

Операторный метод сведения трёхмерных задач трансверсально-изотропных тел к двумерным

Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет

Операторный метод сведения трехмерных задач трансверсально-изотропных тел к двумерным основан на символическом представлении детерминанта исходной задачи. В нашем случае он имеет вид:

$\det = (A_{66}\Delta_1^2 + A_{44}\partial_3^2) \det_1$, где

$$\det_1 = A_{11}A_{44}(\Delta_1^2)^2 + [A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})]\Delta_1^2\partial_3^2 + A_{33}A_{44}(\partial_3^2)^2$$

$$\Delta_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_1 = \partial/\partial x, \quad \partial_2 = \partial/\partial y, \quad \partial_3 = \partial/\partial z$$

В частности, если $\lambda_1 = (b + \sqrt{b^2 - 4c})/2$, $\lambda_2 = (b - \sqrt{b^2 - 4c})/2$ являются корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$, где

$$b = (A_{11}A_{13} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44}))/\sqrt{A_{11}A_{44}}, \quad c = A_{33}A_{44},$$

то определитель \det_1 представляется в виде: $\det_1 = (\sqrt{A_{11}A_{44}}\Delta_1^2 + \lambda_1\partial_3^2)(\sqrt{A_{11}A_{44}}\Delta_1^2 + \lambda_2\partial_3^2)$.

Тогда ряды перемещений исходной задачи можно записать как сумму операторных гармонических функций с девятью неопределенными операторными коэффициентами

$$u = A_1 \cos(z\sqrt{\frac{A_{66}}{A_{44}}}\Delta_1) + B_1 \cos(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_1^2}}) + C_1 \cos(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_2^2}}),$$

$$v = A_2 \cos(z\sqrt{\frac{A_{66}}{A_{44}}}\Delta_1) + B_2 \cos(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_1^2}}) + C_2 \cos(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_2^2}}),$$

$$w = A_3 \sin(z\sqrt{\frac{A_{66}}{A_{44}}}\Delta_1) + B_3 \sin(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_1^2}}) + C_3 \sin(z\sqrt{4\frac{A_{11}A_{44}}{\lambda_2^2}}).$$

Подставляя эти соотношения в исходные уравнения и соответствующие краевые условия, получим систему линейных операторных уравнений для нахождения A_i, B_i, C_i $i=1,2,3$. Предложенный алгоритм решения основан на понижении размерности задачи на единицу, что позволяет существенно упростить все проводимые выкладки.