УДК 539.3

Построение обратных операторов бесконечно высокого порядка

Акимов В.А., Хотеев А.Л.
Белорусский национальный технический университет

Одним из часто встречающихся в теории операторов является оператор сдвига вида $D_s = sh(ad_x)$, где $d_x = \frac{d}{dx}$.

Его действие на произвольную функцию представляется равенством

$$D_s * f(x) = \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2}.$$

Аналогично вводится оператор $D_c = ch(ad_x)$, который действует на произвольную функцию по формуле $D_c * f(x) = \frac{f(x+a) + f(x-a)}{2}$.

Попутно отметим здесь известное свойство

$$D = D_s + D_c = sh(ad_x) + ch(ad_x) = e^{ad_x}, \quad D * f(x) = f(x+a).$$

Построим для них обратные операторы с присущими им свойствами вида

$$D_s^{-1} * f(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} f(x + 2(n-1)a)$$

$$D_c^{-1} * f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(x + 2(n-1)a)$$

$$D^{-1} * f(x) = e^{-ad_x} * f(x) = f(x-a)$$

Можно непосредственно убедиться в справедливости следующих соотношений $DD^{-1} = 1$, $D_s D_s^{-1} = 1$, $D_c D_c^{-1} = 1$.

Если в качестве примера взять $a = \pi$ и $f(x) = \sin kx$, то можно получить равенства вида

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin kx}{n sh \pi d_x} = (-1)^{k-1} \sin kx, \quad \frac{\sin kx}{ch \pi d_x} = \alpha \sin kx,$$

где $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{четные} \\ 1, \text{ если } n - \text{нечетные} \end{cases}$

Обратные операторы обладают рядом специфических свойств, которые как и прямые операторы, применяемые, в частности, при разложении функций в ортогональные и неортогональные ряды, можно использовать при решении новых прикладных задач.