УДК 517.3

Рекуррентное интегрирование как решение интегральных рекуррентных соотношений

Волкович П.Ф., Михнова Н.С.
Белорусский национальный технический университет

Известно, что если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в рассматриваемом интервале значений переменной x непрерывные производные всех порядков вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно, то справедлива обобщенная формула интегрирования по частям

$$\int u\,v^{(n+1)}dx = u\,v^{(n)} - u'\,v^{(n-1)} + u''\,v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx. \qquad (1)$$

При выполнении достаточных условий асимптотического разложения интеграла в левой части выражения (1) при $n \to \infty$ из выражения (1) получаем

$$\int u\,v^{(n+1)}dx = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Если множество $\{v^{(n-i)}\}$ состоит из производных функции v экспоненциального типа конечного порядка r, а функция u – по крайней мере $(n+1)$ раз дифференцируема, то из разложения (1) получаем интегральное рекуррентное соотношение того же порядка r, что и функции $v^{(n-i)}$, а именно

$$I_{n+1} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i u^{(i)}v^{(n-i)} + (-1)^{r+1}I_{n-r}, \; I_{n+1} = \int u\,v^{(n+1)}dx, \; I_{n-r} = \int u^{(r)}v^{(n-r)}dx. \qquad (3)$$

В общем случае, при выполнении достаточных условий асимптотического разложения интеграла и если функции $v^{(n-i)} = v^{(k)}$ ($k = 0,1,2,\ldots,r$) образуют базис, интегрированием по частям также приходим к соотношению вида (3). Общее решение соотношения (3) ищем по множеству последовательностей $\{I_i\}$ частных решений. Это решение единственно, если начальные члены I_0, I_1, …, I_r определены интегрированием по частям соответствующих выражений, а все другие члены выражены через них с помощью рекуррентного соотношения (3). В этом случае общий член I_n последовательности $\{I_\nu\}$ частных решений определяется как функция ее начальных членов I_0, I_1, I_2,…, I_r с помощью метода математической индукции.