УДК 629.11

К вопросу вычисления матриц вращения в задачах аналитической механики

Разорёнов Н.А.
Белорусский национальный технический университет

На рисунке 1 представлена расчетная схема для определения матрицы преобразования (вращения) $\alpha = \alpha_\rho \cdot \alpha_\theta \cdot \alpha_\varphi$ из системы координат OXYZ в систему $OX_1Y_1Z_1$. Матрицы α представлена формулой 1.

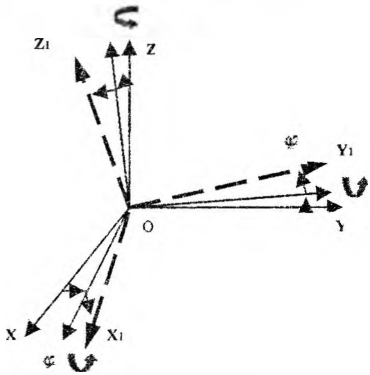

Рисунок 1. Углы поворота в трехмерном пространстве

$$\alpha = \left\| \begin{matrix} \cos\rho\cdot\cos\theta & \sin\rho & -\cos\rho\cdot\sin\theta \\ \begin{matrix}-\sin\rho\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi + \\ \sin\theta\cdot\sin\varphi\end{matrix} & \cos\rho\cdot\cos\varphi & \begin{matrix}\sin\rho\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + \\ \sin\varphi\cdot\cos\theta\end{matrix} \\ \begin{matrix}\sin\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi + \\ \sin\theta\cdot\cos\varphi\end{matrix} & -\sin\varphi\cdot\cos\rho & \begin{matrix}-\sin\rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + \\ \cos\theta\cdot\cos\varphi\end{matrix} \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

Можно упростить вычисление матрицы вращения. Для этого разложим функции $\sin x$ и $\cos x$ в степенной ряд Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Анализ значений функции $\sin x$ и $\cos x$, показывает, что для угла до $45°$ их можно заменить следующими выражениями: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$. Предложенное упрощение вычисления матрицы вращения может быть использовано в системах, управляемых микроконтроллерами без команд вещественной арифметики.