УДК 517.4

Использование немонотонных функционалов Ляпунова при исследовании устойчивости уравнений с запаздыванием

Шавель Н.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается уравнение с запаздыванием $\dot{x}(t)=f(t, x_t)$,

где $f: R_+ \times C([-r(t), 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $f(t,0)=0$, $x_t(\vartheta)=x(t+\vartheta)$ при $\vartheta \in [-r(t),0]$. Функция f предполагается такой, что обеспечено существование решений для начальных данных (t, φ) при $t \geq 0$ и φ из некоторого шара $B_t(0, H)=\{\varphi : \varphi \in C([-r(t),0], \mathbb{R}^n), |\varphi| < H\}$, $\|\varphi\|=\sup|\varphi(\vartheta)|$, $\vartheta \in [-r(t), 0]$. Непрерывные неубывающие функции $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $u(s)>0$ при $s>0$ и $u(0)=0$ будем называть функциями класса Хана. Функционал $V: R_+ \times C([-r(t), 0], \mathbb{R}^n)$, $V(t,0)=0$, будем называть слабо положительно определенным, если найдутся число $\alpha>0$ и функции класса Хана $\alpha(s)$ такие, что $V(t, \varphi) > \alpha(|\varphi(0)|)$ для $\varphi \in B_t(0, \alpha)$ удовлетворяющих условию $\varphi(0)=\|\varphi\|$. Отметим, что, если $V(t, \varphi)=V(t, \varphi(0))$, т.е. функционал обращается в обычную функцию $V: R_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то слабая положительная определенность функционала эквивалентна положительной определенности функции. Определим $\dot{V}(t, \varphi)=\lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h} \cdot (V(t+h, x_{t+h}(t, \varphi))-V(t, \varphi))$, где $x_{t+h}(t, \varphi)$ – соответствующий отрезок решения уравнения с начальными данными (t, φ).

Теорема. Предположим, что функционал $V(t, \varphi)$ слабо положительно определен и найдется такое число h, что для $\varphi \in B_t(0, h)$, удовлетворяющих условию $V(t, \varphi)>0$, выполняется неравенство $\dot{V}(t, \varphi)<0$. Тогда положение равновесия $x(t)=0$ устойчиво. Если дополнительно найдется функция $b(s)$ класса Хана такая, что $V(t, \varphi) \leq b(\|\varphi\|)$, то положение равновесия равномерно устойчиво.