УДК 517.5

О вычислении повторных интегралов с ядрами Коши

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

В теории сингулярных интегральных уравнений важную роль играет формула Пуанкаре-Бертрана:

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{\varphi(t,\tau)d\tau}{\tau-t} = -\pi^2\varphi(t_0,t_0) + \int_L d\tau \int_L \frac{\varphi(t,\tau)d\tau}{(t-t_0)(\tau-t)}, \tag{1}$$

где L – кусочно-гладкая линия, а $\varphi(t,\tau)$ – функция двух точек t, τ этой линии, удовлетворяющая определенным условиям (см., например, широко известные монографии Ф.Д.Гахова и Н.И.Мусхелишвили по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям).

Формулу (1) называют еще формулой перестановки порядка интегрирования в повторном интеграле с ядрами Коши. Если z – точка плоскости, не расположенная на L, то

$$\int_L \frac{dt}{t-z} \int_L \frac{\varphi(t,\tau)d\tau}{\tau-t} = \int_L d\tau \int_L \frac{\varphi(t,\tau)d\tau}{(t-z)(\tau-t)}. \tag{2}$$

При регуляризации сингулярных интегральных уравнений по разомкнутому контуру, при нахождении последовательных приближений и итерационных методах для таких уравнений, а также при конструировании решений некоторых краевых задач теории аналитических функций в замкнутом виде приходится иметь дело с интегралами, которые могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{\pi^2 i}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ z\notin[-1,\ 1],\ \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t-x}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ x\in(-1,\ 1), \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ и $f(\tau)$ – некоторые заданные действительные функции, удовлетворяющие определенным условиям на отрезке $[-1,\ 1]$ действительной оси.

С помощью формул перестановки порядка интегрирования (1), (2) строятся формулы для вычисления повторных интегралов (3) в случае, когда $\varphi(t)$ – некоторая весовая функция. При этом применяются известные точные и приближенные методы вычисления сингулярного интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ t\in(-1,\ 1)$.