет переходить в установившийся режим. При этом вектор вероятностей состояний системы $\vec{q}$ в этом режиме не зависит от начального состояния системы. Вектор $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots q_n)$ можно находить из системы уравнений:

$$\begin{cases} (q_1, q_2, \ldots q_n) \cdot P = (q_1, q_2, \ldots q_n) \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \end{cases} \tag{10}$$

или из системы

$$\begin{cases} (q_1, q_2, \ldots q_n) \cdot (P - E) = (0, 0, \ldots 0) \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \end{cases}, \tag{11}$$

где E – единичная матрица.

При решении системы (10) любое одно из первых n уравнений системы можно отбросить, так как оно будет следовать из остальных.

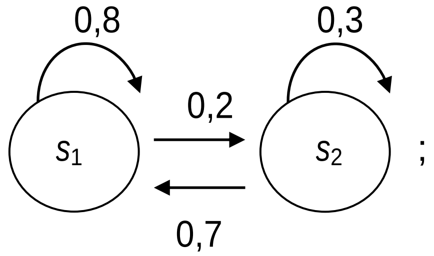
Из (9) следует, что координаты q_j вектора $\vec{q}$ обладают также свойством

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}(m) = q_j,\ i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, n,$$

где $p_{ij}(m)$ – $(i,\ j)$-й элемент матрицы P^m.

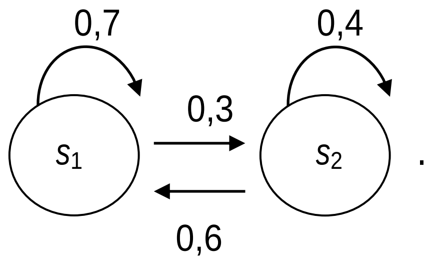
Пример 5. В распоряжении конструктора имеется 2 устройства. Эти устройства могут находится в одном из двух состояний: s_1 – устройство работает хорошо, s_2 – устройство требует регулировки. Граф состояний для устройств:

1-е устройство



;

2-е устройство



.

Какое из устройств предпочтительней использовать?

Решение. Матрицы вероятностей переходов:

1-е устройство: $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$,

2- е устройство: $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

По формуле (10):

$$\begin{cases} (q_1 \quad q_2)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} = (q_1 \quad q_2) \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (q_1 \quad q_2)\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = (q_1 \quad q_2) \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,8q_1 + 0,7q_2 = q_1 \\ 0,2q_1 + 0,3q_2 = q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0,7q_1 + 0,6q_2 = q_1 \\ 0,3q_1 + 0,4q_2 = q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Отбрасываем вторые уравнения:

$$\begin{cases} 0,8q_1 + 0,7q_2 = q_1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0,7q_1 + 0,6q_2 = q_1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Решая, получим:

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{7}{9}; \frac{2}{9}\right) \qquad (q_1, q_2) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$\dfrac{7}{9} > \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ первое устройство предпочтительней использовать.

Пример 6. Заданы матрица вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\vec{p}^{(0)}$ начального распределения вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}^{(0)} = (0,5;\, 0,5;\, 0).$$

Требуется:

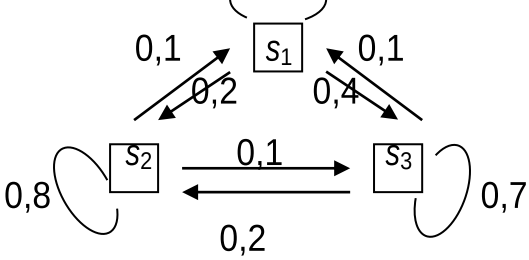
1) построить граф состояний системы;

2) найти вектор $\vec{p}^{(2)}$ распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага;

3) найти финальные вероятности.

Решение.

1) Система может находиться в одном из трех состояний: s_1, s_2, s_3, при этом элемент p_{ij} матрицы P задает вероятность перехода из состояния s_i в s_j за один шаг. Поэтому граф состояний системы имеет вид:



.

2) Вектор $\vec{p}^{(2)}$ распределения вероятностей состояний системы через 2 шага находится по формуле (4): $\vec{p}^{(2)} = \vec{p}^{(0)} \cdot P^2$. Применяя правило умножения матриц, получим:

$$\vec{p}^{(2)} = \left[(0,5;\, 0,5;\, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,25;\, 0,5;\, 0,25) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,175;\, 0,5;\, 0,325).$$

3) Для нахождения финальных вероятностей (q_1, q_2, q_3) решим систему уравнений (11):

$$(q_1, \quad q_2, \quad q_n) \cdot (P - E) = (0,\ 0,\ 0);$$

$$(q_1;\, q_2;\, q_3) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = (0;\, 0;\, 0);$$

$$(q_1, \quad q_2, \quad q_3) \cdot \begin{pmatrix} -0,6 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0).$$

Умножая матрицы, получим систему

$$\begin{cases} -0,6q_1 + 0,1q_2 + 0,1q_3 = 0; \\ 0,2q_1 - 0,2q_2 + 0,2q_3 = 0; \\ 0,4q_1 + 0,1q_2 - 0,3q_3 = 0. \end{cases}$$

При этом необходимо учесть дополнительное условие $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Отбросим третье уравнение, т.к. оно является следствием двух первых (сумма двух первых уравнений дает третье). Получим систему

$$\begin{cases} -0,6q_1 + 0,1q_2 + 0,1q_3 = 0; \\ 0,2q_1 - 0,2q_2 + 0,2q_3 = 0; \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на –10, а второе на 5, получим:

$$\begin{cases} 6q_1 - q_2 - q_3 = 0; \\ q_1 - q_2 + q_3 = 0; \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера, получим:

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{14}; \quad q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{14}; \quad q_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{14}.$$

Поэтому вектор финальных вероятностей $\vec{q} = \left(\frac{2}{14}; \frac{7}{14}; \frac{5}{14} \right)$.

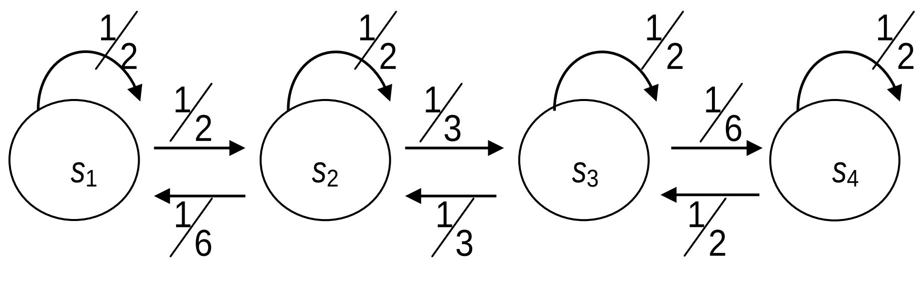
Замечание. Систему уравнений (8) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i p_{ij} = q_j; \ j = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} q_i p_{ij} = (1 - p_{jj}) q_j; \ j = 1, 2, ..., n. \qquad (12)$$

Система (12) называется системой балансовых уравнений: слева стоит суммарный поток вероятностей переводящий систему из любого состояния в состояние s_j; справа – суммарный поток вероятностей выводящий систему из состояния s_j; $j = 1, 2, ..., n$.

Пример 7. Для цепи Маркова из примера 4 составить систему балансовых уравнений и найти финальные вероятности.

Решение.



Проходя по вершинам цепи составляем систему уравнений,

$$\begin{cases} s_1: \ \frac{1}{6}q_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)q_1 \\ s_2: \ \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{3}q_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)q_2 \\ s_3: \ \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{2}q_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right)q_3 \\ s_4: \ \frac{1}{6}q_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)q_4 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 \end{cases}$$

Далее, отбрасывая 3-е уравнение, получим:

$$\begin{cases} q_2 = 3q_1 \\ 3q_1 + 2q_3 = 3q_2 \\ q_3 = 3q_4 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1. \end{cases}$$

Решение системы:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right).$$

Упражнения

13.1. Заданы матрица $P = (p_{ij})_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\vec{p}^{(0)}$ начального распределения вероятностей. Требуется:

1) построить граф состояний системы;

2) найти вектор $\vec{p}^{(2)}$ распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага;

3) найти финальные вероятности.

а) $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{p}^{(0)} = (0,3;\ 0,2; 0,5)$.

б) $P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}^{(0)}=(0,6;\ 0,4;0)$.

в) $P=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{p}^{(0)}=(0;\ 0,5;0,5)$.

г) $P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\vec{p}^{(0)}=(0,3;\ 0,5;0,2)$.

д) $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}^{(0)}=(0,5;\ 0;0,5)$.

§ 14. Потоки событий

Определение 1. Потоком событий будем называть последовательность однородных событий, появляющихся в случайные моменты времени.

Пример 1. Поток заявок на обслуживание, поток отказов элемента, поток его восстановлений.

Замечание. С потоком событий можно связать случайный процесс $X(t)$ – число событий потока на промежутке времени $[0, t)$ (см. пример 2 § 12). Для СП $X(t)$ везде ниже будем рассматривать еще случайную величину $X(t, \Delta t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ – число событий потока на промежутке времени $[t, t + \Delta t)$.

Определение 2. Поток называется потоком без последействий, если $\forall n$ и для любых моментов времени $t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n$, таких, что $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$, случайные величины $X(0, t_1 - 0)$, $X(t_1, t_2 - t_1)$, $X(t_2, t_3 - t_2), ..., X(t_{n-1}, t_n - t_{n-1})$ – независимы.

При этом СП $X(t)$ также называется процессом без последействий или марковским процессом.

Поток называется ординарным, если $\forall t \in R$ выполняется равенства:

1) $P(X(t, \Delta t) > 1) = o(\Delta t)$;

2) $P(X(t, \Delta t) = 1) = \lambda(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, (1)

где $\lambda(t) > 0, o(\Delta t)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δt при $\Delta t \to 0$;

$\lambda(t)$ – параметр потока.

Ординарный поток без последействий называется пуассоновским потоком, а соответствующий случайный процесс $X(t)$ – пуассоновским процессом.

Замечание. Как следует из определения 2, в потоке без последействий $\forall t_0 \in R$ будущие моменты наступления событий потока при $t > t_0$ не зависят от прошлых. Ординарность потока означает, что вероятностью наступления двух и более событий на промежутке времени длины Δt при малом Δt можно пренебречь. При этом $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(X(t, \Delta t) > 1)}{P(X(t, \Delta t) = 1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}}{\lambda(t) + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}} = 0$, поэтому $P(X(t, \Delta t) > 1)$ также пренебрежительно мало по сравнению с $P(X(t, \Delta t) = 1)$ при малом Δt.

Определение 3. Поток называется стационарным, если $\forall t_1, t_2 \in R, t_1 < t_2$, случайные величины $X(t_1, \Delta t)$ и $X(t_2, \Delta t)$ одинаково распределены.

Стационарный пуассоновский поток называется простейшим.

Замечание. Из стационарности потока следует, что $\forall\, t$ $\lambda(t) = \lambda - \text{const}$, где $\lambda(t)$ – функция в формуле (1).

Теорема 1. Рассмотрим стационарный пуассоновский поток, пусть $X(t)$ – соответствующий случайный процесс. Рассмотрим СВ $X(0,\, t)$. Тогда $X(0,\, t)$ распределена по закону Пуассона $\Pi(\lambda \cdot t)$, т.е.

$$P(X(0,\, t) = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{2}$$

Доказательство. Разобьем промежуток $[0,\, t)$ на n частичных промежутков равной длины $\Delta t = \dfrac{t}{n}$ точками $t_0 = 0, t_1,\, t_2, \ldots, t_{n-1},\, t_n = t$; $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$. Тогда вследствие ординарности потока при достаточно малых Δt случайные величины $X(t_i,\, \Delta t)$ принимают значения 1 (с вероятностью $p = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$) или 0 (с вероятностью $q = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$), вероятности остальных значений пренебрежительно малы по сравнению с Δt при $\Delta t \to 0$. Тогда

$$P(X(0,\, t) = k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} C_n^k \cdot (\lambda \Delta t)^k \cdot (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}.$$

При этом $n \cdot p = n \cdot (\lambda \cdot \Delta t) = \lambda \cdot t$ – константа, не зависящая от n, поэтому по теореме Пуассона (теорема 1 § 2) $P(X(0,\, t) = k) = \dfrac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$ – ч.т.д.

Замечание. Аналогично, $\forall t_0, \tau; t_0 \ge 0,\, \tau \ge 0$ СВ $X(t_0,\, \tau)$ распределены по закону $\Pi(\lambda \cdot \tau)$.

Определение 4. Пусть $m(t) = M(X(0,\, t))$, где $M(X(0,\, t))$ – математическое ожидание СВ $X(0,\, t)$. Параметром потока событий будем называть функцию

$$\omega(t) = m'(t). \tag{3}$$

Замечание.

$$\omega(t) = m'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(X(0, t + \Delta t)) - M(X(0,\, t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(X(t, \Delta t))}{\Delta t} -$$

среднее число событий потока на промежутке $[t,\ t + \Delta t)$, отнесенное к длине этого промежутка. Если поток простейший, то из теоремы 1 следует, что $m(t) = \lambda t,\, \omega(t) = m'(t) = \lambda$, и поэтому параметр λ в формуле (1) задает среднее число событий потока в единицу времени.

Найдем еще закон распределения СВ T – времени между двумя соседними событиями в простейшем потоке.

СВ T принимает значения из промежутка $\left[0; +\infty\right)$, при этом

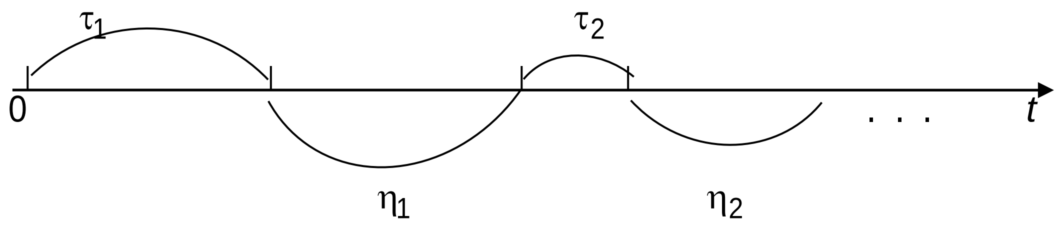
$$F_T(\tau) = P(T < \tau) = 1 - P(X(0,\tau) = 0) = \left|\text{по формуле (2)}\right| = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Таким образом,

$$F_T(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}. \tag{4}$$

Поэтому СВ T распределена по закону $\mathrm{Ex}(\lambda)$.

Определенный таким образом поток событий хорошо работает в системах массового обслуживания. При этом поток требований, поступающих в систему часто принимается простейшим. Если же рассматривать потоки отказов и восстановлений элемента на промежутке времени $[0, t)$, то этот промежуток необходимо разбить на последовательность чередующихся промежутков τ_i его работы и η_i его восстановления, $i = 1, 2, \ldots$:



При этом на промежутках $\eta_1, \eta_2, \ldots$ не происходит событий в потоке отказов. А на промежутках $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – в потоке восстановлений. Если время восстановления пренебрежимо мало по сравнению с временем работы (мгновенное восстановление), то промежутками η_i можно пренебречь.

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \frac{1}{T_{\text{ср}}}, \tag{5}$$

где $T_{\text{ср}}$ – среднее время безотказной работы элемента.

И $\omega(t)$ – параметр потока отказов удовлетворяет уравнению Вольтерра второго рода:

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(x) \cdot f(t - x)dx, \tag{6}$$

где $f(t)$ – плотность распределения СВ T – времени наработки на отказ. При этом в случае простейшего потока $\omega(t) = \lambda, \ \forall t$.

Пример 2. Поток отказов элемента – простейший с интенсивностью $\lambda = 4$ (отказа/сутки). Найти вероятность того, что 1) за 12 ч: а) элемент откажет ровно 1 раз; б) хотя бы 1 раз; 2) $P(4\text{ ч} \le T < 8\text{ ч})$.

Решение.

1) τ – длина промежутка = 12 ч $= \dfrac{1}{2}$ суток. Поэтому $\lambda \cdot \tau = 2$ (отказа).

Тогда по формуле (2) для случая а) $P\left(X\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 1\right) = \dfrac{(\lambda\tau)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda\tau} = 2 \cdot e^{-2}$;

для случая б) $P\left(X\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \ge 1\right) = 1 - P\left(X\left(0, \dfrac{1}{2}\right) = 0\right) = 1 - \dfrac{(\lambda\tau)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda\tau} = 1 - e^{-2}$.

2)

$$P\left(\frac{1}{6} \le T < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{6}\right) = \left|\text{по формуле (4)}\right| = \left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{4}{6}}\right) = e^{-\frac{4}{6}} - e^{-\frac{4}{3}}.$$

Предположим, что промежутками восстановлений пренебречь нельзя. Пусть $X_{\text{от}}(0,\ t)$, $X_{\text{в}}(0,\ t)$ – случайные величины, задающие соответственно число отказов, восстановлений элемента на промежутке $[0,\ t)$, $m_{\text{от}}(t) = M(X_{\text{от}}(0,t)), m_{\text{в}}(t) = M(X_{\text{в}}(0,t))$.

Тогда $\omega_{\text{от}}(t) = m'_{\text{от}}(t)$ ($\omega_{\text{в}}(t) = m'_{\text{в}}(t)$) – параметры потока отказов (восстановлений) элемента. Можно показать, что

$$\omega_{\text{от}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, \Delta t)}{\Delta t}, \tag{7}$$

где $P(t,\ \Delta t)$ – вероятность отказа элемента на промежутке $[t\ ,\ t + \Delta t)$. Тогда

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{P(t,\Delta t)}{\Delta t} - \omega_{\text{от}}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{P(t,\Delta t) - \omega_{\text{от}}(t)\Delta t}{\Delta t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{от}}(t,\Delta t) = \omega_{\text{от}}(t)\Delta t + o(\Delta t). \tag{8}$$

Аналогично

$$P_{\text{в}}(t,\Delta t) = \omega_{\text{в}}(t)\Delta t + o(\Delta t) \tag{9}$$

(сравни с формулой (1)).

Определение 5. Интенсивностью потока отказов (восстановлений) элемента будем называть функцию

$$\lambda_{\text{от}}(t)=\frac{\omega_{\text{от}}(t)}{K_p(t)}\ \left(\lambda_{\text{в}}(t)=\frac{\omega_{\text{в}}(t)}{K_{\text{от}}(t)}\right), \tag{10}$$

если $K_p(t)\neq 0\ (K_{\text{от}}(t)\neq 0)$; $K_p(t)\ (K_{\text{от}}(t))$ – вероятность того, что элемент находится в рабочем (отказовом) состоянии в момент времени t.

Замечание. Из формул (10), (9) следует, что

$$\lambda_{\text{от}}(t)\cdot\Delta t=\frac{\omega_{\text{от}}(t)}{K_p(t)}\cdot\Delta t=\frac{p_{\text{от}}(t,\Delta t)}{K_p(t)}+o(\Delta t),$$

то есть $\lambda_{\text{от}}(t)\cdot\Delta t$ задает условную вероятность перехода из рабочего в отказовое состояние на промежутке $[t,\, t+\Delta t)$ при условии, что элемент был в рабочем состоянии в момент времени t. Аналогично $\lambda_{\text{в}}(t)\cdot\Delta t$ задает условную вероятность перехода из отказового состояния в рабочее на промежутке $[t,\, t+\Delta t)$ при условии, что элемент был в отказовом состоянии в момент времени t.

Таким образом характеристиками потока отказов элемента являются:

$\omega_{\text{от}}(t)$ – параметр потока отказов;

$\lambda_{\text{от}}(t)$ – интенсивность потока отказов;

$K_p(t)$ – вероятность того, что элемент находится в рабочем состоянии в момент времени t;

T_p – среднее время наработки элемента на отказ.

Аналогично для потока восстановлений элемента:

$\omega_{\text{в}}(t)$ – параметр потока восстановлений;

$\lambda_{\text{в}}(t)$ – интенсивность потока восстановлений;

$K_{\text{от}}(t)$ – вероятность того, что элемент находится в отказовом состоянии в момент времени t;

$T_{\text{от}}$ – среднее время восстановления элемента.

Рассматривают еще и $K_p=\lim\limits_{t\to\infty}K_p(t)\ \left(K_{\text{от}}=\lim\limits_{t\to\infty}K_{\text{от}}(t)\right)$ – вероятность того, что элемент будет в рабочем (отказовом) состоянии при длительной эксплуатации (финальные вероятности)

При этом

$$K_p=\frac{T_p}{T_p+T_{\text{от}}},\quad K_{\text{от}}=\frac{T_{\text{от}}}{T_p+T_{\text{от}}}. \tag{11}$$

§ 15. Марковские процессы

Определение 1. Случайный процесс $X(t)$ с дискретными состояниями $S=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ и непрерывным временем называется марковским, если $\forall\ s_i, s_j \in S, \forall k \in N$ и $\forall t_1, t_2, ..., t_{k-1}, t_k$, $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k$ и для любых подмножеств $B_1, B_2, ..., B_{k-2} \subset S$ выполняется условие

$$P\Big(X(t_k)=s_j \Big| X(t_1)\in B_1, X(t_2)\in B_2, ..., X(t_{k-2})\in B_{k-2}, X(t_{k-1})=s_i\Big)=$$

$$=P\Big(X(t_k)=s_j \Big| X(t_{k-1})=s_i\Big). \tag{1}$$

Замечание. Отличие от определения 1 § 13 в том, что моменты времени t_i, $i=1, ..., k$ не обязательно целые. Если строго следовать определению 1 из § 12, то в качестве S надо брать множество $S=\{1, 2, ..., n\}$ и запись $X(t_k)=s_j$ подразумевает $X(t_k)=j$.

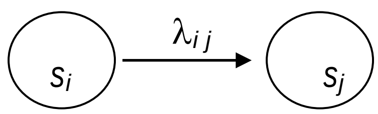
Будем считать, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновских потоков событий, то есть

$$p_{ij}(\Delta t)=P\Big(X(t+\Delta t)=s_j \Big| X(t)=s_i\Big)=\lambda_{ij}\cdot\Delta t+o(\Delta t),\ \forall i,\ j,\ i\ne j \tag{2}$$

и

$$p_{ii}(\Delta t)=P\Big(X(t+\Delta t)=s_i \Big| X(t)=s_i\Big)=1-\left(\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}\lambda_{ik}\right)\cdot\Delta t+o(\Delta t),$$

где λ_{ij} – интенсивность потока, переводящего систему из состояния s_i в состояние s_j, и при использовании графов состояний на дугах будем ставить интенсивности соответствующих потоков:



Найдем вероятность того, что $P(X(t+\Delta t)=s_1)$.

Пусть $(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t))$ – вектор распределения вероятностей состояний системы в момент времени t.

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(X(t+\Delta t)=s_1)=$$

$$P(X(t)=s_1)\cdot p_{11}(\Delta t)+P(X(t)=s_2)\cdot\lambda_{21}\Delta t+...+P(X(t)=s_n)\cdot\lambda_{n1}\Delta t+o(\Delta t),$$

то есть

$$p_1(t+\Delta t)=p_1(t)\cdot p_{11}(\Delta t)+p_2(t)\cdot\lambda_{21}\Delta t+...+p_n(t)\cdot\lambda_{n1}\Delta t+o(\Delta t). \qquad (3)$$

Вычтем $p_1(t)$ из обеих частей равенства (3), получим:

$$p_1(t+\Delta t)-p_1(t)=-p_1(t)\cdot(1-p_{11}(\Delta t))+p_2(t)\cdot\lambda_{21}\Delta t+...+p_n(t)\cdot\lambda_{n1}\Delta t+o(\Delta t).$$

Разделим обе части на Δt и найдем предел при $\Delta t\to 0$. При этом учитываем, что $1-p_{11}(\Delta t)=(\lambda_{12}+...+\lambda_{1n})\Delta t+o(\Delta t)$. Получим дифференциальное уравнение для $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=p_2(t)\cdot\lambda_{21}+...+p_n(t)\cdot\lambda_{n1}-p_1(t)(\lambda_{12}+...+\lambda_{1n}).$$

Аналогичные уравнения верны для любого $p_i(t),\ i=1,\ ...,\ n$, поэтому получаем систему уравнений (4).

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i(t)}{dt}=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j(t)\cdot\lambda_{ji}-p_i(t)\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\cdot\lambda_{ij};\ i=1,\ 2,\ ...,\ n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t)=1. \end{cases} \qquad (4)$$

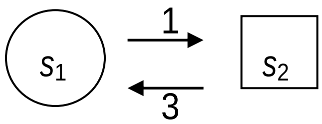
Система уравнений (4) называется системой уравнений Колмогорова. Ее решают при начальных данных $(p_1(t),\ p_2(t),...,\ p_n(t))\big|_{t=0}=(p_1(0),\ p_2(0),...,\ p_n(0))$. При этом любое одно из первых n уравнений можно отбросить, так как оно является следствием из остальных. Формально система (4) выписывается аналогично балансовым уравнениям (12) § 13.

Пример 1. Прибор может находится в одном из двух состояний:

s_1 – исправен и работает, $\boxed{s_2}$ – не исправен.

На прибор в состоянии s_1 действует поток отказов с интенсивностью $\lambda=1\ \dfrac{\text{отказ}}{\text{сутки}}$. На прибор в состоянии s_2 действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu = 3\ \dfrac{\text{восст.}}{\text{сутки}}$. Составить граф состояний, систему Колмогорова и решить ее. В начальный момент прибор находится в состоянии s_1.

Решение. Граф состояний



По формулам (4):

$$\begin{cases} p_1' = 3p_2 - p_1 \\ p_2' = p_1 - 3p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1' = 3p_2 - p_1 \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

и начальные данные $(p_1(0),\ p_2(0)) = (1,\ 0)$.

Из второго уравнения $p_2 = 1 - p_1$. Подставляем это значение в первое уравнение системы:

$p_1' + 4p_1 = 3$ – линейное уравнение; (5)

$p_1 = C_1 \cdot e^{-4t} + \dfrac{3}{4}$ – общее решение уравнения (5);

$p_1(0) = 1 \Rightarrow p_1(t) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}e^{-4t}$ – частное решение уравнения (5). Тогда

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t}$$

и

$$\begin{cases} p_1(t) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}e^{-4t} \\ p_2(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}e^{-4t} \end{cases} \text{– решение системы.}$$

При этом $\lim\limits_{t\to\infty} p_1(t) = \dfrac{3}{4}$; $\lim\limits_{t\to\infty} p_2(t) = \dfrac{1}{4}$ – финальные вероятности.

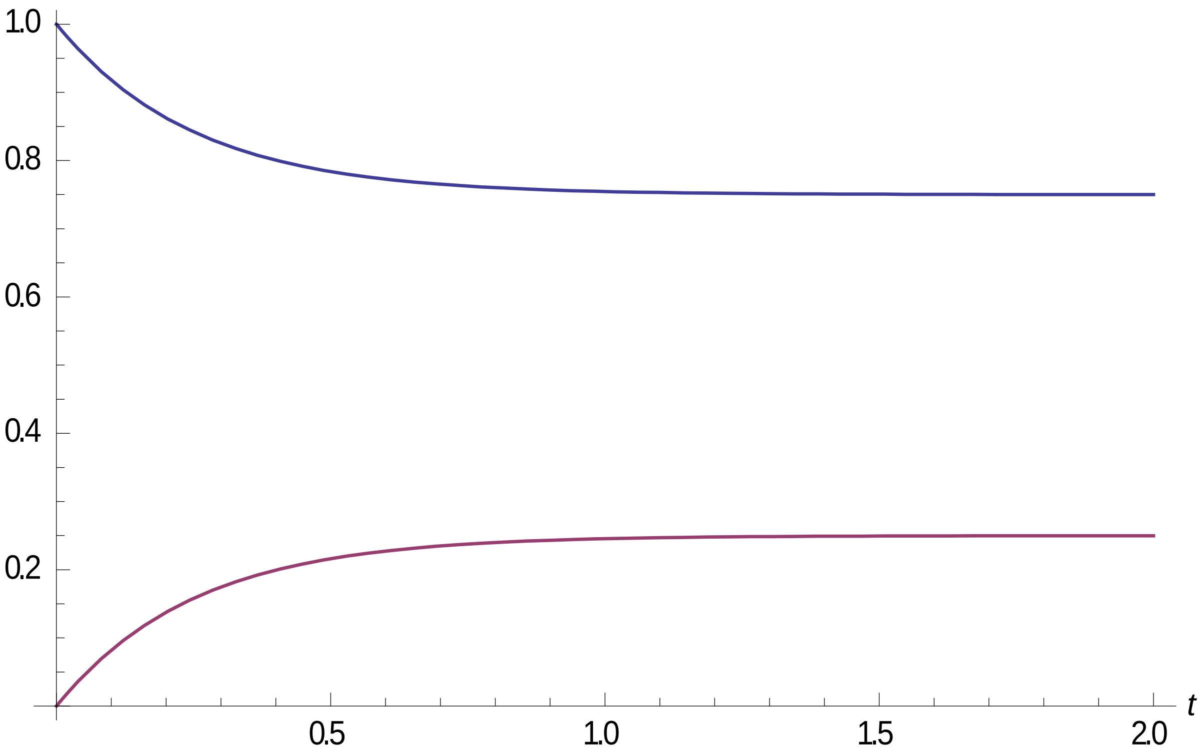
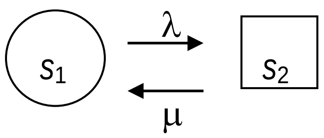


Рис. 1. Графики $p_1(t)$ и $p_2(t)$ решений системы

Замечание. В общем случае для процесса вида:



Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_1' = \mu p_2 - \lambda p_1 \\ p_2' = \lambda p_1 - \mu p_2 \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

и при начальных данных вида $(p_1(0),\ p_2(0)) = (1,\ 0)$ решение будет:

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} = K_p(t);$$

$$p_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} = K_{\text{от}}(t).$$

При этом $K_p = \lim\limits_{t\to\infty} K_p(t) = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}$, $K_{\text{от}} = \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}$.

Определение 2. Предположим, что для марковского процесса $X(t)$ потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние – простейшие, и из любого состояния можно попасть в любое другое за некоторое количество шагов. Такой процесс $X(t)$ называется эргодическим.

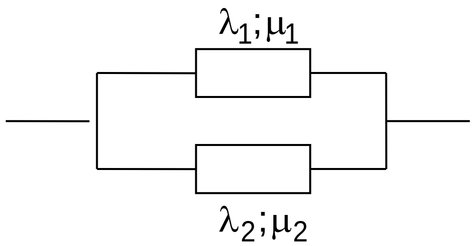
Определение 3. Предельным режимом для процесса $X(t)$ называется режим, установившийся в системе при $t \to \infty$. Вектор $\vec{q}$ распределения вероятностей состояний системы в предельном режиме называется вектором финальных вероятностей.

Теорема 1. Для эргодического марковского процесса $X(t)$ с конечным числом состояний n предельный режим существует. При этом координаты q_j вектора финальных вероятностей $\vec{q}$ обладают свойством $\lim\limits_{t \to \infty} p_{ij}(t) = q_j,\ i, j = 1, ..., n$ и являются единственным решением системы линейных уравнений (6).

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_j \cdot \lambda_{ji} - q_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \cdot \lambda_{ij} = 0; i = 1, 2, ..., n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Любое одно из первых n уравнений можно отбросить, так как оно является следствием из остальных.

Пример 2. Дана логическая схема дублированной системы с постоянно включенным резервом:



где λ_1, λ_2 – интенсивности потока отказов элементов, μ_1, μ_2 – интенсивности потока восстановлений. В начальный момент оба элемента в рабочем состоянии. Систему обслуживают две бригады. Выписать граф состояний, составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы. Решить систему для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \dfrac{1}{\text{сутки}}$, $\mu_1 = \mu_2 = 3 \dfrac{1}{\text{сутки}}$. Найти финальные вероятности.

Решение. Пусть

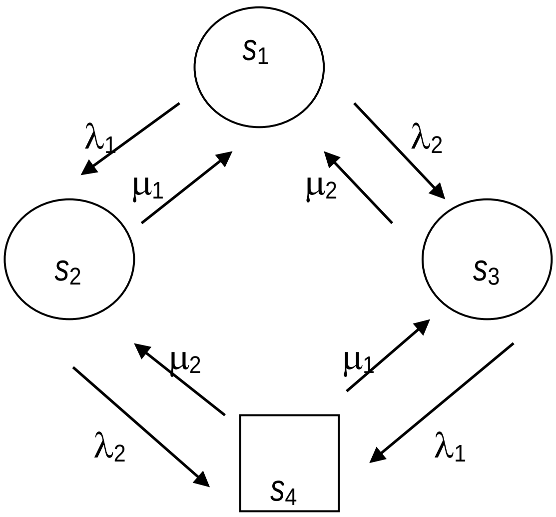
s_1 – оба элемента работают, система работает;

s_2 – первый элемент отказал и ремонтируется, второй элемент работает, система работает;

s_3 – первый элемент работает, второй элемент отказал и ремонтируется, система работает;

s_4 – оба элемента отказали и ремонтируются, система отказала.

Тогда граф состояний:



При этом система (4) будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)\,p_1 + \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 \\
\dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_1 p_1 - (\mu_1 + \lambda_2)\,p_2 + \mu_2 p_4 \\
\dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_2 p_1 - (\lambda_1 + \mu_2)\,p_3 + \mu_1 p_4 \\
\dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_3 - (\mu_1 + \mu_2)\,p_4 \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1
\end{cases}
$$

Начальные данные: $\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0), p_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$.
Решим систему для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -2p_1 + 3p_2 + 3p_3 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = p_1 - 4p_2 + 3p_4 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = p_1 - 4p_3 + 3p_4 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = p_2 + p_3 - 6p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$ с начальными данными $\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$.

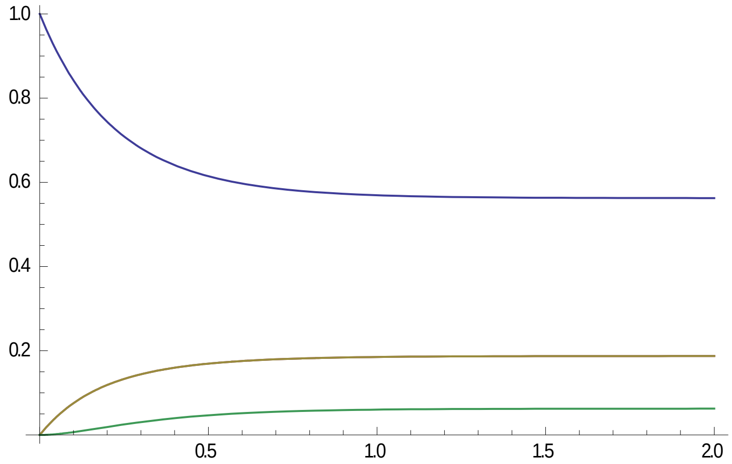
Решаем в пакете Mathematica.

```
Группа ячеек ввода
d=DSolve[{p1'[x]==
-2*p1[x]+3*p2[x]+3*p3[x],p2'[x]==
=p1[x]-4*p2[x]+3*p4[x],p3'[x]==p1[x]-
4*p3[x]+3*p4[x],p1[x]+p2[x]+p3[x]+p4[x]==1,p1[0]==1,
p2[0]==0,p3[0]==0,p4[0]==0}, {p1,p2,p3,p4},x]
FullSimplify[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x]}/.%]
Plot[Evaluate[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x]}/.First[d]],
{x,0,2}]
```

---Ячейки вывода --

{{p1 → Function[{x}, $\frac{1}{16}e^{-8x}(1+3e^{4x})^2$], p2 → Function[{x}, $\frac{1}{16}e^{-8x}(-1-2e^{4x}+3e^{8x})$], p3 → Function[{x}, $\frac{1}{16}e^{-8x}(-1-2e^{4x}+3e^{8x})$], p4 → Function[{x}, $\frac{1}{16}e^{-8x}(-1+e^{4x})^2$]}}

{{$\frac{1}{16}e^{-8x}(1+3e^{4x})^2$, $\frac{1}{16}(3-e^{-8x}-2e^{-4x})$, $\frac{1}{16}(3-e^{-8x}-2e^{-4x})$, $\frac{1}{16}e^{-8x}(-1+e^{4x})^2$}}



Таким образом,

$$p_1(t)=\frac{9}{16}+\frac{6}{16}e^{-4t}+\frac{1}{16}e^{-8t},$$

$$p_2(t)=p_3(t)=\frac{3}{16}-\frac{2}{16}e^{-4t}-\frac{1}{16}e^{-8t},$$

$$K_{\text{от}}(t)=p_4(t)=\frac{1}{16}-\frac{2}{16}e^{-4t}+\frac{1}{16}e^{-8t},$$

$$K_p(t)=1-K_{\text{от}}(t).$$

Для нахождения финальных вероятностей не обязательно решать систему (4). Достаточно решить систему линейных уравнений (6)

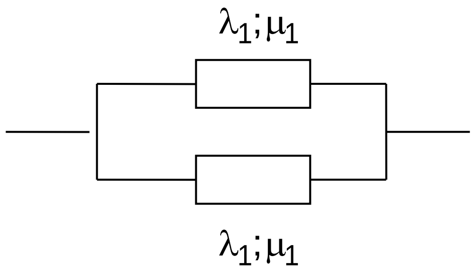
$$\begin{cases} -2q_1+3q_2+3q_3=0 \\ q_1-4q_2+3q_4=0 \\ q_1-4q_3+3q_4=0 \\ q_2+q_3-6q_4=0 \\ q_1+q_2+q_3+q_4=1, \end{cases}$$

которая составляется аналогично системе балансовых уравнений цепи Маркова. Отбрасываем, например, четвертое уравнение, получим:

$$\begin{cases} -2q_1 + 3q_2 + 3q_3 = 0 \\ q_1 - 4q_2 + 3q_4 = 0 \\ q_1 - 4q_3 + 3q_4 = 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{q}\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right).$$

Замечание. Если все элементы системы имеют одинаковые показатели интенсивностей отказов и восстановлений, то во многих случаях система описывается процессом гибели и размножения.

Пример 3. Рассмотрим систему из примера 2:



Тогда описать систему можно с помощью графа:

$$s_1 \underset{\mu_1}{\overset{2\lambda_1}{\rightleftarrows}} s_2 \underset{2\mu_1}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} \boxed{s_3},$$

где s_1 – оба элемента работают, система работает;

s_2 – один из двух элементов отказал и ремонтируется, система работает;

$\boxed{s_3}$ – оба элемента отказали и ремонтируются, система отказала.

При этом система уравнений (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \overline{p}_1' = -2\lambda_1 \overline{p}_1 + \mu_1 \overline{p}_2 \\ \overline{p}_2' = 2\lambda_1 \overline{p}_1 - (\lambda_1 + \mu_1) \overline{p}_2 + 2\mu_1 \overline{p}_3 \\ \overline{p}_3' = \lambda_1 \overline{p}_2 - 2\mu_1 \overline{p}_3 \\ \overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \overline{p}_3 = 1. \end{cases}$$

И решение $(\overline{p}_1(t), \overline{p}_2(t), \overline{p}_3(t))$ системы связано с решением $(p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t))$ системы из примера 2 равенствами:

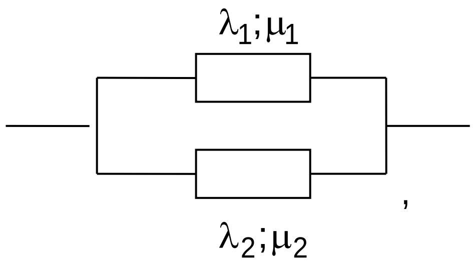
$\overline{p}_1(t) = p_1(t), \overline{p}_2(t) = p_2(t) + p_3(t), \overline{p}_3(t) = p_4(t);$

вектор $\vec{q}$ финальных вероятностей: $\vec{q} = \left(\frac{9}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16} \right)$.

Замечание. При описании систем часто приходится определять вероятность того, что за время t система попадет в какое-то, например s_i – *e*, из своих состояний. В этом случае это состояние делают поглощающим, убирая выходы из него во все остальные состояния. Далее для полученного графа состояний составляют систему уравнений Колмогорова и решение $p_i(t)$ будет задавать искомую вероятность.

Необходимо при этом заметить, что система перестает быть эргодической.

Пример 4. Дана логическая схема дублированной системы с постоянно включенным резервом



,

где λ_1, λ_2 – интенсивности потока отказов элементов;

μ_1, μ_2 – интенсивности потока восстановлений.

В начальный момент оба элемента в рабочем состоянии. Систему обслуживает одна бригада с прямым приоритетом обслуживания (первым обслуживается элемент, который первым отказал).

1) Выписать граф состояний, составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы. Решить систему для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \frac{1}{\text{сутки}}$, $\mu_1 = \mu_2 = 6 \frac{1}{\text{сутки}}$. Найти финальные вероятности.

2) Определить вероятность того, что на промежутке времени $[0, t]$ система попадет в отказовое состояние: составить систему дифференциальных уравнений и решить ее для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \dfrac{1}{\text{сутки}}$, $\mu_1 = \mu_2 = 3 \dfrac{1}{\text{сутки}}$.

Решение.

1) Пусть

s_1 – оба элемента работают, система работает;

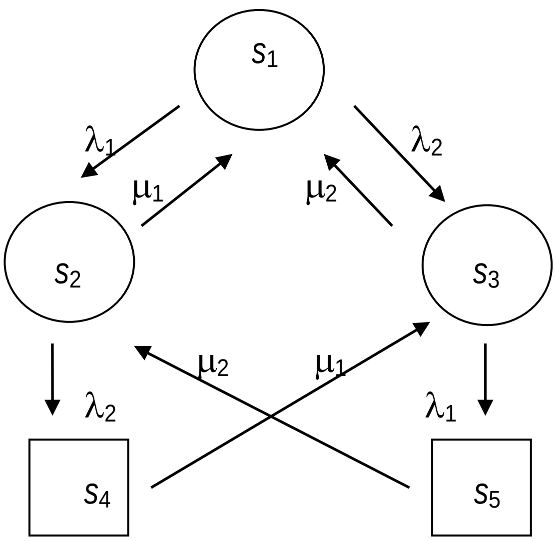
s_2 – первый элемент отказал и ремонтируется, второй элемент работает, система работает;

s_3 – первый элемент работает, второй элемент отказал и ремонтируется, система работает;

$\boxed{s_4}$ – первый элемент отказал и ремонтируются, второй отказал и ожидает ремонта, система отказала;

$\boxed{s_5}$ – второй элемент отказал и ремонтируются, первый отказал и ожидает ремонта, система отказала.

Тогда граф состояний:



При этом система (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2)\,p_1 + \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_1 p_1 - (\mu_1+\lambda_2)\,p_2 + \mu_2 p_5 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_2 p_1 - (\lambda_1+\mu_2)\,p_3 + \mu_1 p_4 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_2 - \mu_1 p_4 \\ \dfrac{dp_5}{dt} = \lambda_1 p_3 - \mu_2 p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Начальные данные: $\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0), p_4(0), p_5(0)) = (1, 0, 0, 0, 0)$.
Решим систему для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = 6$:

$$\begin{cases} p_1' = -2p_1 + 6p_2 + 6p_3 \\ p_2' = p_1 - 7p_2 + 6p_5 \\ p_3' = p_1 - 7p_3 + 6p_4 \\ p_4' = p_2 - 6p_4 \\ p_5' = p_3 - 6p_5 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Решая систему аналогично примеру 2, получим:

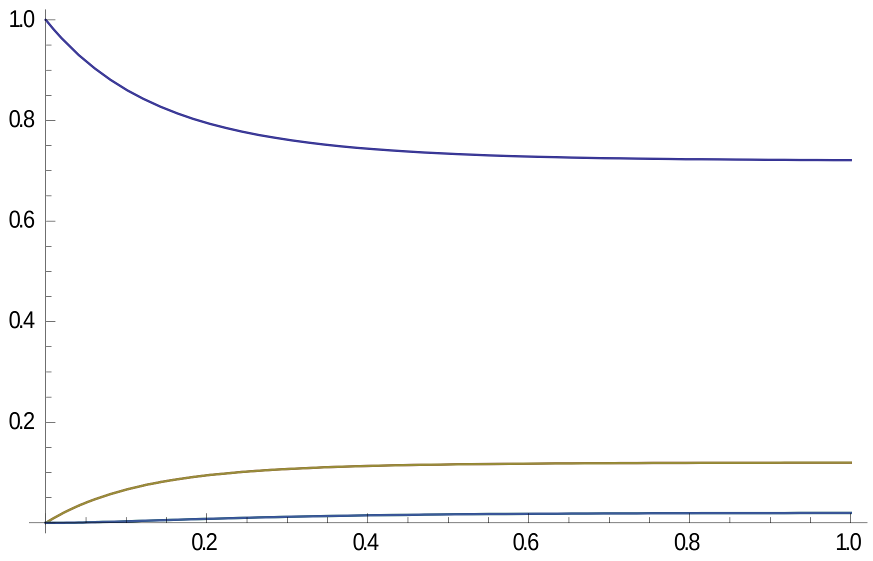
Группа ячеек ввода

```
d=DSolve[{p1'[x]==-
2*p1[x]+6*p2[x]+6*p3[x],p2'[x]==p1[x]-
7*p2[x]+6*p5[x],p3'[x]==p1[x]-7*p3[x]+6*p4[x],
   p4'[x]==p2[x]-
6*p4[x],p1[x]+p2[x]+p3[x]+p4[x]+p5[x]==1,p1[0]==1
p2[0]==0,p3[0]==0,p4[0]==0,p5[0]==0}, {p1,p2,p3,p4,p5},x]
FullSimplify[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x],p5[x]}/.%]
Plot[Evaluate[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x],p5[x]}/.First[d]
],{x,0,1}]
```

---Ячейки вывода ---

$$\{\{\mathrm{p1} \to \mathrm{Function}[\{x\}, \frac{1}{25}e^{-10x}(3+4e^{5x}+18e^{10x})], \mathrm{p2} \to \mathrm{Function}[\{x\}, \frac{1}{25}e^{-10x}(-2-e^{5x}+3e^{10x})], \mathrm{p3} \to \mathrm{Function}[\{x\}, \frac{1}{25}e^{-10x}(-2-e^{5x}+3e^{10x})], \mathrm{p4} \to \mathrm{Function}[\{x\}, \frac{1}{50}e^{-10x}(-1+e^{5x})^2], \mathrm{p5} \to \mathrm{Function}[\{x\}, \frac{1}{50}e^{-10x}(-1+e^{5x})^2]\}\}$$

$$\{\{\frac{1}{25}(18+3e^{-10x}+4e^{-5x}), \frac{1}{25}(3-e^{-10x}(2+e^{5x})), \frac{1}{25}(3-e^{-10x}(2+e^{5x})), \frac{1}{50}e^{-10x}(-1+e^{5x})^2, \frac{1}{50}e^{-10x}(-1+e^{5x})^2\}\}$$



Таким образом,

$$p_1(t) = \frac{18}{25} + \frac{3}{25}e^{-10t} + \frac{4}{25}e^{-5t},$$

$$p_2(t) = p_3(t) = \frac{3}{25} - \frac{2}{25}e^{-10t} - \frac{1}{25}e^{-5t},$$

$$p_4(t) = p_5(t) = \frac{1}{50} + \frac{1}{50}e^{-10t} - \frac{2}{50}e^{-5t},$$

$$K_{\text{от}}(t) = p_4(t) + p_5(t) = \frac{1}{25} + \frac{1}{25}e^{-10t} - \frac{2}{25}e^{-5t},$$

$$K_p(t) = 1 - K_{\text{от}}(t).$$

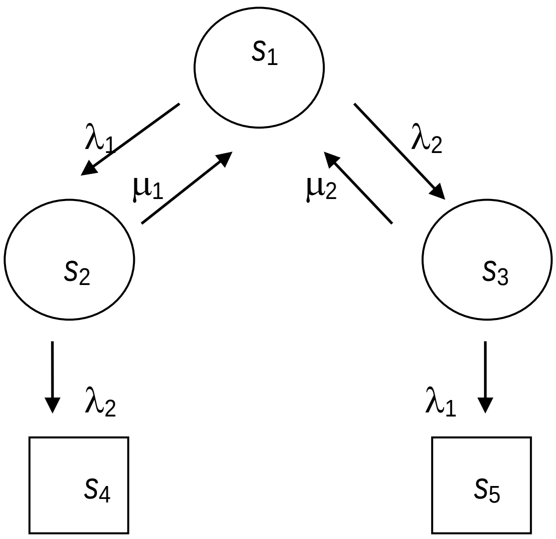
Система уравнений для финальных вероятностей:

$$\begin{cases} -2q_1 + 6q_2 + 6q_3 = 0 \\ q_1 - 7q_2 + 6q_5 = 0 \\ q_1 - 7q_3 + 6q_4 = 0 \\ q_2 - 6q_4 = 0 \\ q_3 - 6q_5 = 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\vec{q} = \left(\frac{18}{25}, \frac{3}{25}, \frac{3}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50} \right).$$

2) Сделаем состояния s_4 и s_5 – поглощающими, получим граф



Тогда система уравнений (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} p_1' = -(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_1 + \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 \\ p_2' = \lambda_1 p_1 - (\mu_1 + \lambda_2)\, p_2 \\ p_3' = \lambda_2 p_1 - (\lambda_1 + \mu_2)\, p_3 \\ p_4' = \lambda_2 p_2 \\ p_5' = \lambda_1 p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Начальные данные: $\vec{p}(0) = (1,\, 0,\, 0,\, 0, 0)$.

Решим систему для случая $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \mu_1 = \mu_2 = 3$:

$$\begin{cases} p_1' = -4p_1 + 3p_2 + 3p_3 \\ p_2' = 2p_1 - 5p_2 \\ p_3' = 2p_1 - 5p_3 \\ p_4' = 2p_2 \\ p_5' = 2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

$\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$.

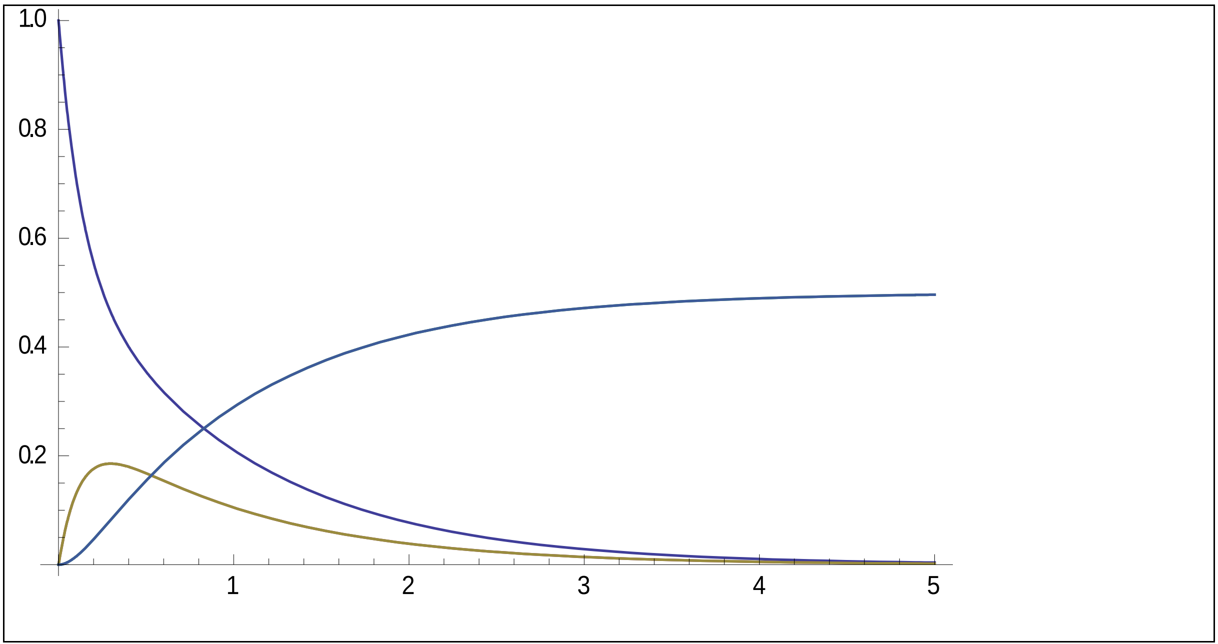
Группа ячеек ввода

```
d=DSolve[{p1'[x]==-
4*p1[x]+3*p2[x]+3*p3[x],p2'[x]==2*p1[x]-
5*p2[x],p3'[x]==2*p1[x]-5*p3[x],

p4'[x]==2*p2[x],p1[x]+p2[x]+p3[x]+p4[x]+p5[x]==1,p1[0]==
1,p2[0]==0,p3[0]==0,p4[0]==0,p5[0]==0},
{p1,p2,p3,p4,p5},x]
FullSimplify[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x],p5[x]}/.%]

Plot[Evaluate[{p1[x],p2[x],p3[x],p4[x],p5[x]}/.First[d]]
,{x,0,5}]
```

---Ячейки вывода --

$\{\{p1 \to \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{7}e^{-8x}(3+4e^{7x})], p2 \to \text{Function}[\{x\}, \frac{2}{7}e^{-8x}(-1+e^{7x})], p3$
$\to \text{Function}[\{x\}, \frac{2}{7}e^{-8x}(-1+e^{7x})], p4$
$\to \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{14}e^{-8x}(-1+e^{x})^2(1+2e^{x}+3e^{2x}+4e^{3x}+5e^{4x}+6e^{5x}$
$+7e^{6x})], p5$
$\to \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{14}e^{-8x}(-1+e^{x})^2(1+2e^{x}+3e^{2x}+4e^{3x}+5e^{4x}+6e^{5x}$
$+7e^{6x})]\}\}$

$\{\{\frac{1}{7}e^{-8x}(3+4e^{7x}), \frac{2}{7}e^{-8x}(-1+e^{7x}), \frac{2}{7}e^{-8x}(-1+e^{7x}), \frac{1}{14}(7+e^{-8x}-8e^{-x}), \frac{1}{14}(7+e^{-8x}-8e^{-x})\}\}$



Таким образом,

$$p_1(t) = \frac{4}{7}e^{-t} + \frac{3}{7}e^{-8t},$$

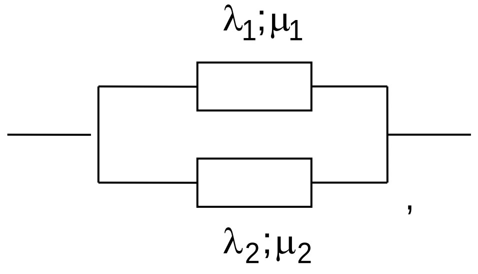
$$p_2(t) = p_3(t) = \frac{2}{7}e^{-t} - \frac{2}{7}e^{-8t},$$

$$p_4(t) = p_5(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{7}e^{-t} + \frac{1}{14}e^{-8t}.$$

Тогда $p = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = \frac{8}{7}e^{-t} - \frac{1}{7}e^{-8t}$ – вероятность того, что на промежутке времени $[0, t]$ система ни разу не попадет в отказовое состояние, $p = p_5(t) + p_4(t) = 1 - \frac{8}{7}e^{-t} + \frac{1}{7}e^{-8t}$ – вероятность того, что на промежутке времени $[0, t]$ система побывает в отказовом состоянии.

Упражнения

15.1. Логическая схема дублированной системы с постоянно включенным резервом:



,

где λ_1, λ_2 – интенсивности потока отказов элементов;

μ_1, μ_2 – интенсивности потока восстановлений.

В начальный момент оба элемента в рабочем состоянии:

а) систему обслуживают две бригады;

б) систему обслуживает одна бригада с обратным приоритетом обслуживания (первым ремонтируется элемент, который отказал последним).

1) Выписать граф состояний, составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы.

2) Решить систему для случая:

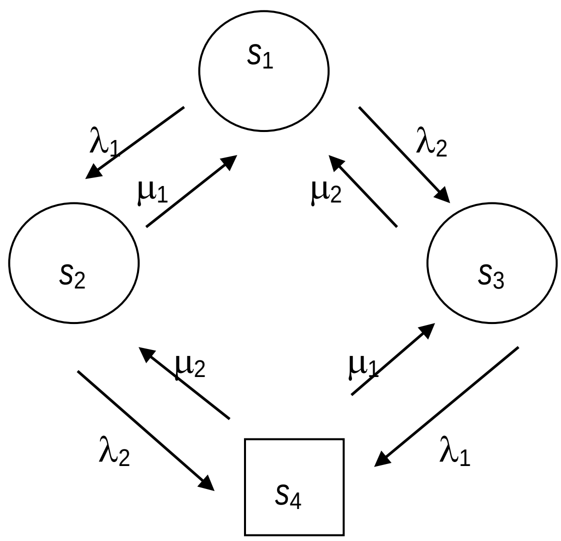
а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \dfrac{1}{\text{сутки}}$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4 \dfrac{1}{\text{сутки}}$;

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \dfrac{1}{\text{сутки}}$, $\mu_1 = \mu_2 = 6 \dfrac{1}{\text{сутки}}$.

Найти финальные вероятности.

Ответ.

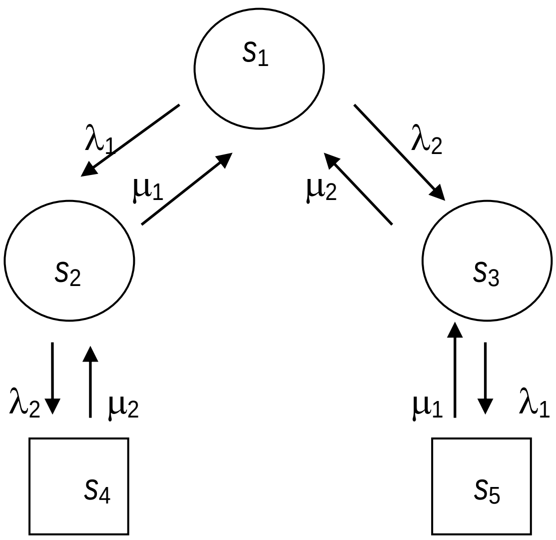
а)



Считаем состояния s_1, s_2, s_3, s_4 такими же, как и в примере 2,

$$\vec{q} = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15} \right).$$

б)



,

s_1 – оба элемента работают, система работает;

s_2 – первый элемент отказал и ремонтируется, второй элемент работает, система работает;

s_3 – первый элемент работает, второй элемент отказал и ремонтируется, система работает;

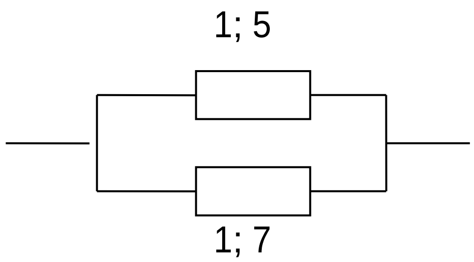
s_4 – первый элемент отказал (ожидает ремонта), второй элемент отказал и ремонтируется, система отказала.

s_5 – второй элемент отказал (ожидает ремонта), первый элемент отказал и ремонтируется, система отказала.

$$p_1 = \frac{1}{25}(18 + 3e^{-10t} + 4e^{-5t}),\ p_2 = p_3 = \frac{1}{25}(3 - 2e^{-10t} - e^{-5t});$$

$$p_4 = p_5 = \frac{1}{50}e^{-10t}(-1 + e^{5t})^2.$$

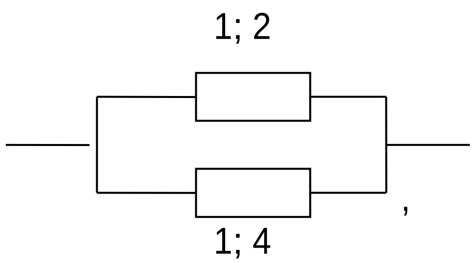
15.2. Для системы из упражнения 15.1 б) с логической схемой



найти финальные вероятности.

Ответ: $\vec{q}=\left(\frac{5}{7},\frac{1}{7},\frac{5}{49},\frac{1}{49},\frac{1}{49}\right)$.

15.3. Для системы из упражнения 15.1 б) с логической схемой

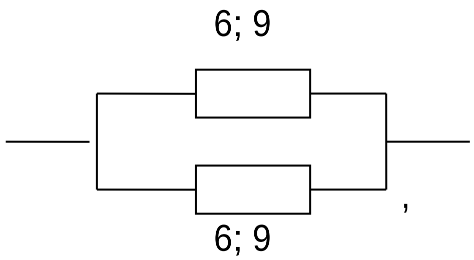


,

найти финальные вероятности.

Ответ: $\vec{q}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)$.

15.4. Для системы из примера 4 с логической схемой



,

определить вероятность того, что на промежутке времени $[0, t]$ ни разу не произойдет отказ.

Ответ: $p(t)=\frac{8}{7}e^{-3t}-\frac{1}{7}e^{-24t}$.

Литература

1. Половко, А. М. Основы теории надежности / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ–Петербург, 2008.

2. Половко, А. М. Основы теории надежности: практикум / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006.

3. Саульев, В. К. Математическая теория надежности и восстановления / В. К. Саульев. – М.: МАИ, 1974.

4. Ямпурин, Н. П. Основы надежности электронных средств / Н. П. Ямпурин, А. В. Баранова. – М.: Академия, 2010.

5. Голинкевич, Т. А. Прикладная теория надежности / Т. А. Голинкевич. – М.: Высшая школа, 1977.

6. Черкасов, Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов: учебное пособие / Г. Н. Черкасов. – СПб.: Питер, 2005.

7. Половко, А. М. Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб.: БХВ–Петербург, 2007.

Приложения

Приложение 1. Вычисления в среде Mathematica

Вы работаете в Mathematica (далее М.), создавая интерактивные документы. После запуска М. или открытия уже существующего файла набирают нужный текст или математическую команду. М. воспринимает то, что набрано как Input.

Обработка Input выполняется при нажатии клавиш: Shift + Enter. М. помечает Input меткой In[n]: и результат обработки выводит в Output, помечая его Out[n].

Текст и команды находятся в ячейках, которые М. объединяет в группы. Каждая ячейка (cell) имеет свой стиль. Границы групп и стиль ячеек показываются М. справа рабочего окна в виде квадратных скобок.

Можно выбирать стиль ячейки, используя команду Format. По умолчанию автоматически открываемая ячейка имеет стиль Input (Input style), который позволяет проводить математические вычисления. Если есть необходимость открыть новую ячейку, двигают курсор вниз ячейки, пока не появится горизонтальная линия. Если после этого нажать клавишу Enter, вы окажетесь в новой ячейке.

Синтаксис команд в М. соответствует здравому смыслу и широко распространенным языкам программирования.

Переменные в М. являются глобальными, названия стандартных функций пишутся с заглавной буквы, например: $y = x^2$ пишут $y = \mathrm{Sqr}[x]$, причем аргументы функций – в квадратных скобках. В М. имеется два операнда присваивания: обыкновенное присваивание, например $a = 3$, и задержанное присваивание, например $a := 3$.

Разница видна из примеров.

Пример 1. Обыкновенное присваивание.

```
In[1]:=
     a = 12
     b =  9
     c = Sqrt[a^2+b^2]
Out[1] = 12
Out[2] = 9
Out[3] = 15
```

Пример 2. Задержанное присваивание.

```
In[1]:=
    a := 12
    b :=  9
    c =  Sqrt[a^2+b^2]
Out[1] = 15
```

Замечание. Во втором случае значения a и b хранятся в оперативной памяти и не выводятся в Output. Интерфейс в М. достаточно приятен. Можно активно использовать Help. Например, копировать там шаблоны стандартных функций и переносить их в свой документ. При этом Copy, Cut, Paste такие же, как и в MS Word. Более подробно среда М. описана, например, в [7].

Пример 3. СВ T – время жизни элемента – распределена по закону $N(a;\sigma)$.

1) Построить график функции плотности вероятностей $f(t)$.

2) Построить график функции Лапласа $\Phi(x)$ (формула (13) § 2).

3) В М. значение $\Phi(t)$ можно находить через функцию $\text{Erf}\,[x_1, x_2]$ (Error function):

$$\text{Erf}\,[x_1, x_2] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2} dt. \qquad (1)$$

При этом $$\Phi(t) = \frac{1}{2} \cdot \text{Erf}\left[0; \frac{t}{\sqrt{2}}\right]. \qquad (2)$$

Найти значения $\Phi(x)$, полученной по формулам (13 § 2) и (2) на промежутке $[t_1, t_2]$ с шагом Δt.

4) Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно t_3 ч.

$$t_1 = 1;\ t_2 = 1{,}1;\ \Delta t = 0{,}01;\ t_3 = 1200 \text{ ч};\ a = 1000 \text{ ч};\ \sigma = 300 \text{ ч}.$$

```
п 1. Группа ячеек ввода
    a:=1000
    s:=300
    f =(1/(Sqrt[2*Pi]*s))*Exp[-(t-a)^2/(2*s^2)]
    Plot[f, {t, 0, 2000},PlotLabel→"Плотность вероятностей"]
```

---Ячейки вывода ------------------------------------

$$\frac{e^{-\frac{(-1000+t)^2}{180000}}}{300\sqrt{2\pi}}$$

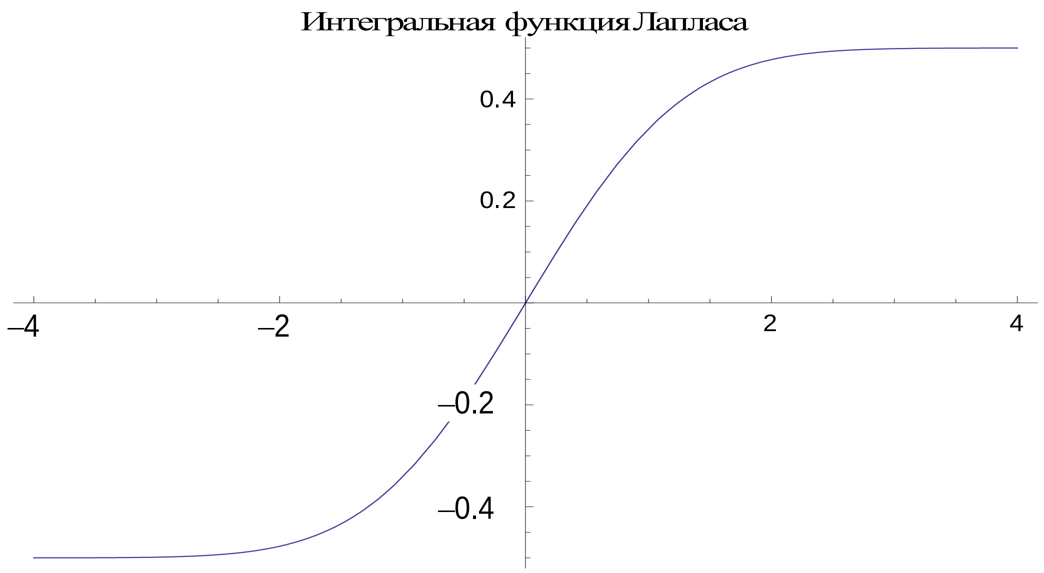
===

п 2. Группа ячеек ввода

$$Fi := (1/(Sqrt[2*Pi])\int_0^t Exp[-x^\wedge 2/2]dx$$

Plot[Fi, $\{t, -4, 4\}$, PlotLabel → "*Интегральная функция Лапласа*"]

--- ---Ячейки вывода ------------------------------



```
п 3. Группа ячеек ввода
        FiI := 0.5 * Erf[0, t/ Sqrt[2]]
        MatrixForm[Table[{t, N[Fi], N[FiI]}, {t, 1, 1.1, 0.01}]]
------Ячейки вывода  --------------------------------
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.341345 & 0.341345 \\ 1.01 & 0.343752 & 0.343752 \\ 1.02 & 0.346136 & 0.346136 \\ 1.03 & 0.348495 & 0.348495 \\ 1.04 & 0.35083 & 0.35083 \\ 1.05 & 0.35083 & 0.35083 \\ 1.06 & 0.353141 & 0.353141 \\ 1.07 & 0.35769 & 0.35769 \\ 1.08 & 0.359929 & 0.359929 \\ 1.09 & 0.362143 & 0.362143 \\ 1.1 & 0.364334 & 0.364334 \end{pmatrix}$$

```
======================================================
п. 4 Группа ячеек ввода
        t := (1200 – a) / s
        p = N[0.5 – FiI]
------Ячейки вывода  --------------------------------
0.252493
```

Пример 4. СВ T – время жизни элемента – распределена по закону $N(a;\sigma)$.

1) Построить график функции плотности вероятностей $f(t)$ на промежутке $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$, $a = 1000$, $\sigma = 300$.

Группа ячеек ввода
```
{a,σ}={1000,300}
Plot[PDF[NormalDistribution[a,σ],x],{x,a − 3σ,a + 3σ},AxesOrigin → {a − 2σ − σ,0},Ticks
        → {{{a − 2σ,HoldForm[a − 2σ]},{a,HoldForm[a]},{a + 2σ,HoldForm[a
        + 2σ]}},Automatic},PlotLabel → "Плотность вероятностей"]
```

------Ячейки вывода ----------------------------------

Пример 5. Решить систему дифференциальных уравнений из примера 1 § 15:

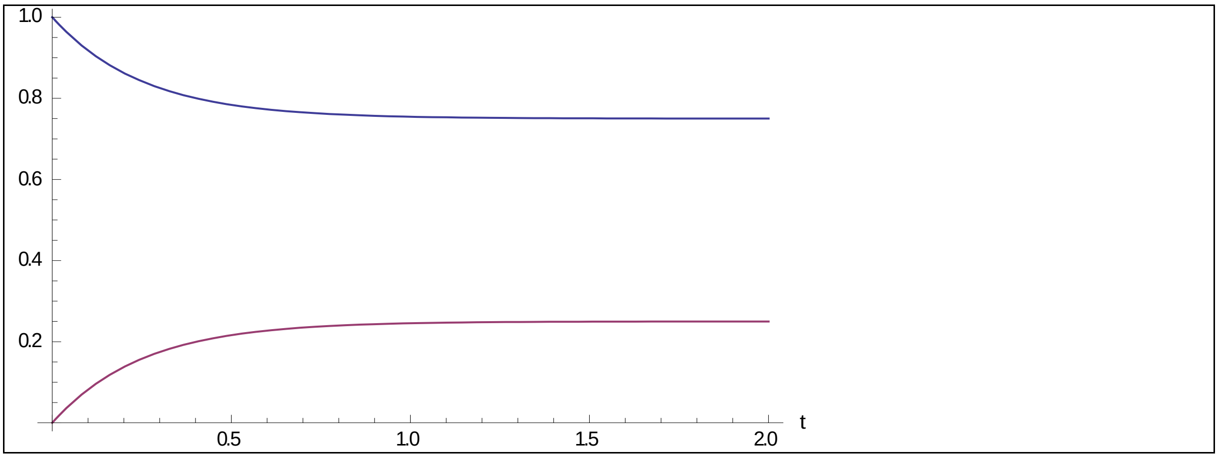
$$\begin{cases} p_1' = 3p_2 - p_1 \\ p_2' = p_1 - 3p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1' = 3p_2 - p_1 \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

начальные данные $(p_1(0),\ p_2(0)) = (1,\ 0)$.

Группа ячеек ввода
```
d=DSolve[{p1'[x]==-
p1[x]+3*p2[x],p1[x]+p2[x]==1,p1[0]==1,p2[0]==0}, {p1,p2},x]
Plot[Evaluate[{p1[x],p2[x]}/.d],{x,0,2},AxesLabel→{"t"}]
```

------Ячейки вывода ----------------------------

$\{\{\mathrm{p1} \to \mathrm{Function}[\{x\},\frac{1}{4}e^{-4x}(1+3e^{4x})],\mathrm{p2} \to \mathrm{Function}[\{x\},\frac{1}{4}e^{-4x}(-1+e^{4x})]\}\}$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1.0
1.5
2.0
t

Приложение 2. РГР Законы распределения времени наработки на отказ

Постановка задачи. Система состоит из трех последовательно соединенных элементов, законы распределения времени наработки на отказ которых приведены в таблице. Найти показатели надежности каждого элемента и всей системы в целом:

1) среднее время жизни, среднее квадратическое отклонение $\sigma(T)$ для каждого элемента, где T – время наработки на отказ;

2) функцию плотности вероятностей для случайной величины T;

3) функцию надежности;

4) функцию интенсивности отказов;

5) построить графики $f(t)$, $p(t)$, $\lambda(t)$;

6) протабулировать функции $f_i(t)$, $p_i(t)$, $i=1,2,3$; $f(t)$, $p(t)$;

7) найти среднее время жизни системы.

Задания

	B1	B2	B3	B4	B5
1-й элемент	W(2;1/1500)	R(1/1000)	W(1;1/2000)	W(3;1/3000)	W(4;1/2000)
2-й элемент	Γ(8;1/200)	Exp(1/1000)	Γ(5;1/500)	Γ(7;1/1000)	W(1;1/1500)
3-й элемент	TN(1500;800)	TN(3000;300)	TN(1000;700)	TN(1000;800)	TN(100;800)

	B6	B7	B8	B9	B10
1-й элемент	W(4;1/3000)	R(1/2000)	W(5;1/3000)	Γ(5;1/800)	W(6;1/3000)
2-й элемент	Γ(6;1/800)	Γ(6;1/800)	Γ(6;1/1000)	Γ(5;1/800)	W(6;1/3000)
3-й элемент	TN(0;1000)	TN(200;800)	R(1/3000)	Exp(1/2000)	TN(500;1000)

Пример решения в среде Mathematica

Текстовая ячейка Subsubtitle

Законы распределения времени наработки на отказ элементов:

1	2	3
W(2;1/2000)	Γ(5;1/300)	TN(2000;1000)

Текстовая ячейка Subtitle
Показатели надежности для W(aa,ll)

Группа ячеек ввода

```
aa:= 2
ll:=1/2000
MT:=Gamma[1+1/aa]/ll
sT:=Sqrt[(Gamma[1+2/aa]-(Gamma[1+1/aa])^2)]/ll
Labeled[N[MT],Среднее время жизни,Left]
Labeled[N[sT],Среднее квадратическое отклонение, Left]
f1= aa*(ll^aa)*(x^(aa-1))*Exp[-((ll*x)^aa)]
p1=Exp[-((ll*x)^aa)]
lam1=aa*(ll^aa)*(x^(aa-1))
 Plot[f1,{x,0,5000}, PlotLabel→"Плотность  вероятностей"]
Plot[p1,{x,0,5000},PlotLabel→ "Функция надежности "]
Plot[lam1,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Интенсивность отказов"]
```

Текстовая ячейка Subtitle
Показатели надежности для Г(a,l)

Группа ячеек ввода

```
l:=1/300
a:=5
Labeled[a/l, Среднее время жизни,Left]
Labeled[N[Sqrt[a]/l], Среднее квадратическое откло-
нение, Left]
f2=(l^a)*(x^(a-1))*Exp[-l*x]/Gamma[a]
p2=Gamma[a,l*x]/Gamma[a]
lam2=((l^a)*(x^(a-1))*Exp[-l*x])/(Gamma[a,l*x])
Plot[f2,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Плотность вероятностей"]
Plot[p2,{x,0,5000},PlotLabel→ "Функция надежности "]
Plot[lam2,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Интенсивность отказов"]
```

Текстовая ячейка Subtitle
Показатели надежности для TN(aaa,s), **функция Лапласа**

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Erf}\left[0; \frac{t}{\sqrt{2}}\right].$$

Группа ячеек ввода

```
aaa:= 2000
s:= 1000
xx:=aaa/s
c=1/(0.5+0.5*Erf[0,xx/Sqrt[2]])
```

```
k=(c/Sqrt[2*Pi])*Exp[-(xx^2)/2]
Labeled[N[aaa+k*s], Среднее время жизни ,Left]
Labeled[N[s*Sqrt[1+k*xx-k^2]], Среднее квадратиче-
ское отклонение , Left]
f3=c*PDF[NormalDistribution[aaa,s],x]
p3=c*(0.5-0.5*Erf[0,(x-aaa)/(s*Sqrt[2])])
lam3=c*PDF[NormalDistribution[aaa,s],x]/p3
Plot[f3,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Плотность вероят-
ностей"]
Plot[p3,{x,0,5000},PlotLabel→ "Функция надежности
"]
Plot[lam3,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Интенсивность от-
казов"]
```

Текстовая ячейка Subtitle

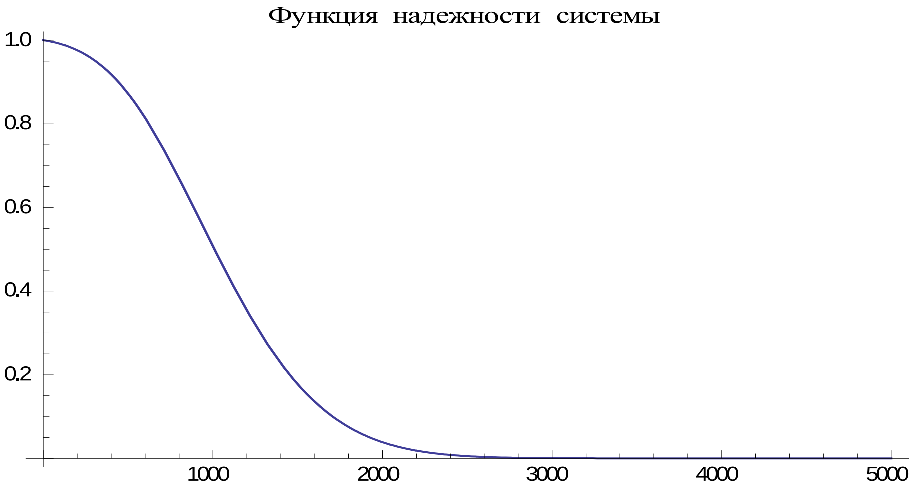
Функция надежности системы

Группа ячеек ввода

```
p= p1*p2*p3
Plot[p,{x,0,5000},PlotLabel→ "Функция надежности си-
стемы "]
```

------Ячейки вывода ---------------------------

$$0.04263665622153576e^{-\frac{x^2}{4000000}}(0.5-0.5\mathrm{Erf}[\frac{-2000+x}{1000\sqrt{2}}])\mathrm{Gamma}[5,\frac{x}{300}]$$



Текстовая ячейка Subtitle

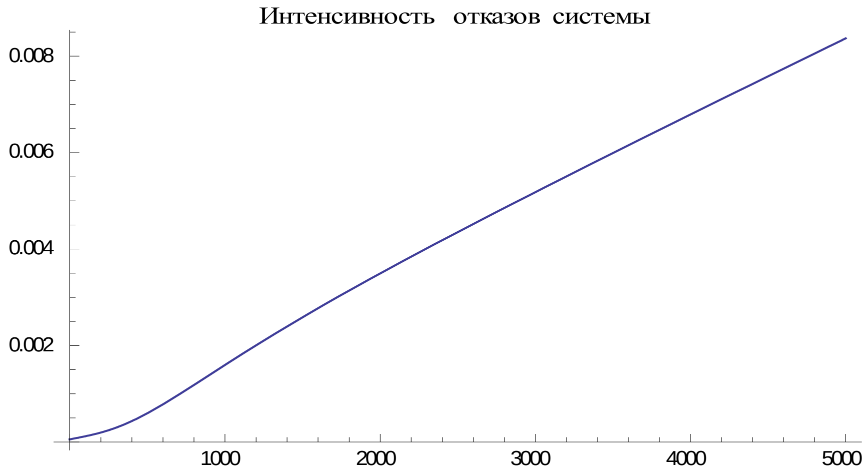
Интенсивность отказа системы

Группа ячеек ввода

```
lam=lam1+lam2+lam3
Plot[lam,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Интенсивность
отказов системы"]
```

------Ячейки вывода --------------------------

$$\frac{x}{2000000}+\frac{0.00039894228040143270e^{-\frac{(-2000+x)^2}{2000000}}}{0.5-0.5\mathrm{Erf}[\frac{-2000+x}{1000\sqrt{2}}]}+\frac{e^{-x/300}x^4}{2430000000000\mathrm{Gamma}[5,\frac{x}{300}]}$$



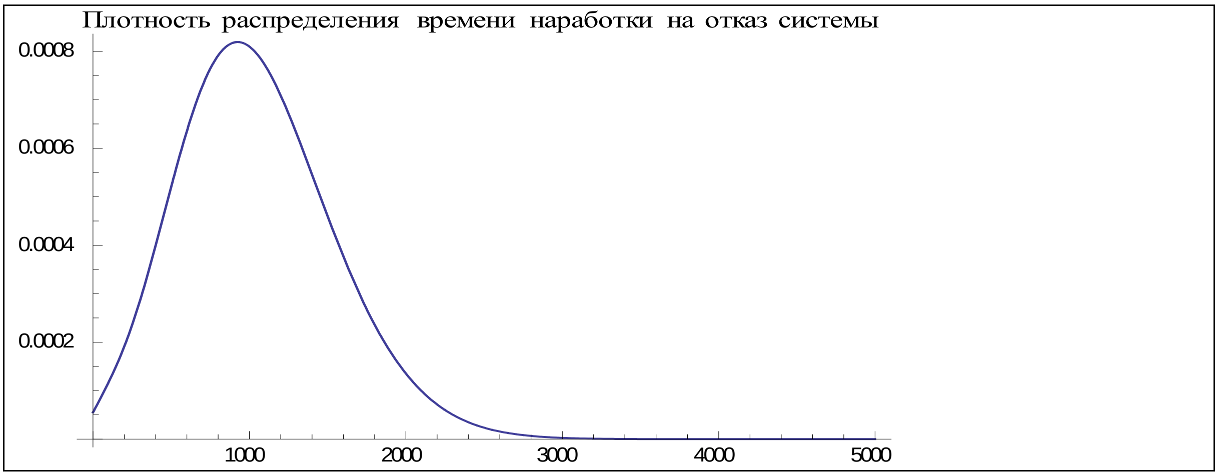
Текстовая ячейка Subtitle

Плотность распределения вероятностей системы

Группа ячеек ввода

```
f:= p*lam
Plot[f,{x,0,5000}, PlotLabel→ "Плотность распреде-
ления времени наработки на отказ системы"]
```

------Ячейки вывода --------------------------



Текстовая ячейка Subtitle

Таблица значений функций p(i), i=1,…,3 **и** p **с шагом 100 час**

Группа ячеек ввода

```
MatrixForm[Table[{x,N[p1,6],N[p2,6],N[p3,6],N[p,6]},
{x,0,3000,100}]]
```

Текстовая ячейка Subtitle

Таблица значений функций f(i), i=1,…,3 **и** f **с шагом 100 час**

Группа ячеек ввода

```
MatrixForm[Table[{x,N[f1,6],N[f2,6],N[f3,6],N[f,6]},
{x,0,
3000,100}]]
```

Текстовая ячейка Subtitle

Среднее время жизни системы

Группа ячеек ввода

$N[\int_0^\infty p\,dx]$

Оглавление

Учебное издание

РУДЫЙ Александр Никодимович

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Конспект лекций

Технический редактор *Д. А. Исаев*
Компьютерная верстка *Д. А. Исаева*

Подписано в печать 30.07.2013. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 15,23. Уч.-изд. л. 5,95. Тираж 100. Заказ 363.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.