

Использование теории графов для решения олимпиадных задач

Кленовская И.С., Якимович В.С.

Белорусский национальный технический университет

Решение олимпиадных задач принципиально отличается от решения школьных, даже очень сложных задач. Это обусловлено прежде всего выбором разделов, традиционно рассматриваемых на олимпиадах для школьников. Практически ни одна олимпиада не обходится без одного из важнейших разделов дискретной математики – теории графов.

Для решения задач можно не давать строгого определения графа как математического объекта. Вполне достаточно ввести понятие графа через вершины и ребра, понятие ориентированных или неориентированных графов, а также определить степень вершины.

Пример 1.

В деревне есть 15 телефонов, а АТС отсутствует. Можно ли телефоны соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение. Предположим, что это возможно.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра - соединяющим их проводам. В этом графе 15 вершин, степень каждой из них равна пяти. Подсчитаем количество ребер в этом графе. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. При таком подсчете каждое ребро учтено дважды. Поэтому число ребер графа должно быть равно $\frac{15 \cdot 5}{2}$. Но это число нецелое. Следовательно, такого графа не существует, а значит, задача решения не имеет.

Для подсчета числа ребер графа необходимо просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на два. Следовательно, сумма степеней всех вершин графа должна быть четной.

Часто в решении задач используется тот факт, что число нечетных вершин любого графа – четно.

Пример 2 .

В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в том классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей.

Примечание. Если Петя друг Васи, то Вася – друг Пети.

Решение. Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3; 11 – степень 4; 10 – степень 5. Однако у такого графа 19 нечетных вершин, что противоречит теореме.