МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов
механико-технологического факультета

Часть 6

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Под редакцией М.А. Князева

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 6

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Под редакцией М.А. Князева

Минск
БНТУ
2014

УДК 51(076.9)
ББК 22.1я7
В93

Составители:
Е.А. Глинская, Н.А. Кондратьева, Н.К. Прихач,
И.В. Прусова, Л.М. Серебрякова

Рецензенты:
В.И. Юринок, В.В. Веременюк

Данное издание содержит теоретические сведения, подробные решения типовых примеров и задач, задания для самостоятельной работы по разделам кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Издается с 2008 г. Часть 5 «Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения», сост. : Е.А. Глинская, Н.А. Кондратьева, Н.К. Прихач, А.Н. Мелешко, вышла в БНТУ в 2012 г.

ISBN 978-985-550-187-**0(Ч.** 6)
ISBN 978-985-479-903-2

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

1.1. Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой ограниченной области D в плоскости xOy определена непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом на n частичных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой i-й элементарной области ΔS_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, умножим значение функции в этой точке $f(x_i, y_i)$ на площадь ΔS_i соответствующей области и составим сумму этих произведений, т.е. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D.

Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D называется предел этой суммы:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x, y)ds, \tag{1.1}$$

где λ – наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i. Функция $z = f(x, y)$, для которой предел (1.1) существует и конечен, называется *интегрируемой* в этой области.

В прямоугольных координатах дифференциал площади $ds = dxdy$, тогда двойной интеграл примет вид:

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{1.2}$$

1.2. Основные свойства двойного интеграла

1) Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций:

$$\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y)dxdy.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_D k \cdot f(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy.$$

3) Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, т.е.если область состоит из двух областей D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

1.3. Основные случаи вычисления двойного интеграла в прямоугольных координатах

1) Если область D, в которой рассматривается двойной интеграл (1.2), есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и заданными уравнениями $x = a, x = b\ (a \le x \le b),\ y = c,\ y = d\ (c \le y \le d)$ (рис. 1.1), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (1.3)$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (1.4)$$

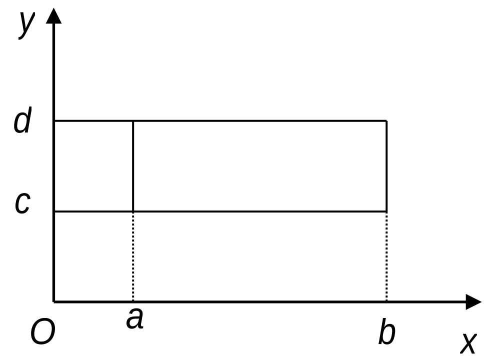


Рис. 1.1

Интегралы в правых частях формул (1.3) и (1.4) называются *повторными* (или *двукратными*), а интегралы $\int_c^d f(x,y)dy$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ называются *внутренними*. Под символом $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ в формуле (1.3) подразумевается дважды произведенное интегрирование. Первое интегрирование (внутреннее) по переменной y совершается в пределах от c до d в предположении, что x остается постоянным; результат интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

Если вычисление двойного интеграла выполняется по формуле (1.4), то порядок интегрирования меняется; внутренний интеграл вычисляется по переменной x, причем y сохраняет постоянные значение, а внешнее (повторное) интегрирование производится по переменной y.

2) Если область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области и параллельная оси Oy, пересекает ее границу в двух точках (рис. 1.2 и 1.3), то эта область называется *простой относительно оси* Ox и определяется системой неравенств вида:

$$a \le x \le b; \qquad \varphi_1(x) \le x \le \varphi_2(x).$$

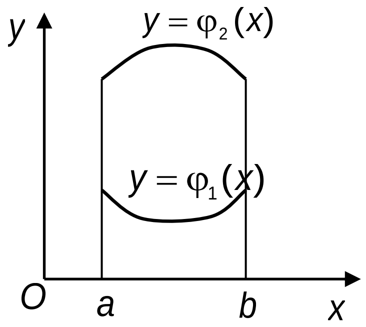


Рис. 1.2

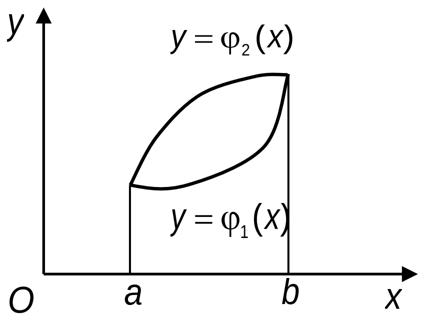


Рис. 1.3

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right]. \tag{1.5}$$

3) Если граница область D пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области и параллельной оси Ox (рис. 1.4), то эта область называется *простой относительно оси* Oy и определяется системой неравенств вида:

$$c \le y \le d; \;\; \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y).$$

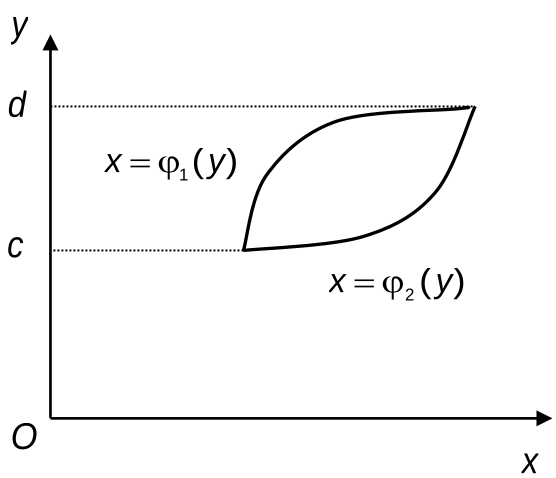


Рис. 1.4

В этом случае двойной интеграл выражается формулой:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx, \tag{1.6}$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной x, а затем по переменной y.

4) Если нижняя или верхняя линии границы состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то области D необходимо разбить прямыми, параллельными оси Oy, на такие части, чтобы каждый из участков выражался одним уравнением. В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух (и более) повторных интегралов. В случае, изображенном на (рис. 1.5), область D_1 определяется системой неравенств $a \le x \le c$; $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, а область D_2 – системой неравенств $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_3(x)$, и, значит

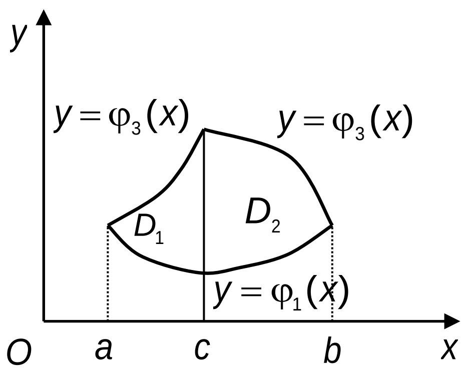


Рис. 1.5

$$\iint\limits_D fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} fdy + \int\limits_c^b dx + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} fdy. \tag{1.7}$$

1.4. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в прямоугольных координатах (x,y). Предположим, что переменные x и y являются функциями двух переменных u и v,т.е. $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$, и эти функции непрерывны вместе со своими производными первого порядка по u и v в некоторой замкнутой области G плоскости Ouv. Предположим также, что эти функции взаимно однозначно и непрерывно отображают область G на область D. Тогда имеет место равенство:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \cdot \left|J(u,v)\right| dudv,\quad \text{где}\quad J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \; -$$

называется *якобианом* преобразования G в D (предполагается, что определитель J всюду в G отличен от нуля). Геометрически $\left|J(u,v)\right| dudv$ выражает элемент площади в области G, а $\left|J(u,v)\right|$ – коэффициент изменения элемента площади G при преобразовании в элемент D. Координаты (u,v) называются *криволинейными координатами* точки (x,y). Интеграл $\iint_G f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \cdot \left|J(u,v)\right| dudv$ называется *двойным интегралом в криволинейных координатах.*

Простейшим и важнейшим частным случаем криволинейных координат являются полярные координаты (r,φ). Они связаны с прямоугольными координатами формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(r \ge 0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Якобиан преобразования в этом случае равен:

$$J = J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

а $dxdy = rdrd\varphi$ – элемент площади в полярных координатах. При этом имеет место формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi.$$

К полярным координатам удобно переходить в тех случаях, когда область интегрирования круг или часть круга. Расстановка пределов и вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах выполняется аналогично случаю прямоугольных координат.

Примеры

1. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}\,dy$.

Решение. Согласно формуле (1.5) имеем

$$\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}dy = \frac{1}{3}\int\limits_1^3 \left[\int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}\,dy\right]dx.$$

Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянным

$$\int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}dy = \frac{1}{x^2}\int\limits_2^{x^2+4} dy = \frac{1}{x^2}\cdot \Big|_2^{x^2+4} = \frac{1}{x^2}\left[x^2+4-2\right] = \frac{1}{x^2}(x^2+2) = 1+\frac{2}{x^2}.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменной x, подставив в него полученное выражение:

$$\int\limits_1^3 \left(1+\frac{2}{x^2}\right)dx = \left(x-\frac{2}{x}\right)\Big|_1^3 = \left(3-\frac{2}{3}\right)-(1-2) = \frac{10}{3}.$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, где D – прямоугольник $0\le x\le 2;\ 0\le y\le 1$.

Решение. Преобразуем интеграл в повторный. Пределы интегрирования известны, поэтому

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \cdot \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi.$$

3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{-x^2+2} f(x,y)dy$.

Решение. Зная пределы интегрирования, запишем область интегрирования D в виде системы неравенств $0 \le x \le 1$, $x \le y \le -x^2 + 2$. Построим линии $x = 0$, $x = 1$, $y = x$ и $y = -x^2 + 2$ (см. рис. 1.6).

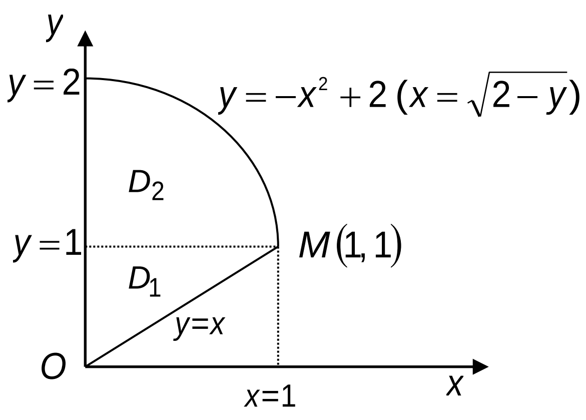


Рис. 1.6

Область D является простой относительно оси Ox. Рассмотрим область D относительно оси Oy. Через точку $M(1, 1)$, в которой стыкуются участки верхней границы области D, проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая делит область D на две области D_1 и D_2, которые запишем в виде систем неравенств $0 \le y \le 1;\ 0 \le x \le y$ и $1 \le y \le 2;\ 0 \le x \le \sqrt{2-y}$. Тогда согласно формуле (1.6) получим:

$$\int_0^1 dx \int_x^{-x^2+2} f(x, y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y)dx .$$

4. Вычислить $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, где область интегрирования ограничена параболами $y = x - x^2$, $y = 1 - x^2$ и осью Oy. (см. рис. 1.7).

Решение. Параболы пересекаются в точке $A(1;0)$. Область интегрирования является правильной в направлении оси Oy и определяется неравенствами: $0 \le x \le 1;\quad x - x^2 \le y \le 1 - x^2$. Следовательно:

$$\iint_D (x^2+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} (x+2y)dy \, .$$

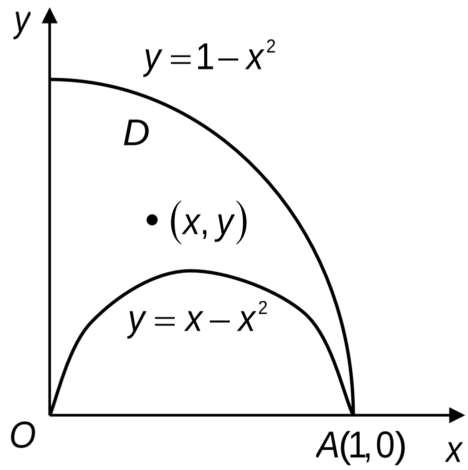


Рис. 1.7

В результате:

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 \left(xy+y^2\right)\Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx = \int_0^1 \left[x(1-x^2)+(1-x^2)-x(x-x^2)-(x-x^2)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x^2)+(1-x^2)^2 - x(x-x^2)-(x-x^2)^2\right]dx = \int_0^1 \left(2x^3-4x^2+x+1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

5. Вычислить $\iint_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = x$, $y = 4x$ и $y = \dfrac{4}{x}$.

Решение. Находим точки пересечения этих линий (см. рис. 1.8):

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{4}{x} = x\right) \Rightarrow \left(4 = x^2\right); \quad x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ y_1 = 2;\ y_2 = -2;\ M(2;\ 2);\ M_1(-2;\ 2);$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{4}{x} = 4x\right) \Rightarrow \left(4 = 4x^2\right) \Rightarrow \left(x^2 = 1\right);\ x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ y_1 = -4;\ y_2 = 4;$$

$N(1;4)$; $N_1(-1;4)$.

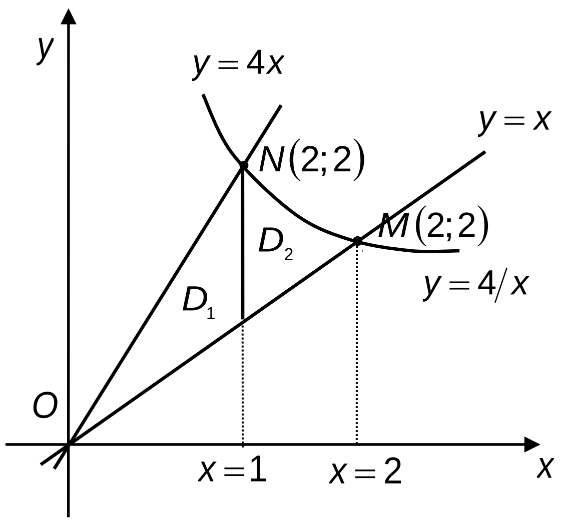


Рис. 1.8

Область D разобьем на 2 области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств $0 \le x \le 1$; $x \le y \le 4x$ и $1 \le x \le 2$; $x \le y \le \dfrac{4}{x}$.

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} (x + 2y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{4x} (x + 2y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy + y^2\right)\Big|_x^{4x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4x^2 + 16x^2 - x^2 - x^2\right)dx = 18\int\limits_0^1 x^2 dx = 18 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 6.$$

Вычислим двойной интеграл по области D_2:

$$I_2 = \iint\limits_D (x + 2y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4x} (x + 2y)dy = \int\limits_1^2 \left(xy + y^2\right)\Big|_x^{4x} dx = \int\limits_1^2 \left(4 + \frac{16}{x^2} - x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(4 + 16 \cdot x^{-2} - 2x^2\right)dx = \left[4x - \frac{16}{x} - \frac{2}{3}x^3\right]\Big|_1^2 = \frac{22}{3}.$$

$$I = I_1 + I_2 = 6 + \frac{22}{3} = \frac{40}{3}.$$

6. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$, где D – область, ограниченная кривыми $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$, $xy = 1$, $xy = 5$ (рис. 1.9).

Решение.

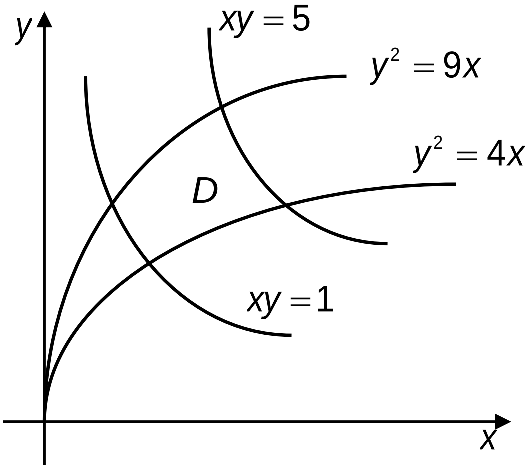


Рис. 1.9

Расставить пределы интегрирования в исходном интеграле не просто, но подходящая замена переменных позволяет свести этот интеграл к интегралу по прямоугольнику. Введем новые переменные u и v при помощи равенств $y^2 = ux$, $xy = v$. Выразим переменные x и y.

Выразим переменные x и y через u и v:

$x = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$; $y = \sqrt[3]{uv}$. Находим якобиан полученного преобразования

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Откуда, с учетом того, что $x > 0$ на области D, а значит, $u = \frac{y^2}{x} > 0$, имеем $|J(u,v)| = \frac{1}{3u}$. Таким образом, исходный интеграл в плоскости Ouv имеет вид:

$$\iint\limits_G \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} \cdot \sqrt[3]{uv} \cdot \frac{1}{3u} dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_G \frac{v}{u} dudv,$$

граница области G описывается линиями $u = 4$ (т.к. одна из формул преобразования имеет вид $y^2 = ux$, то линии $y^2 = 4x$ в плоскости Oxy соответствует линия $u = 4$ в плоскости Ouv), $u = 9$, $v = 1$, $v = 5$ (рис. 1.9а).

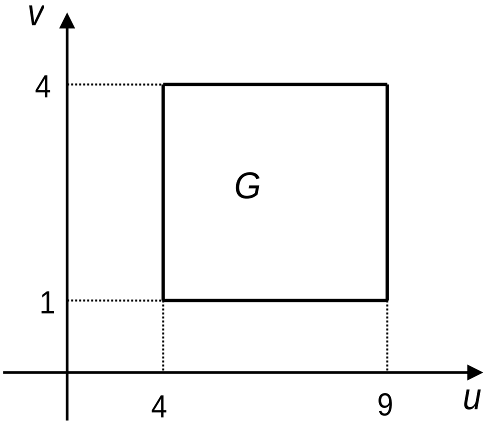


Рис. 1.9а

Поэтому область G имеет вид $4 \le u \le 9$; $1 \le v \le 5$, а преобразованный интеграл вычисляется намного проще:

$$I = \frac{1}{3}\iint_G \frac{v}{u} du dv = \frac{1}{3}\int_4^9 \frac{du}{u}\int_1^5 v dv = \frac{1}{3}\ln u\Big|_4^9 \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_1^5 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

7. Вычислить $\iint_D r\sin\varphi dr d\varphi$, если область D – круговой сектор, ограниченный линиями $r = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$.

Решение. Построим сектор OAB с центром в полюсе O (рис. 1.10). Имеем повторный интеграл:

$$\iint_D r\sin\varphi dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^a r\sin\varphi dr.$$

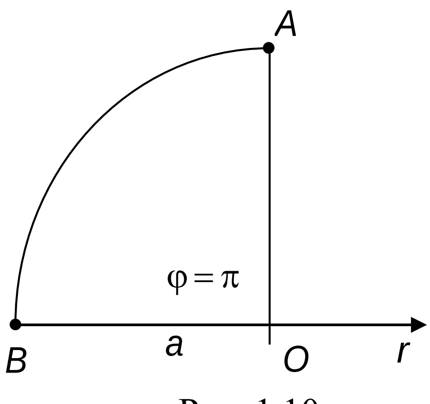


Рис. 1.10

Вычислим внутренний интеграл, считая $\sin\varphi$ постоянным:

$$\int_0^a r\sin\varphi dr = \frac{r^2}{2}\sin\varphi\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}\sin\varphi.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{a^2}{2}(-1-0) = \frac{a^2}{2}.$$

8. Вычислить двойной интеграл, предварительно преобразовав его к полярным координатам $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$; D – круговое кольцо между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$ (рис. 1.11).

Решение. Построим область D. Применив формулы перехода к полярным координатам, получим $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; тогда

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}=\iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=\iint\limits_D \frac{drd\varphi}{r}.$$

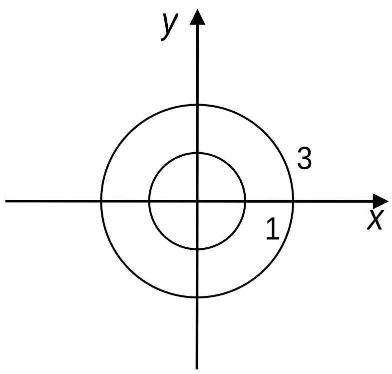


Рис. 1.11

Область D в полярной системе координат запишем в виде системы неравенств $0\le\varphi\le 2\pi$; $1\le r\le 3$. Поэтому:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^3 \frac{dr}{r}.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_1^3 \frac{dr}{r}=\ln r\Big|_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\ln 3\int_0^{2\pi} d\varphi=\ln 3\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi\cdot\ln 3.$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

1. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)dy$;

2. $\int\limits_0^3 dy\int\limits_y^{6-y} f(x,y)dx$;

3. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{6-x} f(x,y)dy$;

4. $\int\limits_1^4 dy\int\limits_{1/y}^{y} f(x,y)dx$;

5. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$;   6. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$.

Вычислить повторные интегралы:

7. $\int_0^1 dx \int_1^2 (x^2+y^2)dy$;   8. $\int_1^2 dy \int_{2y}^{4y} xydx$;

9. $\int_2^3 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$;   10. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{3} (x+2y)dx$.

Вычислить двойной интеграл по данной области D:

11. $\iint_D xydxdy$, где D: $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2$;

12. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, где D: $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$;

13. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+2y)^2}$, где D: $1 \le x \le 3;\ 2 \le y \le 5$.

Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

14. $\iint_D xdxdy$, где D: $xy=4,\ x+y-5=0$;

15. $\iint_D x^2ydxdy$, где $D: x^2+y^2=16,\ x+y-4=0$ (выше прямой $x+y-4=0$);

16. $\iint_D ydxdy$, где D: $y=x^2,\ x=-2,\ x=2,\ y=4$;

17. $\iint_D x^3dxdy$, где D: $x=0,\ y=x,\ y=6-x^2$;

18. $\iint_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где D: $0 \le x \le 2;\ x \le y \le x\sqrt{3}$;

19. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где D: $x=2,\ y=x,\ y=\frac{1}{x}$;

20. $\iint_D xydxdy$, где D – треугольник ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$;

21. $\iint_D (x^3 + y^3)dxdy$, где D: $x - 2y = 0,\ x - y = 0,\ x = 4$;

22. $\iint_D y^2 \sin^2 x dxdy$, где D: $x = -\dfrac{\pi}{2},\ y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2};\ y = 3\cos x$;

23. $\iint_D ydxdy$, где D: $y = 0,\ y = \sqrt{x},\ y + x = 2$.

Вычислить двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями, предварительно разбив заданную область на две области:

24. $\iint_D xdxdy$, где D: $y = x^2,\ y = 2x,\ y = 3x$;

25. $\iint_D (x + y)dxdy$, где D: $y = \dfrac{1}{x};\ y = x,\ y = 4,\ x = 0$;

26. $\iint_D ydxdy$, где D: $y = \dfrac{3}{4}x,\ y = \dfrac{4}{3}x,\ x > 0;\ y < 0;\ x^2 + y^2 = 25$.

Выбирая подходящие замены переменных, вычислить двойные интегралы, заданные в прямоугольных координатах:

27. $\iint_D (y - x)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями

$$y = \frac{-1}{3}x + 5;\ y = x - 3;\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3};\ y = x + 1.;$$

28. $\iint_D dxdy$, где D – параллелограмм со сторонами на прямых $y = x;\ y = x + 3;\ y = -2x + 1;\ y = -2x + 5$;

29. $\iint_D (x + y)dxdy$, где D – область ограничена прямыми $x + y = 4;\ x + y = 12$ и параболой $y^2 = 2x$.

Вычислить двойной интеграл:

30. $\iint_D r^2 d\varphi dr$, где D – область, ограниченная окружностями $r = 1$ и $r = 3$;

31. $\iint\limits_D r^3 d\varphi dr$, где область D – задана системой неравенств $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$; $2 \le r \le 4$;

32. $\iint\limits_D \sin 2\varphi d\varphi dr$, где область D – задана системой неравенств $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $1 \le r \le 3$.

Вычислить двойные интегралы, предварительно преобразовав их к полярным координатам:

33. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 \le 1$;

34. $\iint\limits_D \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 \le 16$;

35. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 14x$;

36. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, где D – четверть круга $x^2 + y^2 \le 1$; $x \ge 0$; $y \ge 0$;

37. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – область ограничена лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$; $x \ge 0$;

38. $\iint\limits_D dxdy$, где D – область, ограниченная линией $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$;

39. $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где область D ограничена кривыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 9$;

40. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$; $x^2+y^2=\pi^2$.

Ответы

1) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.

2) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_3^6 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)dy$.

3) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx$.

4) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{4} f(x,y)dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{4} f(x,y)dy$.

5) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$.

6) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$.

7) $\frac{8}{3}$. 8) 22,5. 9) 3,75. 10) 2,4. 11) 1. 12) $\ln\frac{4}{3}$.

13) $\frac{1}{2}\ln\frac{77}{65}$. 14) 4,5. 15) 51,2. 16) 25,6. 17) $\frac{104}{15}$. 18) $\frac{\pi}{6}$.

19) 2,25. 20) $\frac{1}{24}$. 21) $\frac{752}{5}$. 22) 2,4. 23) $\frac{5}{12}$. 24) $\frac{65}{12}$.

25) $\frac{31}{8}$. 26) $\frac{725}{864}$. 27) -8. 28) 12 29) $543\frac{11}{15}$. 30) $\frac{52\pi}{3}$.

31) 5π. 32) 1,5. 33) $\pi\ln 2$. 34) $\frac{196\pi}{3}$. 35) 24π. 36) $\frac{\pi^2}{16}$.

37) $\frac{\pi}{6}-\frac{8\sqrt{2}-10}{9}$. 38) $0,625\pi$. 39) $0,75\pi$. 40) 3π.

1.6. **Применение двойного интеграла**

Вычисление геометрических величин. Если D – ограниченная область плоскости Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле:

$$S = S(D) = \iint\limits_D dxdy \tag{1.8}$$

Пусть $z = f(x, y)$ – неотрицательная, непрерывная функция в замкнутой области D. Если V – тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – областью D, а сбоку – соответствующей цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей, совпадающей с границей области D (рис. 1.12), то объем этого тела равен:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \tag{1.9}$$

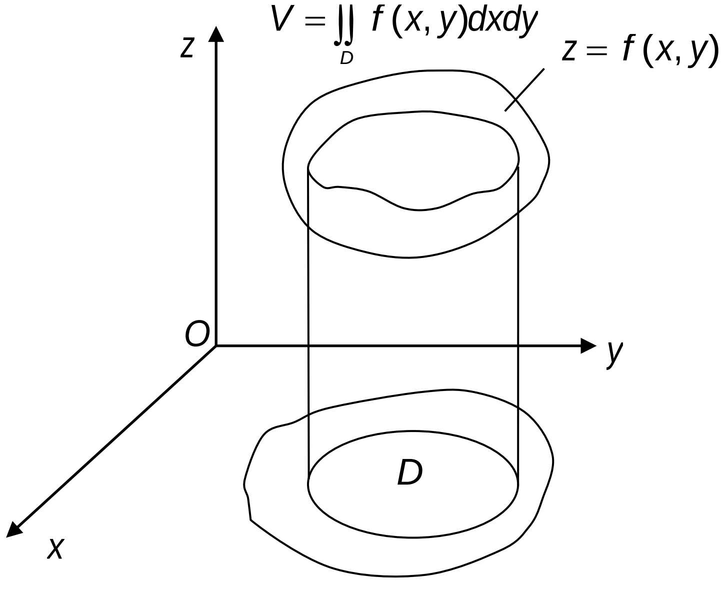


Рис. 1.12

Пусть V – тело, ограниченное сверху поверхностью, $z = f(x, y)$, снизу – поверхностью $z = g(x, y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость Oxy служит область D, в которой функции $f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ непрерывны $f(x, y) \geq g(x, y)$, то объем этого тела равен:

$$V = \iint\limits_D (f(x, y) - g(x.y)dxdy\,. \tag{1.10}$$

4. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ и проектируется в область D плоскости $xOy(z=0)$, то площадь S поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_{D_{xoy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy\,. \tag{1.11}$$

Если поверхность проектируется на плоскость $yOz(x=0)$, то уравнение поверхности следует решить относительно переменной x и формула примет вид:

$$S = \iint\limits_{D_{yoz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_2)^2}\, dydz\,. \tag{1.12}$$

Если поверхность проектируется на плоскость $xOz\ (y=0)$, то уравнение поверхности следует решить относительно переменной y и формула примет вид:

$$S = \iint\limits_{D_{xoz}} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dxdz \tag{1.13}$$

Вычисление физических и механических величин. Предположим, что плоская пластина D имеет поверхностную плотность распределения масс $\rho(x, y)$, непрерывную в D. Тогда масса $m = m(D)$ этой пластины вычисляется по формуле:

$$m = \iint\limits_{D} \rho(x, y)\, dxdy \tag{1.14}$$

(физический смысл двойного интеграла).

Статистическим моментом материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы точки на расстояние до оси. Статистические моменты S_x и S_y плоской фигуры D с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$ относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются по формулам:

$$M_x = \iint\limits_{D} y\rho(x, y)\, dxdy \qquad M_y = \iint\limits_{D} x\rho(x, y)\, dxdy\,. \tag{1.15}$$

Если фигура D является однородной (плотность ρ – постоянна), то

$$M_x = \rho\iint_D ydxdy \qquad M_y = \rho\iint_D xdxdy. \tag{1.15′}$$

Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ плоской фигуры с непрерывной массой и плотностью $\rho(x, y)$ вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} = \frac{M_y}{m},$$

$$y_c = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} = \frac{M_x}{m}, \tag{1.16}$$

где m – масса фигуры, M_x, M_y – статистические моменты относительно осей координат. Если фигура D является однородной $(\rho = const)$ и S – площадь этой фигуры, то координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy; \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy \tag{1.16′}$$

В полярной системе координат формулы (1.16′) имеют вид:

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D r^2\cos\varphi drd\varphi; \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_D r^2\sin\varphi drd\varphi \tag{1.16″}$$

Если однородная плоская фигура имеет ось симметрии или точку симметрии, то центр тяжести расположен на этой оси или в этой точке.

Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси.

Моменты инерции материальной плоской фигуры D, распределение массы которой характеризуется плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y)dxdy \tag{1.17}$$

(момент инерции относительно оси Ox);

$$J_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y)dxdy \tag{1.18}$$

(момент инерции относительно оси Oy);

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy \tag{1.19}$$

(момент инерции относительно начало координат).

Величина J_0 называется *полярным моментом инерции* и может быть выражена равенством:

$$J_O = J_X + J_Y. \tag{1.20}$$

Если плоская фигура D является однородной и симметричной относительно оси абсцисс (ординат), то момент инерции $J_x(J_y)$ равен удвоенному моменту инерции относительно оси $Ox(Oy)$ половины этой фигуры, расположенной по одну сторону от оси абсцисс (ординат).

Примеры решения задач

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y = x$ (рис. 1.13).

Решение. Найдем точки пересечения кривых (координаты точки A)

$$\begin{cases} y^2 = 2x \Rightarrow (x^2 = 2x) \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0 \;\; x_2 = 2, \, y_2 = 2, \\ y = x. \end{cases}$$

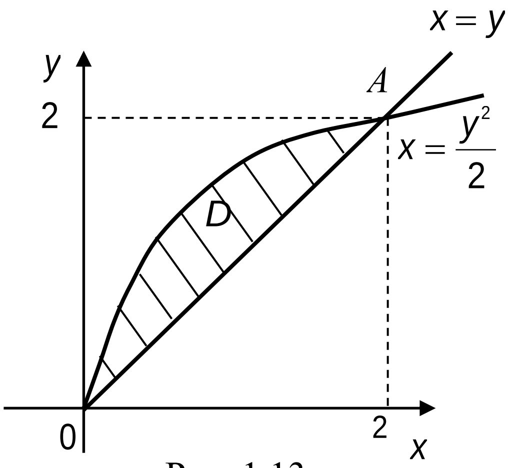


Рис. 1.13

Проекция области D на ось Oy есть отрезок $[0,\ 2]$. Согласно формуле (1.8), имеем:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx = \int_0^2 dy \cdot x \Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y} = \int_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$; $y = 2x^2 - 5x$ (рис.1.14).

Решение. Найдем координаты точек пересечения кривых:

$4x - x^2 = 2x^2 - 5x;$

$4x - x^2 - 2x^2 + 5x = 0;$

$9x - 3x^2 = 0;$

$3x(3 - x) = 0;$

$x_1 = 0;\ y_1 = 0;$

$x_2 = 3;\ y_2 = 3.$

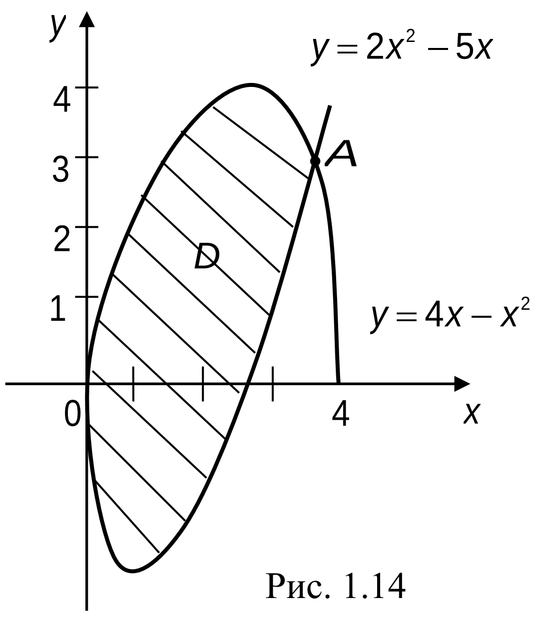


Рис. 1.14

Таким образом, согласно формуле (1.18):

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^3 dx\int_{2x^2-5x}^{4x-x^2} dy=\int_0^3 dx\cdot y\Big|_{2x^2-5x}^{4x-x^2}=\int_0^3(4x-x^2-2x^2+5x)dx=$$

$$=\int_0^3(9x-3x^2)dx=\left(\frac{9x^2}{2}-x^3\right)\Big|_0^3=\frac{81}{2}-27=\frac{27}{2}\text{ (кв. ед.)}.$$

3. Вычислить в полярных координатах площадь области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2=4x$ и прямыми $x=y$, $y=0$ (рис. 1.15).

Решение. Найдем точки пересечения окружности и прямой

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0; \\ y=x. \end{cases}$$

$2x^2-4x=0;\ x_1=0;\ x_2=2;\ y_1=0;\ y_2=2;\ O(0;0);\ M(2;2).$

Для построения окружности преобразуем ее уравнение:

$$(x^2+y^2-4x+4=4)\Leftrightarrow((x-2)^2+y^2=4),$$

откуда следует, что центр окружности есть точка O_1, а радиус – равен 2. Для нахождения искомой площади в полярных координатах находим r и φ. Учитывая, что $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, запишем уравнение окружности в полярных координатах:

$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-4r\cos\varphi=0)\Leftrightarrow(r^2-4r\cos\varphi=0)\Rightarrow r_1=0;\ r_2=4\cos\varphi.$$

Теперь находим угол $\varphi:\ \mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{2}{2}=1;\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$

Следовательно, область D определяется системой неравенств: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4};\ 0\le r\le 4\cos\varphi.$

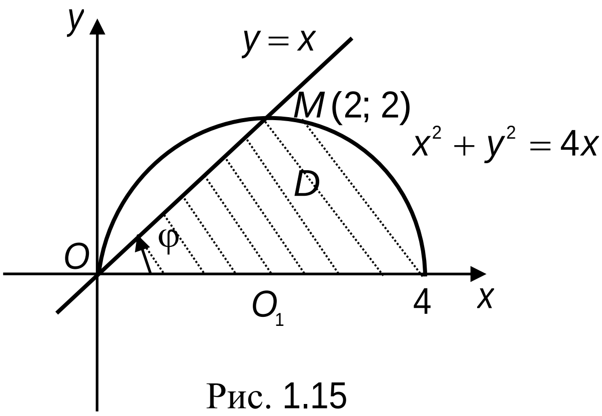


Рис. 1.15

$$S=\iint\limits_{D} dxdy=\iint\limits_{D'} rdrd\varphi=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_{0}^{4\cos\varphi} rdr=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{4\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}16\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=4(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\pi+2 \text{ (кв. ед.)}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(2x+3y+5)^2+(x+2y-3)^2=64$.

Решение. Положим $\begin{cases}2x+3y+5=u\\ x+2y-3=v\end{cases}$ или $\begin{cases}x=2u-3v-19\\ y=-u+2v+11\end{cases}$.

Имеем $\dfrac{dx}{du}=2$; $\dfrac{dx}{dv}=-3$; $\dfrac{dy}{du}=-1$; $\dfrac{dy}{dv}=2$. $I(u,v)=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-3=1$.

В новых координатах (u,v) кривая имеет вид $u^2+v^2=64$. Это означает, что написанные формулы преобразуют круг $u^2+v^2\le 64$ (область G) в данную фигуру D: $(2x+3y+5)^2+(x+2y-3)^2=64$. Т.к. площадь круга 6 равна $r=\pi R^2=64\pi$, то имеем

$$S=\iint\limits_{D} dxdy=\iint\limits_{G}|I(u,v)|dudv=64\pi.$$

5. Вычислить площадь треугольника, образованного при пересечении плоскости $x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями (рис. 1.16).

Решение. Найдем отрезки, отсекаемые на координатных осях данной плоскости (см. рис.1.16):

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1;\ x=6;\ y=2;\ z=3$$

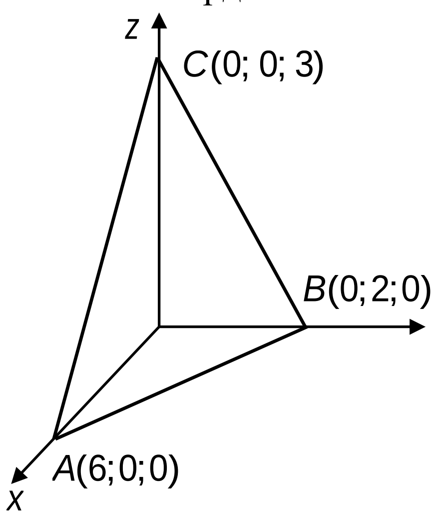


Рис. 1.16

Чтобы воспользоваться формулой (1.11), решим уравнение данной плоскости относительно переменной z и найдем частные производные:

$$z = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y;\ z'_x = -\frac{1}{2};\ z'_y = -\frac{3}{2}.$$

При $z = 0$ имеем $x + 3y = 6$, откуда $y = 2 - \frac{1}{3}x$, следовательно, в плоскости $z = 0$ область D запишется в виде системы неравенств

$$0 \le x \le 6;\ 0 \le y \le 2 - \frac{1}{3}x.$$

Тогда

$$S = \iint\limits_{D_{oxy}} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}\, dxdy = \int_0^6 dx \int_0^{2-\frac{x}{3}} \frac{\sqrt{14}}{2} dy = \frac{\sqrt{14}}{2} \int_0^6 dx \cdot y \Big|_0^{2-\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \int_0^6 (2 - \frac{x}{3}) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2} (2x - \frac{x^2}{6}) \Big|_0^6 = 3\sqrt{14} \text{ (кв.ед.).}$$

6. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 16$, заключенной между плоскостями $z = 0, z = 4x, y = 0$.

Решение. Искомая поверхность лежит в I октанте (рис. 1.17). Проекция поверхности на плоскость $xOz\ (y = 0)$ есть прямоугольный треугольник, в котором $OA = x = 4$ и уравнение гипотенузы OB имеет вид $z = 4x$. Следовательно, область D в плоскости Oxz определяется системой неравенств: $0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 4x$.

Т.к. заданная поверхность спроектирована на плоскость Oxz, для вычисления площади поверхности применим формулу (1.13). Из уравнения цилиндра получим

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad (y \ge 0).$$

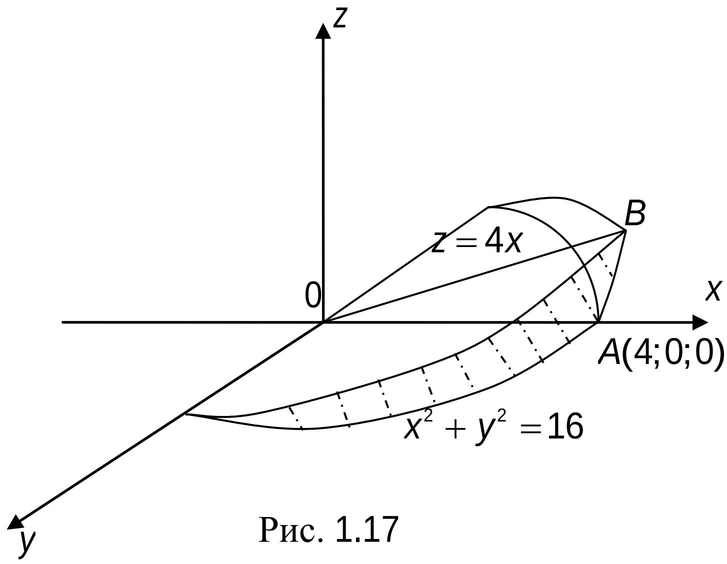


Рис. 1.17

Находим частные производные:

$$y'_x = -\frac{2x}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}; \quad y'_z = 0.$$

Тогда $S = \iint\limits_{D_{xoz}} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}\, dxdz = \int_0^4 dx \int_0^{4x} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\, dz = 4\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \cdot z\Big|_0^{4x} =$

$$= 4\int_0^4 \frac{4xdx}{\sqrt{16-x^2}} = -8\int_0^4 (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(16-x^2) = -8\frac{(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^4 = -16(0-4) = 64 \text{ (кв. ед.)}.$$

7. Вычислить координаты центра тяжести однородной фигуры $(\rho = 1)$, ограниченной кривой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 4$ (рис. 1.18).

Решение. Фигура симметрична относительно оси Ox, поэтому центр тяжести лежит на оси Ox и $y_c = 0$. Абсциссу центра тяжести найдем по формуле (1.16′). Область D определяется неравенствами:

$$0 \le x \le 4; \quad -2\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}.$$

Площадь фигуры D найдем по формуле:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^4 4\sqrt{x}dx=4\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{64}{3}\text{ (кв.ед.).}$$

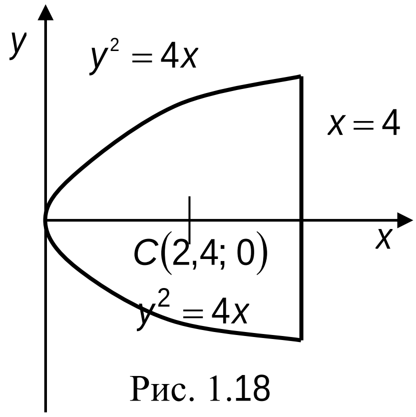


Рис. 1.18

Следовательно $x_c=\frac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy=\frac{3}{64}\int\limits_0^4 xdx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\frac{3}{64}\int\limits_0^4 x\cdot 4\sqrt{x}dx=\frac{3}{64}\int\limits_0^4 4\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=$

$$=\frac{3}{16}\cdot\frac{x+^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Bigg|_0^4=\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{x^5}\Big|_0^4=\frac{3}{40}\cdot\sqrt{4^5}=\frac{12}{5}=2{,}4\,.$$

Итак, центр тяжести фигуры – точка $C(2{,}4;\,0)$.

8. Найти координаты центра тяжести прямоугольного треугольника OAB, катеты которого равны 2 и 4. Плотность в каждой точке треугольника численно равна абсциссе этой точки (рис. 1.19).

Решение. Гипотенуза треугольника проходит через точки $B(2;\,0)$ и $A(0;\,4)$. Ее уравнение имеет вид: $\left(\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{4-0}\right)\Leftrightarrow\big(4(x-2)=-2y\big)\Rightarrow y=-2x+4$. Область D определяется системой неравенств: $0\le x\le 2;\quad 0\le y\le -2x+4$; поверхностная плотность $\rho(x,y)=x$. Для вычисления координат центра тяжести последовательно применим формулы (1.14), (1.15) и (1.16).

Имеем:

а) масса треугольника равна: $m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{-2x+4}dy=$

$$=\int_0^2 xdx\cdot y\Big|_0^{4-2x} =\int_0^2 (4x-2x^2)dx=(2x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 =8-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}.$$

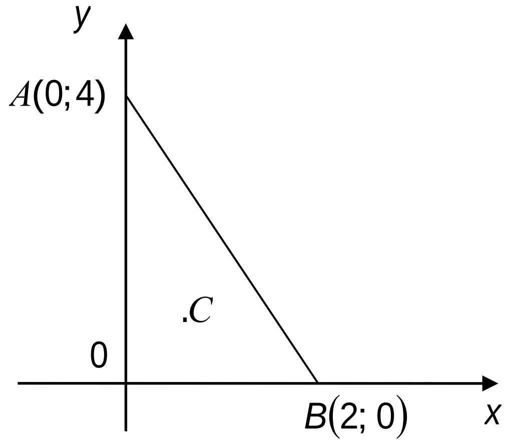


Рис. 1.19

б) вычислим статистические моменты относительно координатных осей

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)dxdy=\int_0^2 xdx\int_0^{4-2x} ydy=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx\cdot y^2\Big|_0^{4-2x} =\frac{1}{2}\int_0^2 x(4-2x)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (16x-16x^2+4x^3)dx=\frac{1}{2}(\frac{16x^2}{2}-\frac{16x^3}{3}+x^4)\Big|_0^2 =\frac{1}{2}(32-\frac{16}{3}\cdot 8+16)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{144-128}{3}=\frac{8}{3}.$$

$$M_y=\iint_D x\rho(x,y)dxdy=\int_0^2 x^2dx\int_0^{4-2x} dy=\int_0^2 x^2dx\cdot y\Big|_0^{4-2x} =\int_0^2 x^2(4-2x)dx=$$

$$=\int_0^2 (x^2(4-2x)dx=\int_0^2 (4x^2-2x^3)dx=(\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^4}{4})\Big|_0^2 =\frac{4\cdot 8}{3}-\frac{2\cdot 16}{4}=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}.$$

в) координаты центра тяжести: $x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{8/3}{8/3}=1;\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{8/3}{8/3}=1.$

Следовательно $C(1;1)$ – центр тяжести треугольника.

9. Найти моменты инерции квадратной пластины $0\le x\le a,\ 0\le y\le a$ относительно осей координат и начала координат, если плотность пластины пропорциональна ординате точки пластины с коэффициентом k.

Решение. Вычисление произведем по формулам (1.17), (1.18) и (1.20), учитывая, что $\rho(x, y) = ky$:

1) $J_x = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} ky\cdot y^2dxdy = k\int_0^a dx\int_0^a y^3dy = k\int_0^a dx\cdot\left.\dfrac{y^4}{4}\right|_0^a = \dfrac{a^4}{4}\cdot k\cdot x\Big|_0^a = \dfrac{a^5k}{4}$;

2) $J_y = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} ky\cdot x^2dxdy = k\int_0^a x^2dx\int_0^a ydy = k\int_0^a x^2dx\cdot\left.\dfrac{y^2}{2}\right|_0^a = \dfrac{a^2}{2}\cdot k\cdot\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{a^5k}{6}$;

3) $J_0 = J_x + J_y = \dfrac{a^5k}{4} + \dfrac{a^5k}{6} = \dfrac{5ka^5}{12}$.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить площадь плоской фигуры в прямоугольных координатах, если область D ограничена линиями:

1. $y = \dfrac{8}{x};\quad y = -x + 9$;
2. $y = \dfrac{4}{x};\quad y = x;\quad y = 4$;
3. $y = \sin x;\quad y = \cos x;\quad x = 0$;
4. $y^2 = 4x;\quad y = x$;
5. $y = x^2;\quad y = -x^2 + 2;\quad x = 0$;
6. $x = y^2 - 2y;\ x + y = 0$;
7. $y^2 = 4x - x^2;\ y^2 = 2x$ (вне параболы);
8. $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0;\ 3x - 3y - 7 = 0$;
9. $x = 0;\quad y = \dfrac{3}{2}x;\quad y = 4 - (x-1)^2$;
10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2};\quad x + y = 2$;
11. $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.

Вычислить в полярных координатах площади областей, ограниченных заданными линиями:

12. $r=1;\quad r=2\cos\varphi$ (вне окружности $r=1$);

13. $r=a\cos\varphi;\quad r=a(1+\cos\varphi);\quad a>0$;

14. $x^2+y^2=2x;\quad y^2=4x;\quad x=4;\quad y\geq 0$;

15. $x^2+y^2+2y=0;\quad y=-1;\quad y=-x$;

16. $x^2+y^2=2x;\quad y^2+x^2=4x;\quad y=x;\quad y=0$;

17. $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$

С помощью двойного интеграла вычислить объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

18. $z=6;\quad y=x^2;\quad y=4;\quad x=0;\quad z=0$;

19. $z=3-x-y;\quad x=0;\quad y=x^2+1;\quad y=2;\quad z=0$;

20. $z=4-x^2;\quad x+y-4=0;\quad x=0;\quad y=0;\quad z=0$;

21. $z=2-x;\quad y^2=9x;\quad y=3x^2;\quad z=0$;

22. $z=x^2+y^2;\quad x=0;\quad x=3;\quad y=2;\quad z=0$;

23. $z=16-(x^2+y^2);\quad z=0$;

24. $z=\sqrt{x^2+y^2};\quad x^2+y^2=9;\quad z=0$;

25. $z=x^2+y^2;\quad x^2+y^2+z^2=12;\quad z=0$.

26. Вычислить площадь треугольника, который образуется пересечением плоскости $3x+2y+4z=12$ с координатными плоскостями.

27. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=16$, отсеченного плоскостями $z=0;\quad z=8$.

28. Найти площадь части поверхности полусферы $z^2+y^2+z^2=16\ (z\geq 0)$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=4$.

29. Найти площадь части боковой поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=6$.

30. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x^2+z^2=2y$, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостью $y=4$.

31. Найти массу треугольной пластины, ограниченной прямыми $y=-\frac{2}{3}x+6;\quad y=\frac{1}{3}x$ и осью OY, если плотность $\rho(x,y)$ распределения массы в каждой точке пластины численно равна ординате этой точке.

32. Найти массу квадратной пластины со стороной $a=4$, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до одной из вершин квадрата. Коэффициент пропорциональности равен k.

33. Найти массу кругового кольца, радиусы которого $R_1=2$ и $R_2=6$, а поверхностная плотность в каждой точке кольца обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца. Коэффициент пропорциональности равен k.

34. Вычислить массу пластины D с плотностью $\rho(x,y)=\sqrt{1+x^2}$, если D: $y^2-x^2\le 1;\quad 0\le x\le 1;\quad y\ge 0$.

35. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, если D ограничена кривыми $x^2=2y;\quad x^2+y^2=8;\quad y=0\ (x>0)$ и $\rho(x,y)=k$.

36. Найти статистические моменты относительной осей Ox и Oy однородных пластин $(\rho=1)$, имеющих формулы:

а) треугольника с вершинами $O(0;0);\quad A(6;0);\quad B(0;8)$.

б) полукруга $x^2+y^2=16;\quad y\ge 0$.

в) параболы $y=x^2;\quad x\ge 0;\quad y=4$.

37. Найти статистические моменты относительно осей Ox и Oy пластины, ограниченной прямыми $x-3y=0;\quad 2x+3y-18=0$ и осью Oy, если плотность в любой точке пластинки равна ординате этой точки.

38. Найти координаты центра тяжести однородной пластины $(\rho=1)$, ограниченной линиями:

а) прямой $4x+3y-12=0$ и осями координат.

б) параболой $y=x^2$ и прямой $x-y+2=0$.

в) параболами $y=x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямыми $x=0$; $x=2$.

г) полуволной синусоиды $y=\sin x\ (y\geq 0)$; $0\leq x\leq \pi$.

39. Найти координаты центра тяжести треугольной пластины, ограниченной прямыми $y=\frac{x}{3}$; $y=6-\frac{2}{3}x$ и осью Oy. Плотность в каждой точке этой пластины равна абсциссе этой точки.

40. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластины $(\rho=1)$, ограниченной кривыми $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x>0$.

41. Найти моменты инерции J_x, J_y, J_0 однородной пластины, ограниченной заданными линиями:

а) $x=2$; $y=3$; $x=0$; $y=0$;

б) $y=x$; $x=4$; $y=0$;

в) $y=x^2$; $y=1$; $x=0$;

г) $y=\cos x$; $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.

42. Вычислить моменты инерции J_x, J_y, J_0 пластины, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{4}$, осью Ox и прямой $x=2$, если плотность в каждой точке пластины численно равна ординате этой точки.

43. Вычислить моменты инерции относительно начала координат пластины, ограниченной кривыми:

а) $xy=1$; $xy=2$; $y=x$; $y=2x\ (x>0,\ y>0)$;

б) $x^2+y^2=2x$; $x^2+y^2=4x$; $y=0$; $y>0$.

Плотность ρ принять равной единице.

Ответы

1) $31{,}5-8\ln 8$. 2) $6-4\ln 2$. 3) $\sqrt{2}-1$. 4) $\frac{8}{3}$. 5) $\frac{4}{3}$. 6) $\frac{125}{18}$. 7) $2\pi-\frac{16}{3}$.

8) $\frac{125}{18}$. 9) $\frac{14}{3}$. 10) $\frac{4}{3}$. 11) 10π. 12) $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}$. 13) $\frac{5}{4}\pi a^2$. 14) $\frac{32}{3}-2\pi$.

15) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. 16) $\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$. 17) 6π. 18) 32. 19) $\frac{7}{12}$. 20) $\frac{32}{3}$. 21) $1{,}55$. 22) 26.

23) 128π. 24) 18π. 25) $\left(16\sqrt{3}-22{,}5)\pi\right)$. 26) $3\sqrt{29}$. 27) 256π. 28) $16\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$.

29) $36\sqrt{2}\pi$. 30) $\frac{13\pi}{3}$. 31) 48. 32) $\frac{512k}{3}$. 33) $2k\pi\cdot\ln 3$. 34) $\frac{4}{3}$. 35) $\frac{k}{3}(3\pi-2)$.

36) а) $M_x=64;\ M_y=48$ б) $M_x=\frac{128}{3};\ M_y=0$; в) $M_x=12{,}8;\ M_y=4$.

37) $M_x=156;\ M_y=90$.

38) а) $x_c=1;\ y_c=\frac{4}{3}$; б) $x_c=\frac{1}{2};\ y_c=\frac{1}{2}$; в) $x_c=1{,}5;\ y_c=1{,}8$; г) $x_c=\frac{\pi}{2};\ y_c=\frac{\pi}{8}$.

39) $x_c=2{,}5;\ y_c=3$. 40) $x_c=\frac{\pi a}{4};\ y_c=0$.

41) а) $J_x=18;\ J_y=0;\ J_0=26$; б) $J_x=\frac{64}{3};\ J_y=64;\ J_0=\frac{256}{3}$;

в) $J_x=\frac{2}{7};\ J_y=\frac{2}{15};\ J_0=\frac{44}{105}$; г) $J_x=\frac{2}{9};\ J_y=\frac{\pi^2}{4}-2;\ J_0=\frac{\pi^2}{4}-\frac{16}{9}$.

42) $J_x=\frac{1}{18};\ J_y=\frac{4}{7};\ J_0=\frac{79}{7}$ 43) а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{45}{16}$.

2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Тройной интеграл в прямоугольных координатах и его приложения

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M некоторой замкнутой пространственной области G и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\cdot \Delta V_1 + f(M_2)\cdot \Delta V_2 + \ldots + f(M_n)\cdot \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i ,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области G.

При составлении интегральной суммы можно различными способами разбить область G на n частичных областей и в каждой из них можно произвольно выбрать одну точку M_i. Поэтому для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной области G можно составить сколько угодно различных интегральных сумм. И все эти интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей имеют один общий предел, который называется *тройным интегралом* от функции $f(M)$ по области G и обозначается $\iiint\limits_G f(M)dV$.

Свойства тройного интеграла: область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла; если в области G $f(x,y,z)\equiv 1$, то $V = \iiint\limits_G dV = \iiint\limits_G dxdydz$, где V – объем области G.

Область G, ограниченная поверхностью σ, называется *правильной*, если выполняются следующие условия:

1. любая прямая, параллельная OZ, проведенная через внутренние точки области G, пересекает поверхность σ ровно в двух точках;

2. вся область G проектируется на плоскость OXY в правильную область D.

Вычисление тройного интеграла в прямоугольных декартовых координатах производится с помощью последовательных интегрирований. Пусть пространственная область G ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху $z = z_2(x, y)$ и является правильной. Область D – ее проекция на плоскость OXY (рис.2.1). Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

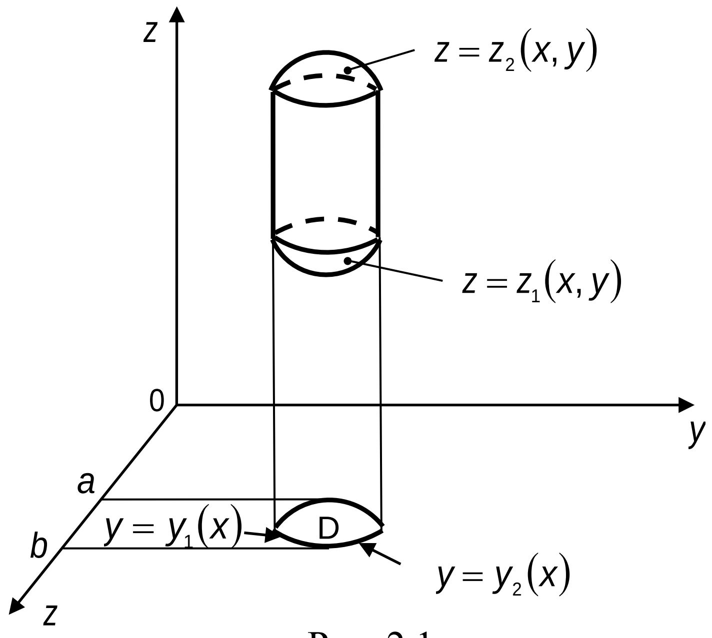


Рис. 2.1

$$\iiint\limits_G f(M)dV = \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz \quad \text{или} \quad \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Здесь внутренний интеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ берется по z при фиксированных, но произвольных в D значениях x и y. В результате получается некоторая функция $\psi(x, y)$, которая затем интегрируется по области D. Если область D ограничена линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, то переходя от двойного интеграла $\iint\limits_D \psi(x,y)dxdy$ к двукратному, получаем *формулу для вычисления тройного интеграла*:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Наиболее простой вид эта формула принимает, если область G представляет собой прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=p$, $z=q$:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)dz .$$

Механический смысл тройного интеграла: если $f(x,y,z)>0$ в области G, то тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dv$ представляет собой массу тела, занимающую область G и имеющего переменную плотность $\rho(x,y,z)= f(x,y,z)$, т.е.

$$m=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dv:$$

Координаты центра масс тела:

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_G x\cdot\rho(x,y,z)dv,$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_G y\cdot\rho(x,y,z)dv,$$

$$z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_G z\cdot\rho(x,y,z)dv.$$

Величины $M_x=\iiint\limits_G x\cdot\rho(x,y,z)dv$, $M_y=\iiint\limits_G y\cdot\rho(x,y,z)dv$, $M_z=\iiint\limits_G z\cdot\rho(x,y,z)dv$ называются статистическими моментами тела относительно плоскостей OYZ, OXZ, OXY соответственно. Если $\rho(x,y,z)=const$, координаты центра масс не зависят от плотности тела G.

Моменты инерции тела:

Момент инерции относительно начала координат тела $G \in R^3$ плотностью $\rho(x, y, z)$ определяется по формуле

$$I_0 = \iiint_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz;$$

моменты инерции относительно координатных осей OX, OY, OZ соответственно:

$$I_x = \iiint_G \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_y = \iiint_G \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_G \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей OXY, OYZ, OXZ соответственно:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz.$$

Примеры

1. Вычислить трехкратный интеграл $I = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{4} (5 + z) dz$ и построить его область интегрирования.

Решение. Вычислим последовательно три обыкновенных определенных интеграла, начиная с внутреннего:

$$I_1 = \int_0^4 (5 + z) dz = \left.\frac{(5 + z)^2}{2}\right|_0^4 = \frac{81 - 25}{2} = 28;$$

$$I_2 = \int_{x^2}^{1} I_1 dy = 28 \int_{x^2}^{1} dy = 28y \Big|_{x^2}^{1} = 28\left(1 - x^2\right);$$

$$I_3 = I = \int_{-1}^{1} I_2 dx = 28\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx = 28\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 28 \cdot \frac{4}{3} = 37\frac{1}{3}.$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования данного трехкратного интеграла. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения: $x = -1,\ x = 1,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 4$. Построив в системе координат $OXYZ$ поверхности, соответствующие этим уравнениям, определяем, что ограниченная ими область есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси OZ (рис.2.2).

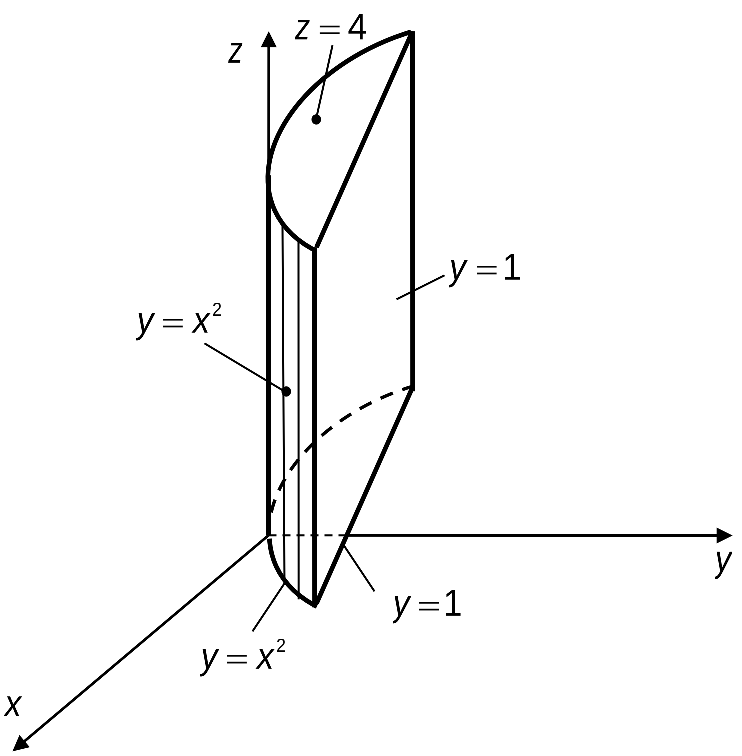


Рис. 2.2

2. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1 - x - y}$, если область V ограничена плоскостями $x = 0,\ x = 1,\ y = 2,\ y = 5,\ z = 2,\ z = 4$.

Решение. Данные плоскости ограничивают прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат (рис. 2.3). Для данной области интегрирования пределы всех однократных интегралов, к вычислению которых сводится вычисление тройного интеграла, будут постоянные.

$$I = \iint\limits_{ABCD} \frac{dxdy}{1-x-y}\int\limits_{z_1}^{z_2} dz = \iint\limits_{ABCD} \frac{dxdy}{1-x-y}\int\limits_{2}^{4} dz = \int\limits_{2}^{5} dy \int\limits_{0}^{1} z\Big|_{2}^{4} \frac{dx}{1-x-y} = 2\int\limits_{2}^{5} dy \int\limits_{0}^{1} \frac{d(1-x-y)}{1-x-y} =$$

$$= -2\int\limits_{2}^{5} \ln|1-x-y|\Big|_{x=0}^{x=1} = 2\int\limits_{5}^{2} \left(\ln|y| - \ln|y-1|\right) dy.$$

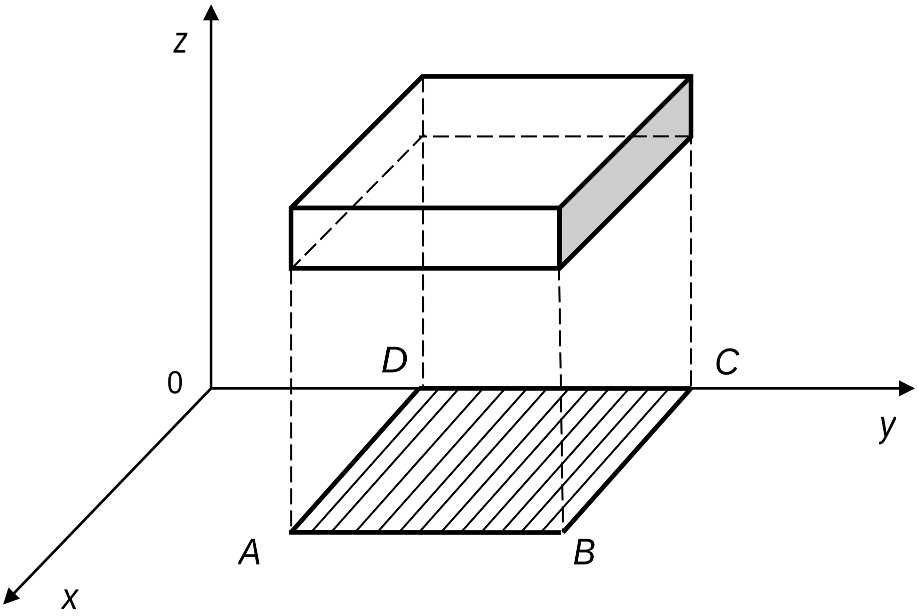


Рис. 2.3

Выполняя замену переменных, для интегрирования по частям разности двух интегралов, получим

$$\begin{bmatrix} u_1 = \ln y, & u_2 = \ln(y-1) \\ du_1 = \frac{1}{y}dy, & du_2 = \frac{1}{y-1}dy \\ dv_1 = dy, & dv_1 = dy \\ v_1 = y, & v_2 = y \end{bmatrix} = 2\left[y\ln y - (y-1)\ln|y-1|\right]\Big|_{5}^{2} = 10\ln\frac{4}{5}.$$

3. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где область V ограничена плоскостями $x+z=3, y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Решение. Данные плоскости ограничивают треугольную призму (рис. 2.4).

$$I=\iint\limits_{V_{xy}} dxdy\int\limits_{Z_N=0}^{Z_Q=3-x}(x+y+z+1)^{-3}dz=\iint\limits_{ABCO}\left.\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right|_{Z=0}^{Z=3-x}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 dx\int_0^2\left[(x+y+1)^{-2}-(y+4)^{-2}\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{1}{y+4}-\left.\frac{1}{x+y+1}\right|_{y=0}^{y=2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{12}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-\frac{x}{12}\right)\Bigg|_0^3=\frac{4\ln 2-1}{8}.$$

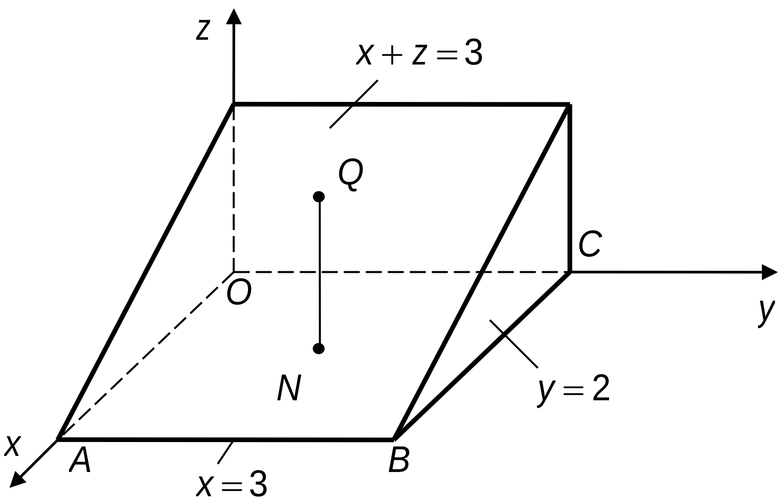


Рис. 2.4

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$.

Решение. Тело ограничено снизу параболическим цилиндром $z=y^2+z$, сверху также параболическим цилиндром $z=4-y^2$, а с боков – плоскостями $x=-1$, $x=2$ (рис. 2.5). Оно проектируется в область D плоскости Oxy,

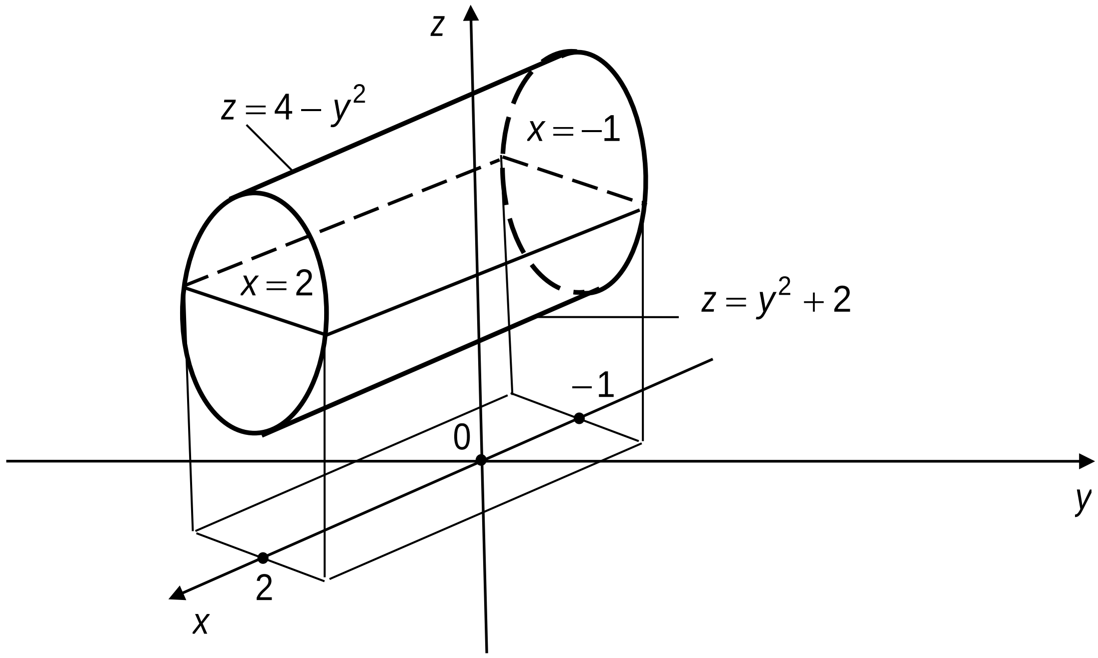


Рис. 2.5

являющуюся прямоугольником, который ограничен прямыми $x = 1$, $y = 1$, $y = -1$ (рис. 2.6). Два последних уравнения получены в результате исключения z из уравнений цилиндров.

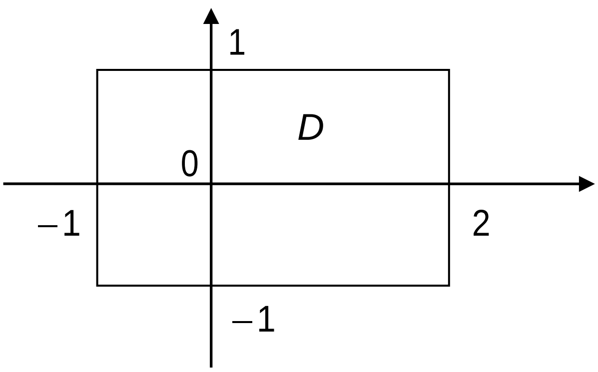


Рис. 2.6

$$V = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} z \Big|_{y^2+2}^{4-y^2} dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} \left(4 - y^2 - y^2 - 2\right) dy = \int_{-1}^{2} \left(2y - \frac{2}{3} y^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} dx =$$

$$\int_{-1}^{2} \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(4 - \frac{4}{3}\right) dx = \frac{8}{3} x \Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3}(2+1) = 8 \text{ (куб. ед.).}$$

5. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{1}{2}y^2$, $2x+3y-12=0$, $x=0$, $z=0$.

Решение. Тело ограничено сверху параболическим цилиндром $z=\frac{1}{2}y^2$, снизу плоскостью $z=0$, с боков плоскостями $x=0$, $3x+4y=12$ (рис. 2.7). Его проекция на плоскость Oxy есть прямоугольный треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $3x+4y=12$ (рис. 2.8). Т.к. плотность $\rho(x,y,z)=1$, то масса M тела равна его объему V.

$$V=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3} dy\int_0^{y^2/2} dz=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3} z\Big|_0^{y^2/2} dy=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3}\frac{1}{2}y^2dy=\frac{1}{6}\int_0^6 y^3\Big|_0^{(12-2x)/3}dx=$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27}\int_0^6(12-2x)^3dx=\frac{1}{142}\cdot\frac{(12-2x)^4}{-8}\Bigg|_0^6=\frac{1}{142\cdot 8}\cdot 12^4=16 \text{ (куб.ед.).}$$

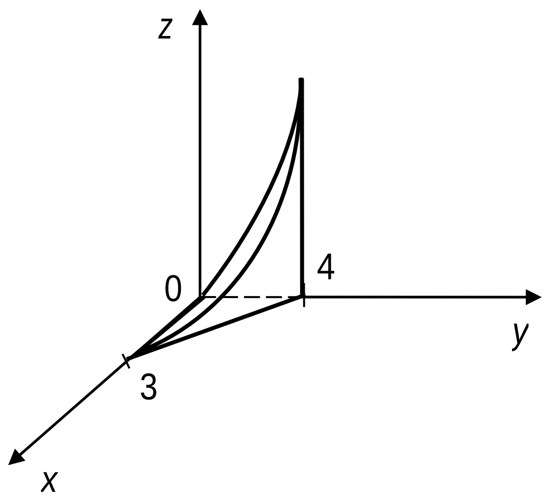


Рис. 2.7

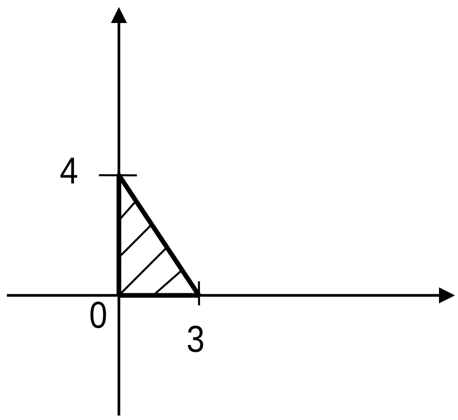


Рис. 2.8

Вычислим статистические моменты тела:

$$M_{0yz}=\int_0^4 dy\int_0^{6-3y/2} xdx\int_0^{y^2/2} dz=\int_0^4 dy\int_0^{6-3y/2} xz\Big|_0^{y^2/2} dx=\frac{1}{2}\int_0^4 y^2\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{6-3y/2} dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^4 y^2\left(36-18y+\frac{9}{4}y^2\right)dy=\frac{1}{4}\left(12y^3-\frac{9}{2}y^4+\frac{9}{20}y^5\right)\Bigg|_0^4=\frac{96}{5}.$$

$$M_{0xz}=\int_0^4 ydy\int_0^{6-3y/2}dx\int_0^{y^2/2}dz=\int_0^4 ydy\int_0^{6-3y/2}z\Big|_0^{y^2/2}dx=\int_0^4\frac{y^3}{2}dy\int_0^{6-3y/2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 y^3\cdot x\Big|_0^{6-3y/2}dy=\frac{1}{2}\int_0^4\left(6y^3-\frac{3}{2}y^4\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y^4-\frac{3}{10}y^5\right)\Bigg|_0^4=\frac{192}{5}.$$

$$M_{0xy}=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3}dy\int_0^{y^2/2}zdz=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3}\frac{z^2}{2}\Big|_0^{y^2/2}dy=\int_0^6 dx\int_0^{(12-2x)/3}\frac{1}{8}y^4dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^6\frac{1}{5}\cdot y^5\Big|_0^{(12-2x)/3}dx=\frac{1}{40}\int_0^6\frac{(12-2x)^5}{3^5}dx=\frac{1}{40\cdot 243}\cdot\frac{(12-2x)^6}{-12}\Bigg|_0^6=\frac{128}{5}.$$

Координаты центра масс тела:

$X_c=\dfrac{M_{0yz}}{V}=\dfrac{6}{5}$, $Y_c=\dfrac{M_{0xz}}{V}=\dfrac{12}{5}$, $Z_c=\dfrac{M_{0xy}}{V}=\dfrac{8}{5}$, таким образом, $C\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5}\right)$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\int_0^a ydy\int_0^h dx\int_0^{a-y}dz$.

2. Вычислить $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\int_{1-x}^{2-2x}dz$.

3. Вычислить $\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 xdx\int_0^3 z^2dz$.

4. Вычислить $\iiint_G\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область G – прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$.

5. Вычислить $\iiint_G xy^2z^3dxdydz$, если область G ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

6. Вычислить $\iiint_G xdxdydz$, если область G ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=3$ и $x+z=2$.

7. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{1-x-y}$, если область G ограничена плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

8. Вычислить $\iiint\limits_G (2x+3y-z)dxdydz$, где G – призма, ограниченная плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=3,\ x+y=2$.

9. Вычислить $\iiint\limits_G dxdydz$, где G – параллелепипед, ограниченный плоскостями $x+y=1,\ x+y=2,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=3$.

10. Вычислить $\iiint\limits_G ydxdydz$, где область G ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+y+z=4$.

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2,\ y=x,\ y=2x,\ x=1$.

12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2=4-3x,\ y^2=x,\ z=\pm h$.

13. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y^2=ax,\ 2x+z=2a,\ x+z=a,\ y=0\ (y>0)$, если плотность $\rho(x,y,z)=y$.

14. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

15. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного плоскостями $x/4+y/6+z/2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, относительно плоскости Oxy.

Ответы

1) $\frac{a^3h}{6}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) 30. 4) $\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}$. 5) $\frac{1}{364}$. 6) 4. 7) $\frac{1}{2}$. 8) 11. 9) 3.

10) $\frac{16}{3}$. 11) $\frac{7}{12}$. 12) $\frac{32h}{9}$. 13) $\frac{a^4}{12}$. 14) $C\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. 15) $\frac{16}{5}$.

2.3. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах и его приложения

При решении многих задач удобно использовать системы координат, отличные от декартовой прямоугольной системы. Широко используется полярная система координат, а также ее обобщения на случай пространства R^3 – цилиндрическая и сферическая системы координат, которые относятся к *криволинейным системам координат*.

В случае цилиндрических координат положение точки в пространстве определяется тремя числами r, φ, z, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le \infty$ – полярные координаты проекции точки M на плоскость Oxy, а $-\infty < Z < \infty$ – аппликата точки M (рис. 2.9).

С прямоугольными декартовыми координатами цилиндрические координаты точки связаны соотношениями: $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi,\ z = z$. За элементарную пространственную область примем прямоугольный параллелепипед с ребрами, длины которых $r\Delta\varphi, \Delta r$ и Δz. Его объем $\Delta V \approx r\Delta\varphi\Delta r\Delta z$. Если в пространственной области V задана непрерывная функция $F(\varphi, r, z)$, то тройной интеграл от данной функции по области V имеет вид $\iiint\limits_V F(\varphi, r, z) r d\varphi dr dz$. Если $F(\varphi, r, z) \equiv 1$,

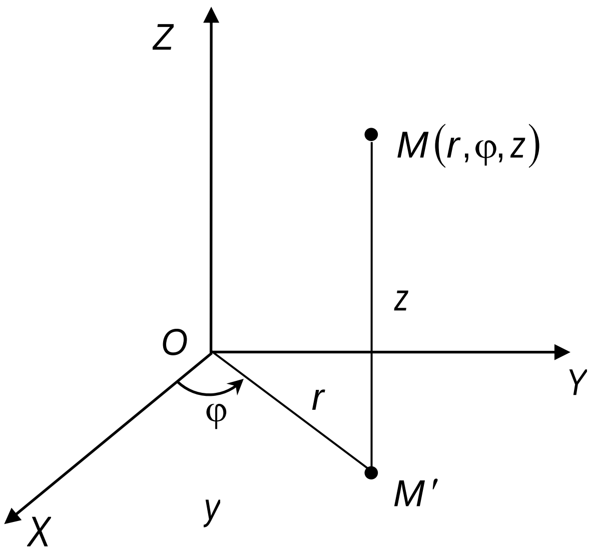


Рис. 2.9

то тройной интеграл выражает объем тела:

$$V = \iiint\limits_V r d\varphi dr dz .$$

Формула перехода от прямоугольных координат к цилиндрическим под знаком тройного интеграла от функции $f(x, y, z)$ имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot rd\varphi drdz .$$

Для того, чтобы расставить пределы интегрирования по области V, нужно уравнения поверхностей, ограничивающих эту область, записать в цилиндрических координатах, а затем привести тройной интеграл к трехкратному и выполнить последовательное интегрирование по z, r, φ:

$$\iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz .$$

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется величинами φ, r, θ, где r – расстояние от точки M до начала координат; θ – угол между радиусом – вектором точки M и осью Oz, φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость Oxy и осью Ox, отсчитываемый от этой оси против хода часовой стрелки, причем $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (рис. 2.10). Элементарная пространственная область в сферических координатах представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами длиной Δr, $r\Delta\theta$ и $r\cdot\sin\theta\Delta\varphi$, объем которого $\Delta V = r^2 \sin\theta\Delta r\cdot\Delta\theta\Delta\varphi$.

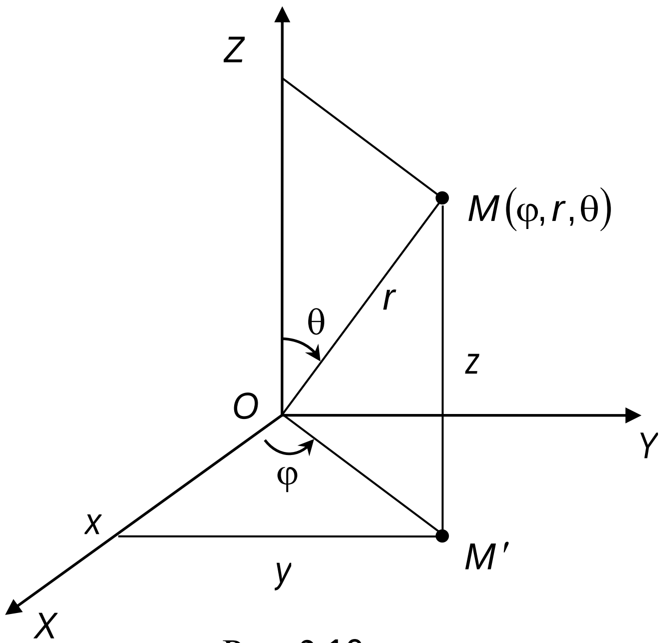


Рис. 2.10

Тройной интеграл от непрерывной функции $F(\varphi, r, \theta)$ по области V имеет вид:

$$\iiint\limits_V F(\varphi, r, \theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Сферические координаты связаны с прямоугольными декартовыми соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим, при условии, что пределы интегрирования определяются формой области V:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) dr.$$

Приложения тройного интеграла

1. *Объем тела*, занимающего область V, определяется по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Если плотность тела переменная, т.е. $\rho = \rho(x, y, z)$, то *масса тела*, занимающего область V:

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) dxdydz.$$

3. *Координаты центра тяжести* тела определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho\cdot x\cdot dxdydz;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho\cdot y\cdot dxdydz;$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho\cdot z\cdot dxdydz;$$

При $\rho = 1$ имеем $\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz$; $\bar{y} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz$; $\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz$

($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ – координаты геометрического центра тяжести).

4. *Моменты инерции* (геометрические) относительно осей координат соответственно равны

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)dxdydz;\ I_y = \iiint\limits_V \left(z^2 + x^2\right)dxdydz;\ I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz\,.$$

Примеры

1. Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, если область V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0,\ z = 0,\ z = a$.

Решение. Введем цилиндрические координаты. Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi \text{ или } r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2r\cos\varphi, \text{ т.е. } r = 2\cos\varphi.$$

В области V_1, являющейся образом области V, координаты r, φ и z изменяются так: $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le z \le a$. Следовательно:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz = \iiint\limits_{V_1} z \cdot r \cdot rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a zdz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi) = \frac{4}{3}a^2\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9}a^2.$$

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$, где V есть шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. В области V_1, являющейся образом области V, переменные r, φ, θ меняются в следующих пределах: $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Подынтегральная функция в сферических координатах примет вид:

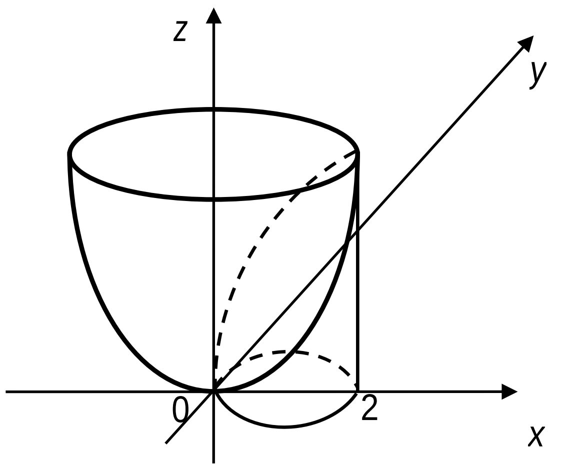
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2.$$

Поэтому

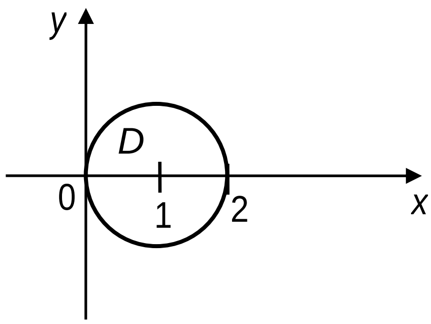
$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\theta d\varphi = \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

3. Перейти в тройном интеграле $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования по области V, ограниченной поверхностями. Найти объем тела, заключенного внутри области V.

Решение. Данное тело ограничено снизу плоскостью $z=0$, сверху параболоидом вращения $z=x^2+y^2$, а с боков цилиндрической поверхностью $(x-1)^2+y^2=1$. (рис. 2.11, а).



а)



б)

Рис. 2.11

Проведем прямые, параллельные оси Oz и пересекающие данное тело. Тогда $z=0$ – поверхность входа, а $z=x^2+y^2$ - поверхность выхода. Проекция D тела на плоскость Oxy есть круг с границей $(x-1)^2+y^2=1$ (рис. 2.11, б) уравнения данных поверхностей в цилиндрических координатах:

$r=2\cos\varphi$ (круговой цилиндр),

$z=r^2$ (параболоид вращения). Тогда:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr \int_0^{r^2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Объем данного тела:

$$V=\iiint\limits_V r dr d\varphi dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r dr\int\limits_0^{r^2}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cdot z\Big|_0^{r^2}dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 dr=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=(\varphi+\sin 2\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4\varphi)=$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2\left(x^2+y^2\right)^2$.

Решение. Переходя к сферическим координатам по формулам $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, уравнение поверхности запишется в виде $r=a\sin^2\theta$.

Полярный радиус r является четной функцией угла θ, поэтому достаточно найти половину объема, положив $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; угол φ может принимать все возможные значения, т.е. $0\le\theta\le 2\pi$.

Имеем:

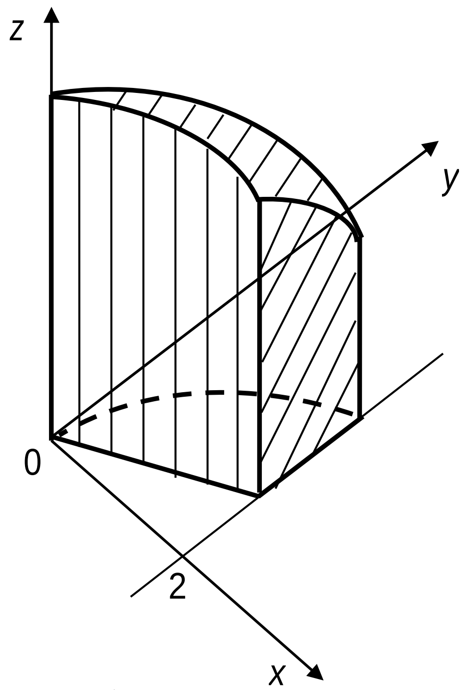
$$\frac{1}{2}V=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V'} r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a\sin^2\theta}r^2 dr=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta d\theta=$$

$$=-\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)^3\cdot d(\cos\theta)=-\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\theta-\cos^3\theta+\frac{3}{5}\cos^5\theta-\frac{1}{7}\cos^7\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=$$

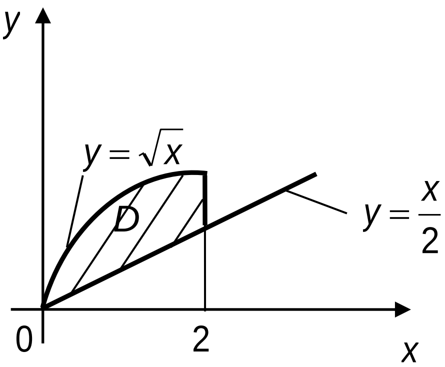
$$=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{16}{35}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=6-z$, $x=2$, $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{x}{2}$, $z=0$, если объемная плотность в каждой точке прямо пропорциональна абсциссе этой точки.

Решение. Воспользуемся формулой $m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\cdot dxdydz$, где $\rho(x,y,z)$ – объемная плотность, в данном случае $\rho=kx$, k – коэффициент пропорциональности. Данное тело ограничено эллиптическим параболоидом $x^2+y^2=6-z$, параболическим цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $x=2$, $y=\dfrac{x}{2}$, $z=0$ (рис. 2.12, а). Проекцией тела на плоскость Oxy является область D, ограниченная дугой параболы $y=\sqrt{x}$ и прямыми $y=\dfrac{x}{2}$, $x=2$ (рис. 2.12, б).



а)



б)

Рис. 2.12

Для расстановки пределов интегрирования в тройном интеграле проводим прямые, параллельные оси Oz и пересекающие область D. Поверхность входа в тело есть $z=0$, поверхность выхода – $z=6-x^2-y^2$. Следовательно

$$m=\iiint\limits_V kxdxdydz=k\iint\limits_D xdxdy\int\limits_0^{6-x^2-y^2}dz\ .$$

Расставим пределы по плоской области D. Линией входа в область является прямая $y=\dfrac{x}{2}$, $0\le x\le 2$, линией выхода – парабола $y=\sqrt{x}$, $0\le x\le 2$. Тогда

$$m=k\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{\sqrt{x}}dy\int\limits_0^{6-x^2-y^2}xdz=k\int\limits_0^2 xdx\cdot\int\limits_{x/2}^{\sqrt{x}}\left(6-x^2-y^2\right)dy=k\int\limits_0^2 x\left(6y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=k\int\limits_0^2\left(6x^{\frac{3}{2}}-3x^2-x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^4}{2}-\frac{1}{3}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{24}x^4\right)dx=$$

$$=k\left(\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^3-\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{21}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{120}x^5\right)\Bigg|_0^2=2{,}94\ \text{(кг)}.$$

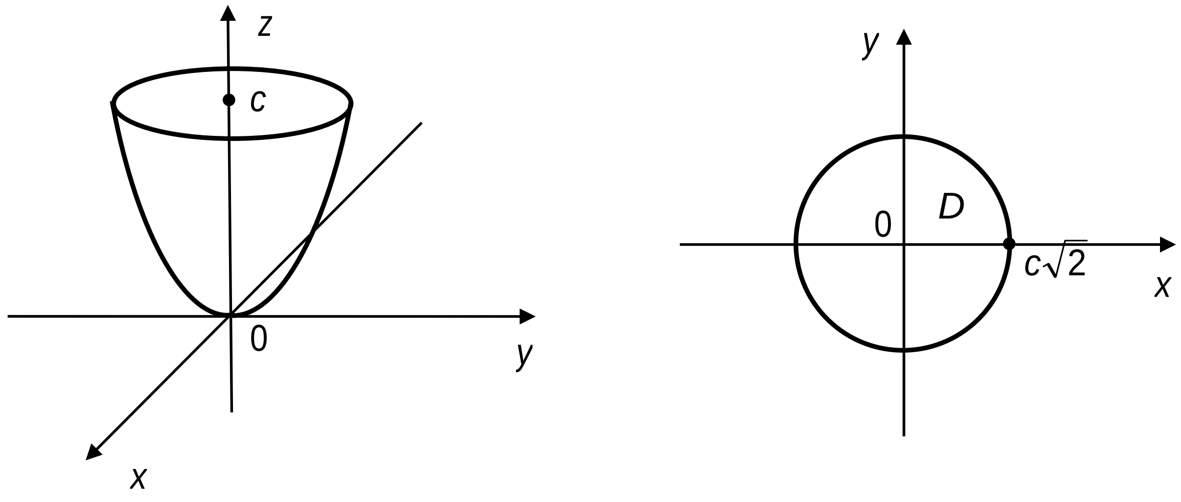
6. Вычислить момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2cz$, $z=c$ $(c>0)$, относительно оси Oz.

Решение. Тело ограничено параболоидом $x^2+y^2=2cz$ и плоскостью $z=c$ (рис. 2.13, а). Проекция тела на плоскость Oxy – круг радиусом $c\sqrt{2}$ (рис. 2.13, б).

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах $r^2=2cz$. Вычислим момент инерции однородного тела с плотностью $\rho(x,y,z)\equiv 1$. Перейдя к цилиндрическим координатам, получим:

$$I_z=\iiint\limits_V r^2\cdot rdrd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{c\sqrt{2}}r^3dr\int\limits_{\frac{r^2}{2c}}^{c}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{c\sqrt{2}}r^3\cdot z\Bigg|_{\frac{r^2}{2c}}^{c}dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{c\sqrt{2}}\left(cr^3-\frac{r^5}{2c}\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{cr^4}{4}-\frac{r^6}{12c}\right)\Bigg|_0^{c\sqrt{2}}d\varphi=c^5\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}\pi c^5.$$



а) б)

Рис. 2.13

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y)dv$, где тело V ограничено плоскостями $x=1;\ y=0;\ z=0;\ y=x;\ x+y+z-4=0$.

2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(xz-y^2\right)dxdydz$, где область V – параллелепипед: $-1\le x\le 2$; $0\le y\le 1$; $1\le y\le 2$.

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (2+z)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $y=x^2$ и плоскостями $y=1;\ z=0;\ z=2$.

4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{4-x}$, где область V ограничена поверхностью $x^2=4-y$ и плоскостями $x=0;\ z=0;\ 2z+x-4=0$.

5. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (2x+y)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $z=1+x^2+y^2$ и плоскостями $y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=1$.

6. Вычислить $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$, преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

7. Вычислить $\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$, преобразовав его к цилиндрическим координатам.

8. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где V – внутренность шара $x^2+y^2+z^2 \le x$.

9. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V ydv$, где тело V представляет собой часть кругового цилиндра $y=0,\ y=\sqrt{2x-x^2}$, ограничено плоскостями $z=0,\ z=a$.

10. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (z+2)dv$, где тело М ограничено двумя полусферами $x^2+y^2+z^2=R_1^2$; $x^2+y^2+z^2=R_2^2$; $R_2>R_1$ и плоскостью $z \ge 0$.

11. Вычислить $\iiint\limits_V ydxdydz$, где тело V ограничено поверхностью $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16$ и плоскостями $y \le \sqrt{3}x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

12. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=32$; $y^2=x^2+z^2$ и плоскостью $y \ge 0$.

13. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, где область V ограничена поверхностями $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $y \ge 0$.

14. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{x \cdot zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область V ограничена поверхностью $z=2\left(x^2+y^2\right)$ и плоскостями $y \ge 0$, $y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z=18$.

15. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x=0,\ y=0,\ x+y=2,\ 2z=x^2+y^2$.

16. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

17. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ и плоскостью $x = a$.

18. Найти массу прямоугольного параллелепипеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, если плотность $\rho(x, y, z)$ в точке (x, y, z) численно равна $(x + y + z)$.

19. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\rho(x, y) = x^2$.

20. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 + y^2 = 4$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\rho(x, y) = 4 - x^2$.

21. Вычислить статический момент относительно оси Oy однородной пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y - x = 0$, $y + x = 0$, используя полярные координаты. Поверхностная плотность пластины $\rho = 2$.

22. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 8$.

23. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную указанными поверхностями $x^2 + y^2 = 4y$, $y = 9$.

24. Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородного тела (плотность $\rho = const$), занимающего область V, ограниченную поверхностью $y = 5 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 1$.

25. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородного тела (плотность $\rho = 1$), занимающего область V, ограниченную поверхностью $x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 3$.

Ответы

1) $\frac{17}{12}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 8. 4) $\frac{16}{3}$. 5) $\frac{41}{60}$. 6) $\frac{8}{9}a^2$. 7) $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 8) $\frac{\pi}{10}$. 9) $\frac{2}{3}a$.

10) $2\pi\left(\frac{R_2^4-R_1^4}{8}+\frac{2}{3}\left(R_2^3+R_1^3\right)\right)$. 11) $\frac{15\pi}{2}$. 12) 128π. 13) $8\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 14) 81. 15) $\frac{4}{3}$.

16) $\frac{32}{9}a^2h$. 17) πabc. 18) $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. 19) $\frac{1}{12}$. 20) 3π. 21) $\frac{7}{3}a^3\left(\frac{3}{8}\pi+1\right)$.

22) $(0;\,0;\,6)$. 23) $(0;\,6;0)$. 24) $\frac{32}{3}\pi\rho$. 25) $\frac{9\pi}{2}$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейные интегралы первого рода

Определение криволинейного интеграла первого рода

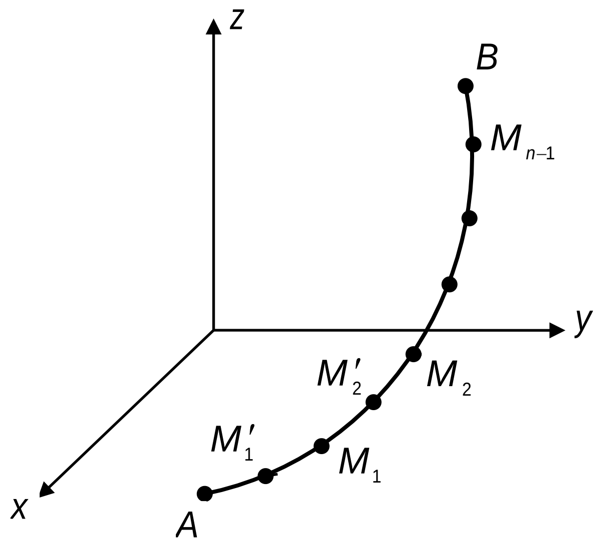


Рис. 3.1

Рассмотрим пространственную, кусочно-гладкую кривую, ограниченную точками A и B (рис. 3.1), и определённую на ней непрерывную функцию $f(x,y,z)=f(M)$, где $M(x,y,z)$ - точка кривой. Дугу AB разобьём точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на n элементарных дуг M_iM_{i-1} $\left(i=\overline{1,n};\, M_0=A,\, M_n=B\right)$, длины которых обозначим через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, а наибольшую из этих длин – через λ. На каждой из элементарных дуг M_iM_{i-1} выберем произвольно одну точку $M_i'(x_i', y_i', z_i')$ и составим сумму

$$J_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i', y_i', z_i'\right)\cdot \Delta l_i, \tag{3.1}$$

называемую интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по длине дуги кривой AB. Криволинейным интегралом первого рода или криволинейным интегралом по дуге кривой AB от функции $f(x,y,z)$ называется предел интегральной суммы (3.1) при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i', z_i')\Delta l_i .$$

На кривой AB, целиком лежащей на плоскости Oxy, функция f от координаты z не зависит, поэтому по определению имеем

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i')\Delta l_i .$$

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода следующие:

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменит своего значения: $\int\limits_{(AB)} f(M)dl = \int\limits_{(BA)} f(M)dl$;

2. $\int\limits_{(AB)} \left(f_1(M) \pm f_2(M)\right)dl = \int\limits_{(AB)} f_1(M)dl \pm \int\limits_{(AB)} f_2(M)dl$;

3. $\int\limits_{(AB)} cf(M)dl = c\int\limits_{(AB)} f(M)dl$;

4. Криволинейный интеграл первого рода вдоль замкнутого контура не зависит от выбора начальной точки на этом контуре;

5. Если путь интегрирования L разбит на части $L_1,\ L_2,\ ...,\ L_n$, то:

$$\int\limits_{L} f(M)dl = \int\limits_{L_1} f(M) + \int\limits_{L_2} f(M) + \ldots + \int\limits_{L_n} f(M).$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определённого интеграла.

Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t_0 \le t \le T$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt . \qquad (3.2)$$

Если кривая AB лежит в плоскости Oxy, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt . \qquad (3.3)$$

Если кривая задана явно в виде $y = y(x),\ \ a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x,\ y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx\,. \quad (3.4)$$

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + [r'\varphi]^2}\,d\varphi\,. \quad (3.5)$$

Если кривая задана уравнением $x = \varphi(y),\ \ (c \le y \le d)$, то криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dl = \int\limits_c^d f(x(y), y) \cdot \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy\,. \quad (3.6)$$

Приложения криволинейных интегралов первого рода

1) Длина l дуги *AB* плоской или пространственной линии вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{(AB)} dl \quad (3.7)$$

(геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода). Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t),\ z = z(t),\ \ (\alpha \le t \le \beta)$, то

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt\,. \quad (3.8)$$

2) Пусть в плоскости Oxy задана гладкая кривая L, на которой определена и непрерывна функция двух переменных $z = f(x, y) \ge 0$. Тогда можно построить цилиндрическую поверхность с направляющей L и образующей, параллельной оси Oz и заключённой между L и поверхностью $z = f(x, y)$. Площадь этой цилиндрической поверхности можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_L f(x, y)dl\,. \quad (3.9)$$

3) Пусть кривая L – материальная, т.е. имеет массу. Пусть Δl – некоторая дуга L, содержащая точку M, а Δm – масса этой дуги. Тогда отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta l}$ называется средней плотностью дуги в точке M. Если $\delta = f(x,y,z)$ рассматривать как линейную плотность дуги в текущей её точке $M(x,y,z)$, то $dm = \delta \cdot \Delta l$ есть масса бесконечно малой дуги dl (элементарная масса) и интеграл

$$m = \int\limits_L \delta dl \tag{3.10}$$

представляет собой массу линии (физический смысл криволинейного интеграла первого рода).

4) Статистические моменты материальной кривой L относительно координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно равны

$$M_x = \int\limits_L x \cdot \delta(x,y,z) dl \quad M_y = \int\limits_L y \cdot \delta(x,y,z) dl \quad M_z = \int\limits_L z \cdot \delta(x,y,z) dl, \tag{3.11}$$

где $\delta(x,y,z)$ – плотность распределения кривой L.

5) Координаты центра тяжести (центра масс) кривой L находятся по формулам:

$$x_c = \frac{M_x}{m}; \quad y_c = \frac{M_y}{m}; \quad z_c = \frac{M_z}{m}. \tag{3.12}$$

6) Моменты инерции относительно начала координат O, осей координат Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta = \delta(x,y,z)$, вычисляются соответственно по формулам:

$$J_0 = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) \delta dl; \quad J_x = \int\limits_{L_{AB}} (y^2 + z^2) \delta dl; \quad J_y = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + z^2) \delta dl;$$

$$J_z = \int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2) \delta dl; \quad J_{xy} = \int\limits_{L_{AB}} z^2 \delta dl; \quad J_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2 \delta dl; \quad J_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2 \delta dl. \tag{3.13}$$

Моменты инерции связаны следующими соотношениями:
$2J_0 = J_x + J_y + J_z$; $J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{xz}$. Если дуга L_{AB} лежит в плоскости Oxy, то рассматриваются только моменты J_0, J_x, J_y (при условии, что $z = 0$).

3.2. Криволинейные интегралы второго рода

Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, T]$ – гладкая (или кусочно-гладкая) кривая L с выбранным направлением (такую линию будем называть путём) и $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – пара функций, непрерывных на кривой L. Учитывая, что дифференциалы текущих координат x и y кривой L имеют вид:

$$dx = x'(t)dt, \qquad dy = y'(t)dt, \tag{3.14}$$

под криволинейным интегралом второго рода от пары функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, взятых по кривой L, понимается интеграл

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_0}^{T} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]dt. \tag{3.15}$$

Если путь L задаётся уравнением $y = y(x)$, $(a \le x \le b)$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] \cdot y'(x)\}dx. \tag{3.16}$$

Аналогично, если L задаётся уравнением $x = x(y)$, $(y \in [A, B])$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A^B \{P[x(y), y] \cdot x'(y) + Q[x(y), y]\}dy. \tag{3.17}$$

Криволинейный интеграл второго рода обладает следующими свойствами:

1) При изменении пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на обратный:

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{(BA)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2) Если путь интегрирования L состоит из двух частей $L = L_1 \cup L_2$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $t \in [t_0, T]$ есть кусочно-гладкая пространственная кривая L и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функции, непрерывные на пространственной кривой L, то криволинейным интегралом второго рода называется интеграл:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left[P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t) \right] dt. \quad (3.18)$$

Векторная форма записи. Физический смысл.

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода по пространственной кривой

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Рассмотрим так называемую вектор-функцию

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{(AB)} \left(\overline{F}(x,y,z), d\overline{r} \right).$$

Физически вектор-функция $\overline{F}(x,y,z)$ ассоциируется с силовым полем, когда в каждой точке пространства на материальную точку действует сила $\overline{F}(x,y,z)$. Физически скалярное произведение $\left(\overline{F}(x,y,z), d\overline{r} \right) = dA$ имеет смысл работы, которую силовое поле $\overline{F}(x,y,z)$ совершает, перемещая материальную точку по вектору $d\overline{r}$. Поэтому, с точки зрения физики, криволинейный интеграл второго рода

$$A = \int\limits_{(AB)} \left(\overline{F}(x,y,z), d\overline{r} \right) \quad (3.19)$$

есть работа, которую совершает силовое поле $\overline{F}(x,y,z)$, перемещая материальную точку по кривой AB.

Обозначим через α, β и γ углы, которые вектор $d\overline{r}$ образует с осями OX, OY и OZ. Так как $\left| d\overline{r} \right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ – дифференциал длины дуги кривой, то $dx = dl \cdot \cos\alpha$; $dy = dl \cdot \cos\beta$; $dz = dl \cdot \cos\gamma$, и можно записать

$$\int\limits_{(AB)} P(x,\ y,\ z)dx + Q(x,\ y,\ z)dy + R(x,\ y,\ z)dz = \int\limits_{(AB)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\lambda)dl\ . \qquad (3.20)$$

Эта формула даёт связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Приложения криволинейных интегралов второго рода

Если начало и конец кривой L совпадают, то получим интеграл по замкнутому контуру. Предположим, что кривая L – граница области D. Такая область называется односвязной. Обход L, при котором область D остаётся слева, называется положительным (L^{+}), а противоположное направление – отрицательным (L^{-}). Интегралы $\oint\limits_{L^{+}} Pdx + Qdy$ и $\oint\limits_{L^{-}} Pdx + Qdy$ означают интегралы по замкнутому контуру, взятые соответственно в положительном или отрицательном направлении обхода L (они отличаются знаками).

Предположим, что в плоскости Oxy имеется односвязная область, ограниченная кривой Г, а в области D и на её границе Г функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ непрерывны вместе со своими частными производными.

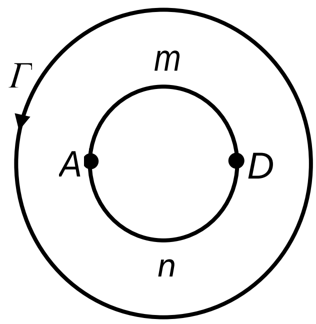


Рис. 3.2

Теорема 3.1. Пусть *A* и *B* – произвольные точки области D, AmB и AnB – два произвольных пути (гладкие кривые), соединяющие эти точки (см. рис. 3.2). Тогда справедливы следующие условия:

1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ – условие Грина.

2) Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$\int\limits_{AmB} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy=\int\limits_{AnB} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy\,.$$

3) Интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю: $\oint\limits_{(AnBmA)} Pdx+Qdy=0$.

4) Выражение $P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U=U(x,\,y)$: $P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy=dU$.

В случае выполнения любого из равносильных условий теоремы 3.1 криволинейный интеграл по любой кривой, соединяющей точки $(x_0,\,y_0)$ и $(x_1,\,y_1)$ из области D можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy=U(x,\,y)\Big|_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)}=U(x_1,\,y_1)-U(x_0,\,y_0). \qquad (3.21)$$

С другой стороны, первообразная $U=U(x,\,y)$ выражения $P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy$ может быть найдена при помощи криволинейного интеграла:

$$U(x,\,y)=\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy\,.$$

Если известен полный дифференциал функции двух переменных $dU=Pdx+Qdy$, где $P'_y=Q'_x$, то её можно найти, интегрируя dU по любой линии между произвольной фиксированной точкой $A(x_0,\,y_0)$ и переменной точкой $M(x,\,y)$:

$$U=\int\limits_{(AM)} P(x,\,y)dx+Q(x,\,y)dy+C\,. \qquad (3.22)$$

Обычно в качестве линии интегрирования *AM* берётся ломаная AN_1M или AN_2M со звеньями, параллельными осям координат (рис. 3.3).

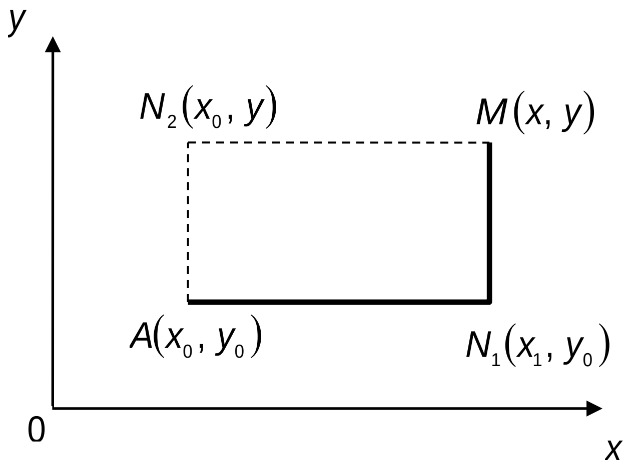


Рис. 3.3

При этом криволинейный интеграл $\int\limits_{(AM)}$ выражается через обыкновенные интегралы и формула (3.22) преобразуется к виду:

$$U = \int\limits_{(AM)} dU + C = \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} P(x_1, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C; \\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C. \end{cases} \tag{3.23}$$

В этих же условиях на функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также на область D, имеет место формула Грина, позволяющая свести криволинейный интеграл по замкнутому контуру к двойному интегралу:

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,. \tag{3.24}$$

Здесь предполагается, что обход границы Г области D в криволинейном интеграле $\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ совершается в положительном направлении, т.е. при таком обходе границы область D остаётся слева; для односвязной области это направление совпадает с направлением против часовой стрелки.

Если формулу Грина применить к функциям $P(x, y) = -y$ и $Q(x, y) = x$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ и $\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdx - ydy = \iint\limits_{D} dxdy = S(D)$, т.е. при помощи криволинейного интеграла, взятого по границе области D, можно вычислить площадь $S(D)$ этой области:

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdx - ydy. \tag{3.25}$$

(3.25) – геометрический смысл криволинейного интеграла второго рода.

3.3. Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{L} \frac{dl}{x - y}$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $M(0, -2)$ и $N(4, 0)$.

Решение. Составляем уравнение линии интегрирования:

$\frac{x-0}{4-0} = \frac{y+2}{0+2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2$, тогда $dl = \sqrt{1 + (y'x)^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dx$.

Согласно (3.4) имеем:

$$\int\limits_{L} \frac{dl}{x-y} = \int\limits_{0}^{4} \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}dx}{x - \frac{x}{2} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\frac{x}{2} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{4} \frac{2d\left(\frac{x}{2} + 2\right)}{\frac{x}{2} + 2} = \sqrt{5}\ln\left|\frac{x}{2} + 2\right|\Bigg|_{0}^{4} = \sqrt{5}(\ln 4 - \ln 2) =$$

$$= \sqrt{5}\ln\frac{4}{2} = \sqrt{5}\ln 2.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{L} ydl$, если L – участок параболы $y^2 = 4x$ от начала координат до точки $A(1, 2)$.

Решение. Применим формулу (3.6).

Тогда $dl = \sqrt{1 + (x'y)^2}dy = \sqrt{1 + \left(\left(\frac{y^2}{4}\right)'\right)^2}dy = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}dy = \sqrt{\frac{4 + y^2}{4}}dy$.

Тогда

$$\int_L y\,dl = \int_0^2 \frac{y}{2}\cdot\sqrt{y^2+4}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{y^2+4}\,d\left(y^2+4\right) = \left.\frac{\left(y^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{4\cdot\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{6}\left(8\sqrt{8}-8\right) = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L ye^{-x}dl$, если L – участок кривой $x=\ln\left(1+t^2\right)$, $y = 2\mathrm{arctg}t - t + 3$ между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$.

Решение. Перейдём в подынтегральном выражении к переменной t. Имеем:

$$ye^{-x} = \left(2\mathrm{arctg}t - t + 3\right)e^{-\ln\left(1+t^2\right)} = \frac{2\mathrm{arctg}t - t + 3}{1+t^2}.$$

Теперь выразим через t дифференциал dl:

$$dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt = \sqrt{\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,dt = \frac{\sqrt{4t^2 + \left(1-t^2\right)^2}}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}}{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+2t^2+t^4}}{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}}{1+t^2}\,dt = dt.$$

Таким образом

$$\int_L ye^{-x}dl = \int_0^1 \frac{2\mathrm{arctg}t - t + 3}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^1 \mathrm{arctg}t\,d(\mathrm{arctg}t) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} + 3\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \mathrm{arctg}^2 t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\Big|_0^1 + 3\mathrm{arctg}t\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}^2 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1) + 3\mathrm{arctg}1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4}.$$

4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \left(x^2+y^3\right)dl$, если L – контур треугольника *ABO* с вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$ (рис. 3.4).

Решение. Так как $\int_L \left(x^2+y^3\right)dl = \int_{AB} \left(x^2+y^3\right)dl + \int_{BO} \left(x^2+y^3\right)dl + \int_{OA} \left(x^2+y^3\right)dl$, то остаётся вычислить криволинейный интеграл по каждому из отрезков *AB*, *BO* и *OA*.

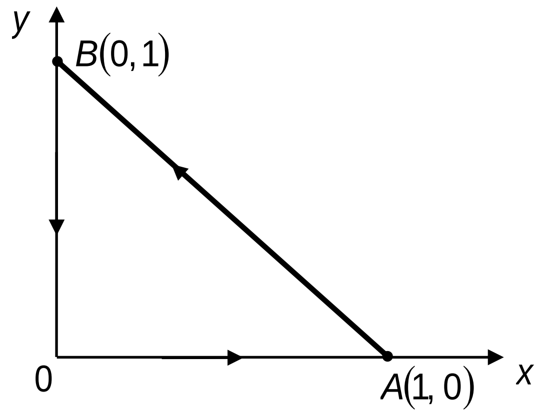


Рис. 3.4

1) Так как уравнение прямой *AB* имеет вид $y=1-x$, то $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\sqrt{2}dx$. Отсюда, учитывая, что x изменяется от 0 до 1, получим

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1\left[x^2+(1-x)^3\right]\cdot\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\left[\int\limits_0^1 x^2dx-\int\limits_0^1(1-x)^3d(1-x)\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

2) Рассмотрим отрезок *BO*. Рассуждая аналогично, находим: $x=0$, $0\le y\le 1$, $dl=dy$, откуда $\int\limits_{BO}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1 y^3dy=\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}$.

3) На отрезке *OA* $y=0$, $0\le x\le 1$, $dl=dx$.

Тогда $\int\limits_{OA}\left(x^2+y^3\right)dl=\int\limits_0^1 x^3dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$.

Окончательно $\int\limits_{L}\left(x^2+y^3\right)dl=\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7\sqrt{2}+7}{12}=\frac{7\left(\sqrt{2}+1\right)}{12}$.

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)dl$, если L – окружность $x^2+y^2=4x$.

Решение. Введём полярные координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.
Тогда, уравнение окружности примет вид $\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(r^2=4r\cos\varphi\right)\Leftrightarrow\left(r=4\cos\varphi\right)$.

Дифференциал дуги: $dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=\sqrt{16\cos^2\varphi+16\sin^2\varphi}\,d\varphi=4d\varphi$, при этом $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 3.5).

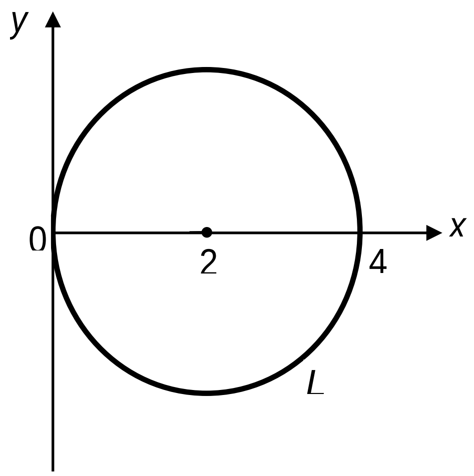


Рис. 3.5

Следовательно

$$\int_L (x^2+y^2)dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)4d\varphi=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^2d\varphi=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=32\left(\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=32\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+0\right)=32\pi.$$

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой: $J=\int_L\left(5z-2\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, где L – дуга кривой, заданной параметрически $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\pi$.

Решение. Находим

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=$$

$$=\sqrt{\cos^2t-2t\cos t\sin t+t^2\sin^2t+\sin^2t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2t+1}\,dt=$$

$$=\sqrt{\cos^2t+\sin^2t+t^2(\cos^2t+\sin^2t)+1}\,dt=\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Тогда, согласно (3.2)

$$J=\int_0^{\pi}\left(5t-2\sqrt{t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\right)\sqrt{2+t^2}\,dt=\int_0^{\pi}(5t-2t)\sqrt{2+t^2}\,dt=3\int_0^{\pi}t\sqrt{2+t^2}\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\left(2+t^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(2+t^2\right)=\frac{3}{2}\cdot\left.\frac{\left(2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{\pi}=\sqrt{\left(2+\pi^2\right)^3}-2\sqrt{2}.$$

7. Найти длину кривой $y^2=x^3$, если $0\le x\le 5$, $y\ge 0$.

Решение. Запишем функцию в виде $y=\pm\sqrt{x^3}$. Так как $y\ge 0$, то возьмём только положительный корень в уравнении кривой (рис. 3.6).

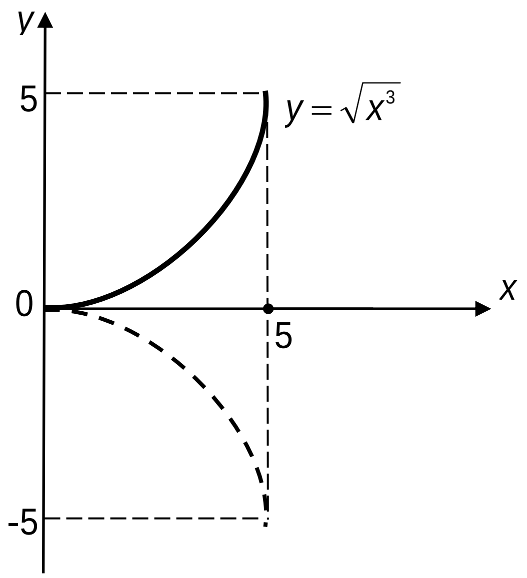


Рис. 3.6

Длина кривой равна

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\left(\left(x^3\right)'\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^5(4+9x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{18}\left.\frac{(9x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^5=\frac{1}{27}\left[\sqrt{(49)^3}-\sqrt{4^3}\right]=\frac{1}{27}\left[7^3-2^3\right]=\frac{335}{27}.$$

8. Найти массу участка кривой $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x_1=1$, $x_2=2$, если линейная плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Решение. Согласно формуле (3.10), имеем

$$m=\int_L \delta dl=\int_L x^2 dl=\int_1^2 x^2\sqrt{1+\left((\ln x)'\right)^2}dx=\int_1^2 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\int_1^2 x^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=$$

$$=\int_1^2 x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{1}{3}\left[\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}\right]=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

9. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, если её плотность $\delta=1$.

Решение. Сначала определим элемент длины дуги $dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$. Имеем $x_t'=-8\cos^2 t\cdot\sin t$, $y_t'=8\sin^2 t\cdot\cos t$.

$$dl=\sqrt{64\cos^4 t\sin^2 t+64\sin^4 t\cos^2 t}dt=\sqrt{64\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=4\sin 2t dt.$$

Далее, вычислим последовательно массу и статистические моменты

$$m=\int_L \delta dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2t=-\left.\frac{4\cos 2t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=4.$$

$$M_x=\int_L \delta x dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^3 t\cdot 4\sin 2t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t dt=-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t d\cos t=$$

$$=-\frac{16}{5}\cos^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{5}.$$

$$M_y=\int_L \delta y dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3 t\cdot 4\sin 2t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d\sin t=$$

$$=\frac{16}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{5}.$$

Согласно (3.12), получим: $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\frac{16}{5}}{4} = \dfrac{4}{5}$; $y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\frac{16}{5}}{4} = \dfrac{4}{5}$.

10. Вычислить площадь части боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченной снизу плоскостью OXY, а сверху – поверхностью $f(x, y) = 1 + x^2$.

Решение. Искомая площадь вычисляется по формуле $S = \int\limits_L (1 + x^2) dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 1$. Поверхность цилиндра и поверхность $f(x, y) = 1 + x^2$ симметричны относительно координатных плоскостей OXZ и OYZ, поэтому можно ограничиться вычислением интеграла при условиях $y \geq 0$, $x \geq 0$, то есть вычислить четверть искомой площади. Имеем $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}dx = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Следовательно

$$S = 4\int\limits_0^1 (1 + x^2)\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 t}{\cos t}\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 t)dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1 - \cos 2t}{2}\right)dt = (6t - \sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi.$$

11. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y - x)dx + xydy$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $M(-1, 0)$ и $N(3, 2)$.

Решение. Запишем уравнение прямой MN:

$\dfrac{x + 1}{3 + 1} = \dfrac{y - 0}{2 - 0} \Leftrightarrow \dfrac{x + 1}{4} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x + 1}{2}$; $dy = \dfrac{dx}{2}$. Тогда

$$\int_L (y-x)dx + xydy = \int_{-1}^{3}\left[\left(\frac{x+1}{2}-x\right)dx + x\frac{x+1}{2}\cdot\frac{1}{2}dx\right] = \int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}\right)dx =$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = -\frac{1}{8}(9-1)+\frac{1}{2}(3+1)+\frac{1}{12}(27+1)=\frac{10}{3}.$$

12. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L (2y-x)dx + xdy$ по кривой $y=x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$.

Решение. Имеем

$$\int_L (2y-x)dx + dy = \int_0^2\left[(2x^2-x)dx + x2xdx\right] = \int_0^2 (4x^2-x)dx = \left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\cdot 8-\frac{4}{2}=\frac{26}{3}.$$

13. Вычислить $\int_L (x+xy)dx + \frac{1}{2}(3+x^2)dy$ по ломанной MKN, если $M(2,1)$, $K(3,1)$, $N(3,3)$ (рис. 3.7).

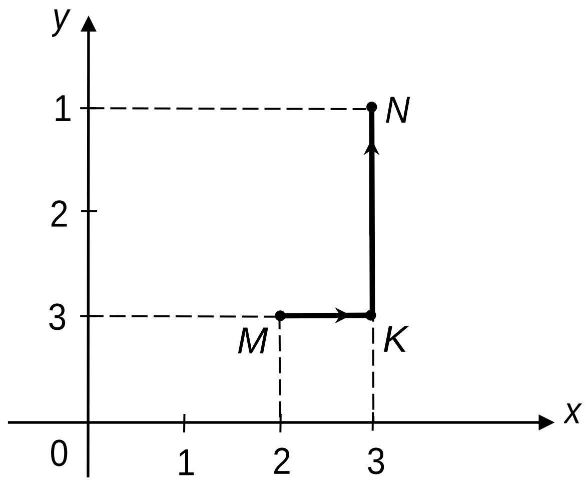


Рис. 3.7

Решение. Используем свойство аддитивности, вычисляя отдельно интеграл по отрезкам MK и KN. Тогда

а) MK: $y=1$; $dy=0$; $2\le x\le 3$, откуда

$$\int_{MK} (x+xy)dx + \frac{1}{2}(3+x^2)dy = \int_2^3 (x+x\cdot 1)dx = \int_2^3 2xdx = x^2\Big|_2^3 = 9-4=5.$$

б) KN: $x=3$; $dx=0$; $1\le y\le 3$, и

$$\int\limits_{KN}(x+xy)dx+\frac{1}{2}(3+x^2)dy=\int\limits_1^3\frac{1}{2}(3+9)dy=6\int\limits_1^3 dy=6y\Big|_1^3=6(3-1)=12.$$

Таким образом $\int\limits_{MKN}(x+xy)dx+\frac{1}{2}(3+x^2)dy=5+12=17$.

14. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$$

вдоль линии L, представляющей собой отрезок прямой от точки $A(1;1;1)$до точки $B(2;3;4)$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}.$$

На отрезке AB параметр $0\le t\le 1$. Поэтому, согласно формуле (3.18):

$$\int\limits_L xdx+ydx+(x+y-1)dz=\int\limits_0^1\left[(t+1)\cdot(t+1)'dt+(1+2t)\cdot(1+2t)'dt+(1+t+1+2t-1)\right.\cdot$$

$$\left.\cdot(1+3t)'dt\right]=\int\limits_0^1(t+1+2(2t+1)+3(1+3t))dt=\int\limits_0^1(14t+6)dt=(7t^2+6t)\Big|_0^1=7+6=13$$

15. Вычислить $\int\limits_L y^2dx+xydy$, если L – дуга эллипса, заданного параметрически в виде: $x=2\cdot\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл в определенный и вычислим его согласно формуле (3.15) $dx=-2\cdot\sin t dt$; $dy=\cos t dt$;

$$\int\limits_L y^2dx+xydy=\int\limits_0^{\pi/2}\left[-2\cdot\sin^2 t\cdot\sin t dt+2\cdot\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\,dt\right]=\int\limits_0^{\pi/2}(-2\cdot\sin^3 t+2\cdot\cos^2 t\times$$

$$\times\sin t)dt=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin t(\cos^2 t-\sin^2 t)dt=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cdot\cos 2t dt=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin 3t-\sin t)dt=$$

$$=\left(-\frac{\cos 3t}{3}+\cos t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}.$$

16. Вычислить $\oint\limits_L (4y-4)dx+(3x+3y+4)dy$ где L – контур треугольника, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$, $2x+3y=6$ (рис. 3.8). Результат проверить с помощью формулы Грина.

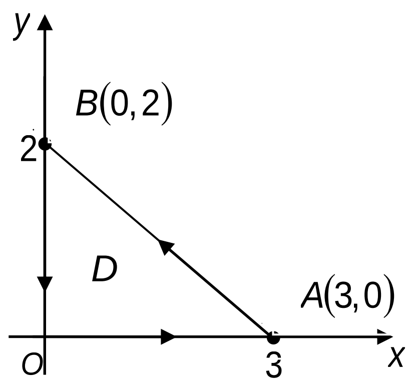


Рис. 3.8

Решение.

1) Здесь линия интегрирования (замкнутая) состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых с различными уравнениями. Криволинейный интеграл вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам OA, AB и BO. Рассмотрим отрезок $OA: y=0$, $dy=0$,

$$\int\limits_{OA}(4y+4)dx+(3x+3y+4)dy=\int\limits_0^3 4dx=$$

$$=4\cdot x\Big|_0^3=4\cdot 3=12.$$

Аналогично AB: $y=\dfrac{6-2x}{3}=2-\dfrac{2}{3}x$; $dy=-\dfrac{2}{3}dx$; $3\le x\le 0$;

$$\int\limits_{AB}(4y+4)dx+(3x+3y+4)dy=\int\limits_3^0\left[\left(4\left(2-\frac{2}{3}x\right)+4\right)dx+\left(3x+3\left(2-\frac{2}{3}x\right)+4\cdot dx\right]\right)=$$

$$=\int\limits_3^0\left(12-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}x-\frac{20}{3}\right)dx=\int\limits_3^0\left(\frac{16}{3}-\frac{10}{3}x\right)dx=\left(\frac{16}{3}\cdot x-\frac{10}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^0=\frac{16}{3}(0-3)-\frac{5}{3}(0-9)=$$
$$=-16+5\cdot 3=-1.$$

BA: $x=0$; $dx=0$; $2\le y\le 0$;

$$\int\limits_{BA}(4y+4)dx+(3x+3y+4)dy=\int\limits_2^0(3y+4)dy=\left(\frac{3y^2}{2}++4y\right)\Big|_0^2=\frac{3}{2}(0-4)+4(0-2)=-14.$$

Следовательно, $\oint\limits_L (4y+4)dx+(3x+3y+4)dy=12-1-14=3$.

2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=(4y+4)'\,y=4$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(3x+3y+4)'\,x=3$; Согласно формуле (3.24):

$$\oint_L (4y+4)dx+(3x+3y+4)dy=\iint_D (3-4)dxdy=-\int_0^3 dx\int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy=-\int_0^3\left(2-\frac{2}{3}x\right)dx=$$

$$=\left(-2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-2\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 9=-6+3=-3.$$

17. Найти работу, производимую силой $\overline{F}=(4x+y)\bar{i}+x\bar{j}$ при перемещении вдоль дуги параболы $y=3-2x^2$ между точками $A(1;1)$ и $B(2;-1)$.

Решение. Работа силы вычисляется по формуле $A=\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{s}$, где $\overline{F}=(4x+y,x)$; $d\bar{s}=(dx,dy)$. Тогда $A=\int\limits_L (4x+y)dx+xdy=\int\limits_1^2 \left(4x+3-2x^2+\right.$

$$\left.+x\cdot(-4x)\right)dx=\int_1^2\left(4x+3-6x^2\right)dx=\left(\frac{4x^2}{2}+3x-\frac{6x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2(4-1)+3(2-1)-$$
$$-2(8-1)=6+3-14=-5.$$

18. Вычислить криволинейный интеграл второго рода, предварительно убедившись, что он не зависит от пути интегрирования:

$$\int_{(1,1)}^{(3,4)} xydx+\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-y^2\right)dy.$$

Решение. Проверим условия Грина. Положим $P=xy$; $Q=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$.

Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=x$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$; $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования возьмем простейший, т.е. отрезок, соединяющий точки $A(1;1)$ и $B(3;4)$. Отрезок AB можно задать так: $y=\frac{3x-1}{2}$; $x\in[1;3]$. При этом $dy=\frac{3}{2}dx$ и криволинейный интеграл легко сводится к определенному интегралу:

$$\int_{(1,1)}^{(3,4)} xydx+\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)dy=\int_1^3\left[x\left(\frac{3x-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{3}{2}\right]dy=\int_1^3\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\right.$$

$$+\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{9x^2}{4}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)\Bigg)dx=\int_1^3\left(\frac{9}{16}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{3}{16}\right)dx=\left(\frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{5}{8}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{3}{16}\cdot x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{3}{16}(27-1)+\frac{5}{16}(9-1)-\frac{3}{16}(3-1)=\frac{3\cdot 13}{8}+\frac{5}{2}-\frac{3}{8}=\frac{56}{8}=7.$$

19. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x+y=4$; $y=\dfrac{x^2}{2}$ (рис. 3.9), (обход контура положительный).

Решение. Найдем точки пересечения кривых:

$$4-x=\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+x-4=0\Rightarrow x_1=-4;$$

$$x_2=2.$$

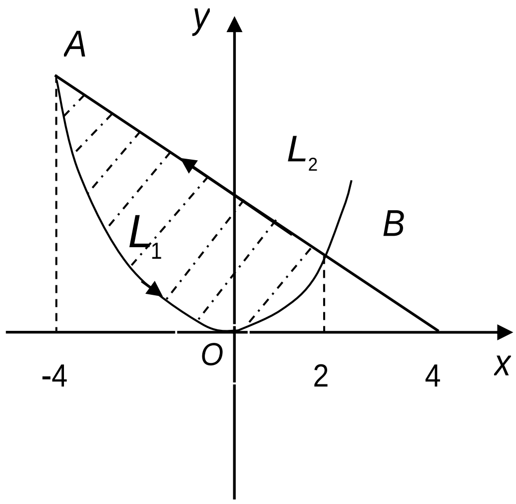


Рис. 3.9

Согласно формуле (3.25)

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\left[\int_{L_1}xdy-ydx+\int_{L_2}xdy-ydx\right].$$

1) Рассмотрим первый интеграл. L_1 – дуга AOB. Ее уравнение $y=\dfrac{x^2}{2}$; $dy=xdx$;

$-4\le x\le 2$. Тогда $\displaystyle\int_{AOB}xdy-ydx=\int_{-4}^{2}\left[x\cdot xdx-\frac{x^2}{2}dx\right]=\int_{-4}^{2}\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-4}^{2}=\frac{1}{6}(8+64)=$

$=\dfrac{72}{6}=12.$

2) L_2 – отрезок прямой BA, уравнение которого $y=4-x$; $dy=-dx$; $2\le x\le -4$. Поэтому

$$\int_{BA}xdy-ydx=\int_2^{-4}(x\cdot(-1)-(4-x))dx=\int_2^{-4}(-x-4+x)dx=-4\int_2^{-4}dx=-4x\big|_2^{-4}=$$

$$=-4(-4-2)=4\cdot 6=24.$$

Таким образом $S=\dfrac{1}{2}(12+24)=\dfrac{1}{2}\cdot 36=18.$

20. Проверить, что данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ и найти $u:(2x-3y^2+1)\ dx+(2-6xy)dy$.

Решение. Обозначим $P(x,y)=2x-3y^2+1$; $Q(x,y)=2-6xy$. Т.к. $P'_y=-6y=Q'_x$ и P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию по формуле (3.23), выбрав точку A в начале координат $(0,0)$.

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+c=\int_{0}^{x}(2x+1)dx+\int_{0}^{y}(2-6xy)dy+c=x^2+x+2y-3xy^2+c.$$

3.4 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int_L xydl$, где L – отрезок прямой $y=2x-1$ $(-1\le x\le 2)$.

2. $\int_L xdl$, где а) L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(2;4)$; $B(1;3)$.

б) L – дуга параболы $y=\dfrac{x^2}{2}$ $(0\le x\le 1)$.

3. $\int_L(\sqrt{x}+y)dl$, где L – дуга параболы $y^2=x$, от точки $O(0,0)$ до точки $B(2;\sqrt{2})$.

4. $\int_L ydl$, если L – дуга параболы $y^2=8x$, отсеченная параболой $x^2=y$.

5. $\oint_L(x+y)dl$, если L – контур треугольника с вершинами в точках $O(0;0)$; $A(2;0)$; $B(1;2)$.

6. $\int_L(x+3y)dl$, L – ломаная OAB, где $O(0;0)$, B – точка пересечения прямой $y=4-2x$ с осью OY, A – точка пересечения прямых $y=\dfrac{x}{2}$; $y=4-2x$.

7. $\int_L \sin^2 x\cdot\cos^4 xdl$, если L – дуга линии $y=\ln\dfrac{1}{\cos x}$ $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right)$.

8. $\int_L x^2y^2dl$, если L – окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ $\quad(0\le t\le 2\pi)$.

9. $\int_L y^3dl$, где L – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $\quad\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. $\int_L (x^2+y^2)dl$, где L – кривая $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

11. $\oint_L (x-y)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.

12. $\int_L \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dl$, если L – дуга кардиоиды $r=2(1+\cos\varphi)$ $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода по пространственной кривой:

13. $\int_L (3x+4y+2z-2)dl$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(4;-3;6)$; $B(2;-5;5)$.

14. $\int_L x^2dl$, если L – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0;0)$; $A(2;3;4)$.

15. $\int_L xyzdl$, если L – дуга линии $x=\cos t$; $y=\sin t$; $z=2t$ $\quad\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

16. $\int_L \sqrt{1+4z+9xy}dl$, где L – дуга линии $x=t^3$; $y=t$; $z=t^2$ $\quad(0\le t\le 1)$.

С помощью криволинейного интеграла 1-го рода вычислить длины заданных дуг:

17. $L: y=\sqrt{1-x^2}+1$ между точками $A(0;2)$ и $B(1;1)$.

18. $L: 2y=x^2-2$ между точками пересечения с осью OX.

19. L – дуга кривой $x=t$, $y=\ln(1-t^2)$ $\quad\left(0\le t\le \dfrac{1}{2}\right)$.

20. L – дуга кривой $x=e^t\cdot\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t_1=0$ до $t_2=\ln\pi$.

21. $L: x=\dfrac{2}{3}t^3, y=t^2, z=t$ $\quad(0\le t\le 3)$.

22. $L: x = 6\cos t$, $y = 6\sin t$, $z = 8t$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$.

23. Найти массу дуги параболы $y = x^2$ между точками $O(0;\,0)$ и $B(2;\,4)$, если линейная плотность её в каждой точке равна $\delta(x, y) = 2x$.

24. Найти массу дуги AB кривой $y = \ln(x+2)$, если в каждой её точке линейная плотность равна $\delta(x, y) = 2 + x$, $x_A = 0$, $x_B = 3$.

25. Найти массу дуги однородной кривой $y = \operatorname{ch} x$ $\quad (0 \le x \le \ln 2)$.

26. Найти массу дуги кривой $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, если $\delta(x, y) = y^2$.

27. Найти массу дуги лемнискаты $r^2 = 4\cos 2\varphi$, если

$$\delta(r) = k \cdot r \quad \left(\frac{-\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right).$$

28. Найти массу дуги пространственной кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = \dfrac{2}{3}t^3$, если

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{y} \quad (0 \le t \le 1).$$

29. Найти центр тяжести дуги NP астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$, если в каждой её точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки; $N(0;\,4), P(4;\,0)$.

30. Найти центр тяжести однородной дуги AB винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 3t$ $\quad (t_A = 0;\ t_B = 2\pi)$.

31. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начало координат четверти окружности $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Плотность распределения масс дуги постоянна и равна k.

Вычислить площади цилиндрических поверхностей, ограниченных снизу плоскостью OXY, а сверху поверхностью $z = f(x, y)$, при условии, что известна направляющая L этой цилиндрической поверхности:

32. $f(x, y) = \sqrt{2x - 4x^2}$, $L: y^2 = 2x$.

33. $f(x, y) = 2 - \sqrt{x}$, $L: y^2 = \dfrac{4}{9}(x-1)^3$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

34. $\int\limits_L (8x+4y+2)dx+(8y+2)dy$, если

а) L – отрезок, соединяющий точки $O(0;\,0)$, $A(3;\,6)$.

б) L – ломаная CAB, где $C(0;\,6)$, $B(3;\,0)$.

35. $\int\limits_L (\cos x-y)dx+(x+tgy)dy$, если L – отрезок прямой от $O(0;\,0)$ до $A\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

36. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, если L – линия $y=|x|$ от $A(-1;1)$ до $B(2;\,2)$.

37. $\int\limits_L (y+3)dx+(8x+7y+6)dy$, если L – парабола, соединяющая точки $O(0;\,0)$ и $A(9;\,4)$ с осью симметрии OY.

38. $\int\limits_L \cos y dx-\sin y dy$, если L – отрезок прямой $y=-x$ $(-2\le x\le 2)$.

39. $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$, если L – дуга кривой $y=2\sqrt{x}$ $(0\le x\le 1)$.

40. $\int\limits_L \cos^3 xdx+ydy$, где L – дуга линии $y=\sin x$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$.

41. $\int\limits_L xdx+\frac{1}{y^2}dy$, где L – дуга линии $xy=1$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;1/2)$.

42. $\int\limits_{L^+} xdy+ydx$, где L – контур $\left\{(x,y)\in R^2 \middle| x=2\cos t;\ y=2\sin t;\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

43. $\int\limits_{L^+} y^2dx+x^2dy$, где L – дуга эллипса $x=3\cos t$; $y=\sin t$; $t\in[0;\,\pi]$.

44. $\int\limits_L (y^2-4x^2)dx+(x+y)dy$, где L – дуга окружности $x^2+y^2=3$ между точками $A(0;\,\sqrt{3})$ и $B(0;\,-\sqrt{3})$.

45. $\int\limits_L y^2dx-x^2dy$, если L – дуга параболы $x=1-y^2$ от точки $M(1;0)$ до $N(-1;\,\sqrt{2})$.

46. $\int\limits_L \frac{3x}{y}dx - \frac{2y^3}{x}dy$, где L – дуга параболы $x = y^2$, соединяющая точки $A(4;\,2)$; $B(1;1)$.

47. $\int\limits_{L^+} (2-y)dx + (y-1)dy$, где L – контур $\{(x,y) \in R^2 \mid x = t - \sin t;\ y = 1 - \cos t;\ t \in [0;\,2\pi]\}$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой:

48. $\int\limits_L 4dx + (4z+3)dy + (3x+4)dz$;

а) L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(2;\,0;\,0)$ и $C(2;\,2;\,2)$.

б) L – ломаная OBC, где $O(0;\,0;\,0)$; $B(2;\,2;0)$.

49. $\int\limits_L yzdx + z^2dy + (x-y)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;\,0;\,2)$ и $B(2;\,-1;\,0)$.

50. $\int\limits_L (y^2+z^2)dx + yzdy + xdz$, где L – дуга линии $x = 3t$; $y = \cos t$; $z = \sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

51. $\int\limits_L -\frac{yz}{x}dx + xdy + ydz$, где L – кривая $x = t$; $y = t\cos t$; $z = t\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

52. $\int\limits_L (5y^2+4xz)dx + (10xy-3z^2)dy + (2x^2-6yz)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $M_1(1;\,0;\,2)$; $M_2(2;1;1)$.

53. $\int\limits_L x^2dx + ydy + z^2dz$, L - дуга линии $x = t$; $y = t^2$; $z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

54. Вычислить $\oint\limits_{L^+} 2xydx - x^2dy$, если L – контур треугольника ABC, где $A(2;1)$; $B(2;\,0)$; $C(0;1)$. Результат проверить с помощью формулы Грина.

Используя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по замкнутым кривым.

55. $\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx$, L – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

56. $\oint\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$, L – контур, образованный полуокружностью $y = \sqrt{9 - x^2}$ и осью OX.

57. $\oint\limits_L (y - x)dx + (3x + y)dy$, L – эллипс $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

58. $\oint\limits_L xy^3dx + \left(x^3 + y\right)dy$, где L – граница области $D:\left\{(x, y) \in R^2 \middle| x = y^2;\ y = 1;\ x = 0\right\}$.

59. $\oint\limits_L (x + y)^2 dx - \left(x^2 + y^2\right)dy$, L – пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC: $A(1; 1)$; $B(3; 2)$; $C(2; 5)$.

60. $\oint\limits_L e^x\left[(1 - \cos x)dx - ydy\right]$, L – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $\left\{(x, y) \in R^2 \middle|\ 0 < x < \pi;\ 0 < y < \sin x\right\}$.

Убедившись в независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, вычислить:

61. $\int\limits_{(1,2)}^{(4,3)} 3yx^2dx - \left(y - x^3\right)dy$.

62. $\int\limits_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)} (y - tgx)dx - (\sin y - x)dy$.

63. $\int\limits_{(1,1)}^{(4,3)} \left(y + x^2\right)dx - \left(y^2 - x\right)dy$.

64. $\int\limits_{(1,-2)}^{(4,1)} \left(y^2 + x\right)dx + (2yx + 1)dy$.

65. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,0)} \left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy$.

Проверить, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ и если да, то найти эту функцию:

66. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)dy$.

67. $4\left(x^2-y^2\right)\cdot(xdx-ydy)$.

68. $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$.

69. $\left(\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right)dx+\left(\frac{y}{(y-x)^2}-y^2\right)dy$.

70. $\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$.

71. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2-6x+4$; $y=4$ при положительном направлении обхода контура.

72. Найти площадь фигуры, ограниченной областью $D:\left\{(x,y)\middle|\frac{3}{4}\le y\le 3;\ 1\le x\le 2\right\}$ (обход контура – положительный).

73. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(4;1)$; $B(4;5)$; $C(1;6)$; $D(1;1)$ (обход контура – положительный).

74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=x+5$; $y^2=-x+4$ и осью OX при положительном направлении обхода контура.

75. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) кардиоидой $r=3(1-\cos\varphi)$;

б) петлей декартова листа $x=\frac{3t}{1+t^2}$; $y=\frac{3t^2}{1+t^2}$ $\quad 0\le t\le+\infty$.

76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной областью $D=\{(x,y)|\,y=x$; $y=2x$; $x+y=2\}$ (обход контура – положительный).

77. Найти площадь фигуры, ограниченной областью $D=\{(x,y)|\,y=0.5x$; $y=2x$; $x+y=1$; $x+y=2\}$ при положительном направлении обхода контура.

78. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y \le x$; $y = 0$; $y = \sqrt{4 - x^2}$ (обход контура – положительный).

79. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (x^2 - 2y)\bar{i} + (y^2 - 2x)\bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $M(-4;\, 0)$; $N(0;\, 2)$.

80. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (2y + 5)\bar{i} + 3x\bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ из точки $C(2;\, 0)$ в точку $B(-2;\, 0)$.

81. Вычислить работу силы $\vec{F} = (3x + 2y)\bar{i} + (x - y)\bar{j}$ вдоль траектории L – четверти окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ между точками $O(0;\, 0)$ и $B(2;\, 2)$.

82. Найти работу силы $\vec{F} = y\bar{i} + x\bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги астроиды $x = 8\cos^3 t$; $y = 8\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$.

83. Найти работу $\vec{F} = -4y\bar{i} + (4y - 3x)\bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямоугольника с вершинами $A(2;\, -6)$; $B(2;\, 6)$; $C(-2;\, 6)$; $D(-2;\, -6)$.

84. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (x^3 + y)\bar{i} + (x + y^3)\bar{j}$ при перемещении вдоль ломаной ABC, где $A(1;\, 2)$; $B(3;\, 2)$; $C(3;\, 5)$.

85. Найти работу при перемещении единицы массы m вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 9$ между точками $M(3;\, 0)$ и $N(-3;\, 0)$, если в каждой точке сила, действующая на единицу массы, равна $\vec{F} = (2x - y)\bar{i} + (x^2 + x)\bar{j}$.

86. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = y\bar{i} - (x^2 + y)\bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги кривой $y = 2x - x^2$ от точки $A(2;\, 0)$ до точки $O(0;\, 0)$.

87. Вычислить работу силы $\vec{F} = (7x + y)\bar{i} + y\bar{j}$ при перемещении вдоль дуги параболы $x = y^2$ между точками $A(2; 1)$ и $B(4; \sqrt{2})$.

88. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ при перемещении вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $M_1(1; -1; 2)$ и $M_2(6; 4; 4)$.

89. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (y - z)\bar{i} + xz\bar{j} + x^2\bar{k}$ вдоль отрезка прямой, ограниченного точками $A(0; 2; -1)$; $B(2; 1; 0)$.

90. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (y^2 + z^2)\bar{i} - yz\bar{j} + x\bar{k}$ при перемещении вдоль дуги линии L: $x = 3t$; $y = \cos t$; $z = \sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответы

1) $\frac{9\sqrt{5}}{2}$. 2) а) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. 3) $\frac{13}{3}$. 4) $\frac{8\sqrt{2}}{3}(4-\sqrt{2})$. 5) $2+4\sqrt{5}$. 6) $\frac{72\sqrt{5}}{5}$.

7) $\frac{17}{480}$. 8) 8π. 9) $\frac{3}{11}$. 10) $2\pi^2 + 4\pi^4$. 11) 2π. 12) $10\sqrt{2} - 16$. 13) 6.

14) $\frac{4}{3}\sqrt{29}$. 15) $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$. 16) $\frac{62}{15}$. 17) $\frac{\pi}{2}$. 18) $\sqrt{6} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. 19) $-\frac{1}{2} + \ln 3$.

20) $\sqrt{2}(\pi - 1)$. 21) 21. 22) 20π. 23) $\frac{17\sqrt{17}-1}{6}$. 24) 10.95. 25) $\mathrm{sh}2$. 26) 27π.

27) $2\pi k$. 28) 1. 29) $\left(\frac{5}{2}; \frac{15\pi}{64}\right)$. 30) $(0; 0; 3\pi)$. 31) $J_x = J_y = \frac{27\pi}{4}$; $J_0 = \frac{27\pi}{2}$.

32) $\frac{\pi}{4}$. 33) $\frac{11}{3}$. 34) а) 234. б) -42. 35) $\frac{1}{2} + \ln 2$. 36) $\frac{18}{3}$. 37) 311. 38) $2\sin 2$.

39) $-\frac{8}{15}$. 40) $\frac{7}{6}$. 41) $\frac{1}{2}$. 42) 0. 43) -4. 44) $\frac{3\pi}{2}$. 45) $\frac{\sqrt{2}-10}{3}$. 46) -17.

47) π. 48) а) 34; б) 34. 49) $-\frac{17}{3}$. 50) $3\pi - \frac{10}{3}$. 51) $\frac{4}{3}\pi^3 + \frac{\pi}{2} + 4\pi^2$. 52) 11.

53) $\frac{7}{6}$. 54) $-\frac{8}{3}$. 55) $\frac{\pi}{2}$. 56) 36. 57) 4π. 58) $-\frac{1}{14}$. 59) $-\frac{140}{3}$. 60) $-\frac{e^{\pi}-1}{5}$.

61) $187{,}5$. 62) $\frac{\pi^2}{8}-1-\frac{1}{2}\ln 2$. 63) $\frac{70}{3}$. 64) $100{,}5$. 65) 1. 66) не является.

67) $\left(x^2-y^2\right)^2$. 68) $y^2\cos x + x^2\cos y$. 69) $\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}$.

70) $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}$. 71) 36. 72) $3-3\ln 2$. 73) $\frac{27}{2}$. 74) $9\sqrt{2}$.

75) а) $\frac{27}{2}\pi$; б) $\frac{9\pi}{8}$. 76) $\frac{1}{3}$. 77) $\frac{1}{2}$. 78) $\frac{1}{2}\pi$. 79) 24. 80) $4\pi-20$. 81) $8-3\pi$.

82) 8. 83) 48. 84) $\frac{741}{4}$. 85) 9π. 86) -4. 87) $\frac{247+16\sqrt{2}}{6}$. 88) 19. 89) $\frac{17}{3}$.

90) $3\pi-\frac{8}{3}$.

4. ПОВЕРХНОСТЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть $f(x, y, z)$ – непрерывная функция, заданная в точках гладкой поверхности $\sigma \in R^3$; $\Delta\sigma_i$ – площади элементарных площадок, на которые можно разбить поверхности σ; $P_i(x_i, y_i, z_i)$ – произвольные точки, принадлежащие $\Delta\sigma_i$. Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta\sigma_i$, не зависящий от способа разбиения σ на $\Delta\sigma_i$ и от выбора точек P_i и обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \lim\limits_{\substack{diam\Delta\sigma_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$.

Очевидно, что интеграл $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ равен площади поверхности, а $\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma$ – масса поверхности, если $f(x, y, z)$ – поверхностная плотность поверхности.

Вычисление таких интегралов сводится в вычислению двойного интеграла.

Если $z = z(x, y)$ – уравнение поверхности σ, D_{xy} – проекция σ на координатную плоскость xOy, то интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy .$$

Если $x = x(y, z)$ – уравнение поверхности σ, то формула для вычисления принимает вид:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz .$$

В случае $y = y(x, z)$, имеем:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz .$$

Примеры

1. Вычислить $J=\iint\limits_{\sigma} z d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Решение. Подставим z из уравнения поверхности и найдем $d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$:

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$J=\iint\limits_{\sigma} z d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}} Rdxdy=R\cdot\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=R\cdot\pi R^2=\pi R^3,$$

где D_{xy} – круг радиуса R.

2. Вычислить интеграл $J=\iint\limits_{\sigma}(6x+4y+3z)d\sigma$, где σ: часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенной в I октанте (рис. 4.1).

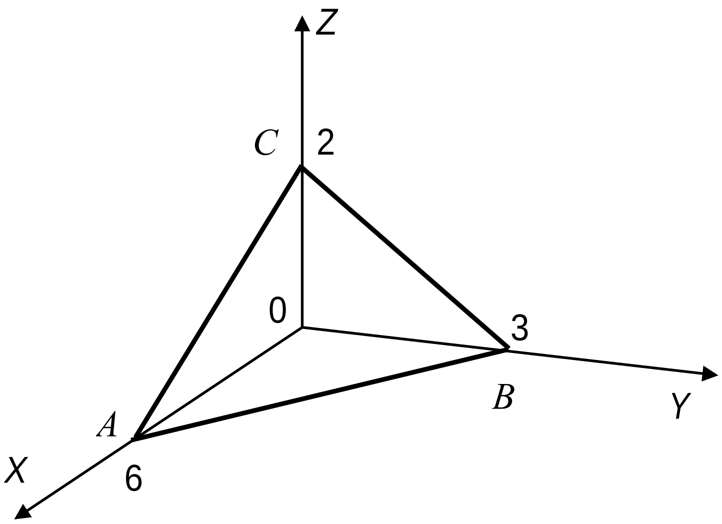


Рис. 4.1

Решение. Поверхность интегрирования – треугольник ABC. Зная уравнение плоскости найдем:

$$z=\frac{1}{3}(6-x-2y);\quad d\sigma=\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy;$$

$$J=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}(5x+2y+6)dxdy.$$

Полученный двойной интеграл вычисляем двукратным интегрированием:

$$J=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}(5x+2y+6)dx=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\right)\Big|_0^{6-2y}\int=$$

$$=2\sqrt{14}\int_0^3(y^2-10y+21)dy=2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y\right)\Big|_0^3=54\sqrt{14}.$$

3. Вычислить интеграл $J=\iint_\sigma\left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)d\sigma$, где σ: поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключенная между двумя плоскостями $z=0$ и $z=h$.

Решение. Цилиндрическую поверхность проектируем на плоскость XOZ; получаем прямоугольник *ADCB* (рис. 4.2). Поверхность слева от проекции имеет уравнение $y=-\sqrt{a^2-x^2}\,(\sigma_1)$, а справа – $y=\sqrt{a^2-x^2}\,(\sigma_2)$, поэтому данный интеграл вычисляем в виде суммы двух интегралов по σ_1 и σ_2.

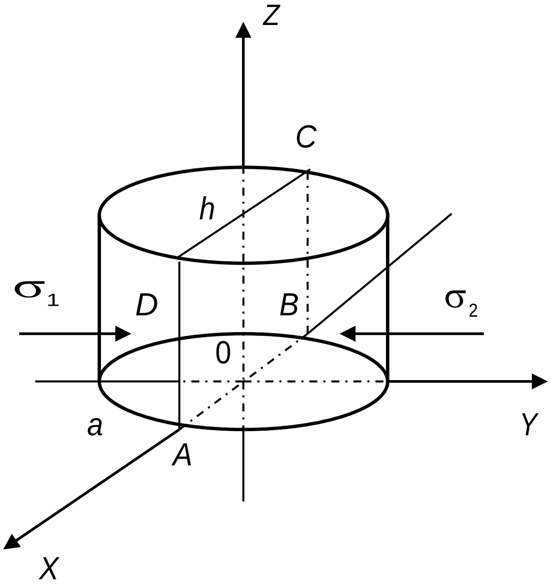


Рис. 4.2

Преобразуем поверхностные интегралы в двойные интегралы с переменными x и z, получим:

$$d\sigma=\sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}\,dxdz=\frac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$J_1=a\iint_{\sigma_1}\frac{zdxdz}{\sqrt{a^2-x^2}};\qquad \text{тогда}$$

$$J_2=a\iint_{\sigma_2}\left(2+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dxdz;$$

$$J=J_1+J_2=2a\iint_{D_{xz}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dxdz.$$

Т.к. прямоугольник *ADCB* является общей проекцией поверхностей σ_1 и σ_2 на плоскость XOZ, переходим к вычислению двойного интеграла:

$$J = 2a\int_0^h dz\int_{-a}^{a}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = 2a\int_0^h\left(\left(x + z\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a}\right)dz = 2a\int_0^h (2a+\pi z)dz =$$

$$= 2a\left(2az + \frac{\pi z^2}{2}\right)\Big|_0^h = ah(4a+\pi h).$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где σ – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0; z=3$.

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$, где σ – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2\,d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

4. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$, где σ – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$.

5. Вычислить $\iint\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где σ – верхняя часть полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Ответы

1) $\frac{160\pi}{3}$. 2) $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 3) $\frac{128\pi}{15}$. 4) 0. 5) $\frac{\pi^2R^3}{2}$.

4.3. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть вдоль гладкой, двусторонней, ориентированной поверхности $\sigma(z = z(x, y))$ задана векторная функция $\bar{a} = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$, где P, Q, R – непрерывные функции. Разобьём σ на $\Delta\sigma_i$ – элементарные площадки, выберем точку P_i, принадлежащую $\Delta\sigma_i$ и введём нормальный единичный вектор $\overline{n_i}$ в точке P_i. Обозначим через $\overline{\Delta\sigma_i}$ вектор, направленный вдоль нормального вектора $\overline{n_i}$ с площадью $\Delta\sigma_i$ в качестве модуля. Тогда, если существует предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{a}(P_i), \Delta\bar{\sigma}_i\right)$, не зависящий от способа разбиения σ на $\Delta\sigma_i$ и от выбора точек P_i, то он называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается:

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\bar{a}, \overline{d\sigma}\right) = \lim_{\substack{diam\Delta\sigma\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{a}(P_i), \Delta\bar{\sigma}_i\right) = \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy,$$

где $dxdy = \cos\gamma d\sigma$; $dxdz = \cos\beta d\sigma$; $dydz = \cos\alpha d\sigma$; $d\sigma$ – элемент площади $\Delta\sigma_i$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к выбранной стороне поверхности σ.

Поверхностный интеграл второго рода называют потоком векторного поля $\bar{a}$ через поверхность σ. Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны равенством: $\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$.

Формула для вычисления имеет вид:

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\bar{a}, \overline{d\sigma}\right) = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy,$$

где D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – проекции σ на координатные плоскости yOz, xOz, xOy, а $x(y, z)$, $y(x, z)$, $z(x, y)$ – выражения, полученные из уравнения поверхности σ разрешением относительно соответствующих координат; знаки интегралов определяются знаками $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$: если острый угол, то знак «плюс», если тупой угол, то знак «минус».

Примеры

1. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dxdy$, где σ – нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

Решение. Поверхность совпадает со своей проекцией D_{xy} на плоскость xOy. Так как нормаль направлена вниз, угол между осью Oz и нормалью более 90^0, интеграл надо брать со знаком «минус».

$$I = \iint\limits_{\sigma} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dxdy = -\iint\limits_{D} \sqrt{r}\,r\,d\varphi dr = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} r^{\frac{3}{2}}dr =$$

$$= \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a d\varphi = -\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}.$$

Здесь выполнен переход от прямоугольных координат к полярным.

2. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, где σ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенная в первом октанте (рис. 4.3).

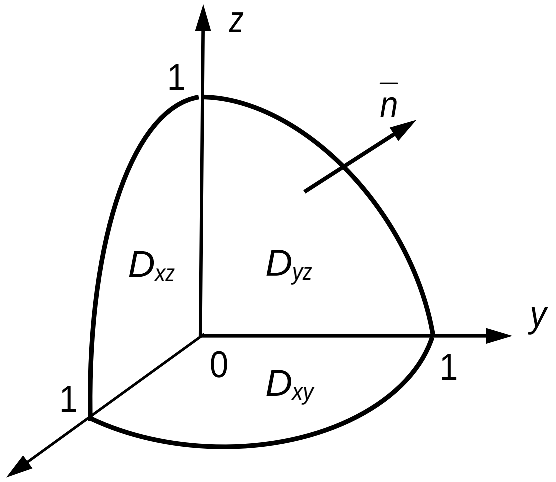


Рис. 4.3

Решение. Интеграл можно рассматривать как сумму трёх интегралов:

$$I_1 = \iint_\sigma xdydz\,; \quad I_2 = \iint_\sigma dxdz\,; \quad I = \iint_\sigma xz^2dxdy\,.$$

Так как вектор нормали составляет острые углы со всеми координатными осями, то все интегралы надо брать со знаком «плюс». Пусть D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – проекции поверхности σ на координатные плоскости. Выразим из уравнения поверхности σ: $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ (для I_1); $z^2 = 1-x^2-y^2$ (для I_3) и перейдём к двойным интегралам:

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}dydz\,;\ I_2 = \iint_{D_{xz}} dxdz\,;\ I_3 = \iint_{D_{xy}} x(1-x^2-y^2)dxdy\,.$$

Второй интеграл равен площади четверти круга $I_2 = \frac{\pi}{4}$; I_1 и I_3 вычислим переходя к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rd\varphi dr$; в обоих случаях $0 \le r \le 1$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-r^2}rd\rho d\varphi = \left| \begin{array}{l} 1-r^2 = t,\ -2rdr = dt,\ rdr = -\frac{dt}{2}; \\ -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{2\cdot 3} = -\frac{\sqrt{\left(1-r^2\right)^3}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(1-r^2)^3}\Big|_0^1 \right) d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r\cos\varphi(1-r^2)rdr = \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_\sigma x^2y^2zdxdy$, где σ – внутренняя сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ (рис. 4.4).

Решение. Так как интеграл содержит лишь слагаемое с дифференциалами dx, dy, спроектируем поверхность σ на xOy. Проекцией является круг радиуса R. Нормаль составляет острый угол с осью Oz, значит интеграл имеет знак «плюс». Выразим z из уравнения поверхности $z=-\sqrt{R^2-y^2-x^2}$ и подставим в I:

$$I=\iint_{D_{xy}} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-y^2-x^2}\right)dxdy.$$

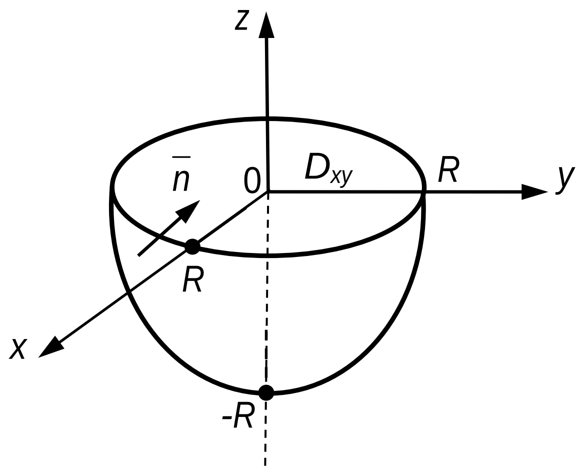


Рис. 4.4

Перейдём к полярным координатам в полученном двойном интеграле и вычислим его: $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $dxdy=rd\varphi dr$; $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le r\le R$.

$$I=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2-r^2}\,dr=-\int_0^{2\pi}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2d\varphi\int_0^R r^5\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}dr=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Подстановка}\\ R^2-r^2=t^2,\\ r=\sqrt{R^2-t^2};\\ dr=-\left(R^2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}tdt,\\ R\le t\le 0,\ \textit{т.к.}\ 0\le r\le R\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\int_R^0\left(R^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot t\left(R^2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}tdt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi\int_R^0\left(R^2-t^2\right)^2t^2dt=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi\int_R^0\left(R^4t^2-2R^2t^4+t^6\right)^2dt=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\left(R^4\frac{t^3}{3}-2R^2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_R^0=\frac{2\pi}{8}\left(-\frac{R^7}{3}+\frac{2R^7}{5}-\frac{R^7}{7}\right)=-\frac{2\pi R^7}{105}.$$

4.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где σ – верхняя часть плоскости $x + 2y + z - 6 = 0$, расположенная в первом октанте.

2. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (x + y)dydz + (y - x)dxdz + (z - 2)dxdy$, где σ – нижняя часть конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсекаемая плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

3. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (y + 2z)dxdy$, где σ – верхняя часть плоскости $6x + 3y + 2z = 6$, расположенная в первом октанте.

4. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)dydz$, где σ – внешняя часть параболоида $x = a^2 - y^2 - z^2$ отсечённого плоскостью yOz.

5. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + z^2dxdy$, где σ – внешняя часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенная в первом октанте.

Ответы

1) 54. 2) $\frac{8\pi}{3}$. 3) $\frac{8}{3}$. 4) $\frac{\pi a^4}{2}$. 5) $\frac{\pi R^4}{4}$.

Оглавление

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ 3
1.1. Определение двойного интеграла 3
1.2. Основные свойства двойного интеграла 3
1.3. Основные случаи вычисления двойного интеграла 4
в прямоугольных координатах 4
1.4. Замена переменных в двойном интеграле 7
1.5. Задачи для самостоятельного решения 15
1.6. Применение двойного интеграла 20
1.7. Задачи для самостоятельного решения 31
2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ 36
2.1. Тройной интеграл в прямоугольных координатах и его приложения 36
2.2. Задачи для самостоятельного решения 45
2.3. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических 47
координатах и его приложения 47
2.4. Задачи для самостоятельного решения 55
3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 59
3.1. Криволинейные интегралы первого рода 59
3.2. Криволинейные интегралы второго рода 63
3.3. Примеры решения задач 68
3.4 Задачи для самостоятельного решения 80
4. ПОВЕРХНОСТЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 90
4.1. Поверхностные интегралы первого рода 90
4.2. Задачи для самостоятельного решения 93
4.3. Поверхностные интегралы второго рода 94
4.4. Задачи для самостоятельного решения 98

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов
механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 6

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ

ГЛИНСКАЯ Евгения Алексеевна
КОНДРАТЬЕВА Наталья Анатольевна
ПРИХАЧ Наталия Константиновна и др.

Технический редактор *О.В. Песенько*

Подписано в печать 29.03.2013. Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 11,62. Уч.-изд. л. 4,54. Тираж 100. Заказ 1318.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.