Белорусский национальный технический университет

Приборостроительный факультет

Кафедра «Инженерная математика»

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
М.А. Князев ____________	А.И. Свистун_______________
____________2021 г.	_________2021 г.

МАТЕМАТИКА

Электронный учебно-методический комплекс

для студентов специальностей
1-46 01 01 «Металлургическое производство и металлообработка (по направлениям)»
1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением»
1-36 01 06 «Оборудование и технологии сварочного производства»
заочного отделения МТФ

Составители: И.В. Прусова, Н.К. Прихач

Рассмотрено и утверждено на заседании
совета приборостроительного факультета _______2021 г.,
протокол №

Минск БНТУ 2021

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математика» состоит из разделов:

I-II. Теоретическо-практический:

- учебный материал представлен параграфами, каждый из которых имеет структуру: теоретические сведения, практическая часть (примеры решения типовых задач), задания для самостоятельной работы и ответы к ним;

III. Контроль знаний:

- проверочные тесты по темам «Векторная алгебра и матричное исчисление», «Аналитическая геометрия» и «Основы математического анализа» с таблицами верных ответов;
- контрольные работы по темам Векторная алгебра и матричное исчисление», «Аналитическая геометрия» и «Основы математического анализа» с решениями типовых вариантов;
- перечень вопросов, выносимых на экзамен (для самоконтроля знаний);

IV. Вспомогательный раздел:

- список использованной литературы;
- учебная программа для учреждения высшего образования.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели создания ЭУМК

Целью ЭУМК «Математика» является формирование у студентов комплекса знаний по изучаемой учебной дисциплине «Математика», соответствующих академическим, социально-личностным и профессиональным компетенциям специалиста в рамках образовательного стандарта для технических специальностей приборостроительного факультета.

Особенности структурирования и подачи учебного материала являются изучение следующих теоретических материалов:

- базовые сведения из разделов «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Основы математического анализа», которые дополнены наглядными таблицами. Практическая часть состоит из примеров с решениями, задач для самостоятельного решения с ответами. Раздел контроля знаний содержит проверочные тесты, контрольные работы, вопросы к экзамену. Вспомогательный раздел содержит учебную программу по дисциплине «Математика» – разделы «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Основы математического анализа».

Рекомендации по организации работы с ЭУМК: Материалы данного ЭУМК могут быть использованы студентами технических специальностей при выполнении практических, расчетно-графических работ и контрольных работ, при подготовке к промежуточному контролю знаний.

СОДЕРЖАНИЕ

I ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1 КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

РАЗДЕЛ I Линейная алгебра и аналитическая геометрия

ТЕМА 1.1 Векторная алгебра и матричное исчисление

1.1.1 Матрицы и определители.

Матрицы и операции над матрицами

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размерности m на n $(m \times n)$. Обозначается большими латинскими буквами $A, B, C\ldots; A = \|a_{ij}\|,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Матрица, состоящая из нулей, называется *нулевой*. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой все элементы диагонали равны единице, называется *единичной* и обозначается E.

Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A, если строки матрицы A^T являются столбцами матрицы A.

Треугольной матрицей называется матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону главной диагонали равны нулю.

Матрицы A, B называются *равными*, если равны их размерности и соответствующие элементы этих матриц.

Действия над матрицами.

1) *Сложение матриц*. Операция сложения матриц определяется для матриц одинаковой размерности. *Суммой матриц* A и B называется мат-

рица $C = A + B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

2) *Умножение матрицы на число. Произведением матрицы А на число α* называется матрица $C = \alpha \cdot A$, элементы которой удовлетворяют условию $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, где $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$.

3) *Произведение матриц.* Матрицы A и B называются *согласованными,* если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Операция произведения матриц определяется только для согласованных матриц. Каждый элемент c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$ равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы на соответствующие элементы j -го столбца матрицы.

Матрицы A и B называются *перестановочными (коммутирующими),* если $A \cdot B = B \cdot A$.

В общем случае произведение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Основные свойства действий над матрицами:

1) $A + B = B + A$. 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$. 3) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
4) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$. 5) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
6) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей.

Рассмотрим квадратную таблицу, то есть таблицу, у которой число строк равно числу столбцов, состоящую из четырех чисел или матрицу размерности 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

где $a_{ij}\ (i = 1,2;\ j = 1,2)$ – элементы матрицы; i – номер строки, j – номер столбца, в котором стоит элемент. Элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* матрицы; элементы a_{12}, a_{21} образуют *побочную диагональ* матрицы.

Определителем второго порядка квадратной матрицы (1.1) называется число, которое вычисляется по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1.2)$$

то есть определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали.

Рассмотрим квадратную таблицу, состоящую из девяти чисел или матрицу размерности 3×3:

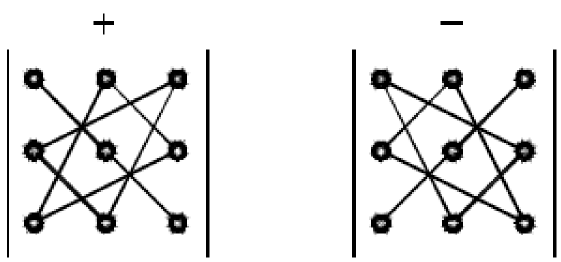
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{23} образуют *главную диагональ* матрицы; элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – образуют *побочную диагональ* матрицы.

Определителем третьего порядка квадратной матрицы (1.3) называется число, которое вычисляется по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (1.4)$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Чтобы запомнить, какие числа в правой части равенства (1.4) следует брать со знаком «плюс», какие – со знаком «минус», полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника*.



Знаки $(+)$ и $(-)$соответствуют знакам определенных слагаемых, входящих в определитель (1.4).

Свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится при замене его строк соответствующими столбцами (операция транспонирования). То есть свойства строк и столбцов (ряда) в определителе равноправны.

2. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то определитель изменит знак на противоположный.

4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

6. Определитель, содержащий два пропорциональных параллельных ряда, равен нулю.

7. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженного на одно и тоже произвольное число.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, в котором стоит элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Теорема 1.1. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Замечание. Для разложения определителя по элементам строки или столбца удобнее выбирать строку (столбец) с наибольшим количеством нулей.

Определители высших порядков.

Определитель квадратной матрицы n-го порядка имеет вид:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Для определителей n-го порядка справедливы свойства, изложенные в разделе 2.

Определители n-го порядка могут быть вычислены двумя способами.

1) *Метод разложения по строке или столбцу* (*метод понижения порядка*):

$$\det A = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

2) *Метод приведения к треугольному виду*.

Необходимо, используя свойства, добиться такой структуры определителя, при которой все его элементы, *стоящие ниже главной диагонали*, равны нулю. Тогда определитель будет численно равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$|A| \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad |A| = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Обратная матрица.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрица A называется *невырожденной*, если определитель матрицы отличен от нуля, то есть $|A| = 0$.

Теорема 1.2. Для любой квадратной невырожденной матрицы существует обратная матрица.

Теорема 1.3. Для любой квадратной невырожденной матрицы A обратная ей матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}, $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений: формулы Крамера, матричный способ, метод Гаусса.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.5)$$

где x_1, x_2, x_3 – неизвестные (переменные); $b_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ – свободные члены; $a_{ij} \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}\right)$ – коэффициенты системы.

Решением системы (1.5) называется упорядоченная тройка чисел $\left(x_1, x_2, x_3\right)$, которая при подстановке превращает каждое уравнение системы в тождество. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Введем обозначения:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных; $\Delta_i, i = \overline{1,3}$ – определители, полученные из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

С помощью свойств определителя система (1.5) может быть приведена к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_3 \end{cases}$$

Теорема 1.4. Если главный определитель системы отличен от нуля, то есть $\Delta \neq 0$, то система (1.5) имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$ – *формулы Крамера.*

Замечания. 1. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система (1.5) несовместна, то есть решений не имеет.

2. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0, i = \overline{1,3}$, то система либо не имеет решений, либо

имеет бесконечное множество решений.

Матричный метод

Пусть дано матричное уравнение: $A \cdot X = B$, где A и B – заданные матрицы, причем матрица A – невырожденная. Требуется найти матрицу X .

Матричный метод решения состоит в следующем: так как матрица A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить слева обе части первого из рассматриваемых уравнений на A^{-1}: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, так как $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.6}$$

Аналогично, рассуждаем при поиске решения матричного уравнения вида $Y \cdot A = B$.

Умножаем справа обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную к матрице A, получаем формулу:

$$Y = B \cdot A^{-1}. \tag{1.7}$$

Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Матрицу будем называть *ступенчатой*, если первый слева ненулевой элемент каждой строки, начиная со второй, находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Количество ненулевых строк ступенчатой матрицы называется *рангом матрицы* и обозначается $r(A)$.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1. перестановка двух строк местами;

2. умножение строки на число, отличное от нуля;

3. удаление нулевой строки;

4. прибавление к строке другой строки, умноженной на произвольное ненулевое число.

Лемма 1.1. Любую матрицу при помощи элементарных преобразований или методом прямоугольников можно привести к ступенчатому виду.

Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{1.8}$$

Введем обозначения:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы.

Метод Гаусса позволяет решить вопрос о совместности произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 1.5 (Кронекера-Капелли). Система (1.8) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть $r(A) = r(A/B) = r$. Причем, если $r = n$, то есть числу неизвестных, то система имеет единственное решение; если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n - r)$ параметров. Если $r(A) \neq r(A/B)$, то система решений не имеет.

Метод Гаусса состоит в следующем:

1. Расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду.

2. Решается вопрос о совместности системы и количестве решений.

3. Если система имеет единственное решение, то по ступенчатой матрице составляют систему равносильную исходной, находят неизвестные, начиная с последней.

4. Если система имеет бесконечное множество решений, то выбирают базисные переменные и свободные, и выражают базисные переменные через свободные и записывают общее решение системы.

*Замечание***.** Число базисных переменных должно быть равно рангу расширенной матрицы. За базисные переменные принимают те, которые входят только в одно из уравнений ступенчатой матрицы и не входят в остальные. Оставшиеся переменные объявляются свободными (параметрами).

Если столбец свободных членов состоит из нулей, то система называется *однородной*.

Замечание. Однородные системы линейных алгебраических уравнений решаются методом Гаусса. Основная матрица системы приводится к ступенчатому виду. Если ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных, то есть $r(A)<n$, то однородная система имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n-r)$ параметров. В противном случае система имеет единственное нулевое решение.

1.1.2. Элементы векторной алгебры

Понятие вектора. Линейные операции над векторами.

Любые две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства, если они упорядочены (например, A является первой, а B – второй точкой), определяют отрезок вместе с выбранным направлением: а именно, от A к B. Направленный отрезок называется *вектором*. Вектор, с началом в A и концом в B, обозначается $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Длина вектора, обозначаемая $\left|\overline{AB}\right|$, AB, или $|\overline{a}|$, называется также *модулем* вектора. Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть одноименные координаты начала: $\overline{AB}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$. Тогда длина вектора найдется так:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Вектор $\overline{a}$, для которого $|\overline{a}|=1$, называется *единичным****.*** *Ортом* вектора $\overline{a}$ называют вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\overline{a}$. Обозначения: орт $\overline{a}$ или $\overline{a}^0$ и орт $\overline{a}=\overline{a}^0=\dfrac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}=\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$.

Векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными,* если они коллинеарны, имеют одинаковые модули и направления. В этом случае пишут $\overline{a}=\overline{b}$. Равные векторы имеют равные координаты.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются противоположными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и противоположные направления: $\overline{b}=-\overline{a}$.

Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают. Обозначается $\overline{0}$.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трёх векторов один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Линейными называются действия сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

1) Если начало $\overline{b}$ совмещено с концом $\overline{a}$, то начало $\overline{a}+\overline{b}$ совпадает с началом $\overline{a}$, а конец — с концом $\overline{b}$ (рис. 1.1 – а).

2) Если начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ совмещены, то начало $\overline{a}-\overline{b}$ совпадает с концом $\overline{b}$ а конец $\overline{a}-\overline{b}$ совпадает с концом $\overline{a}$ (рис. 1.1 – б).

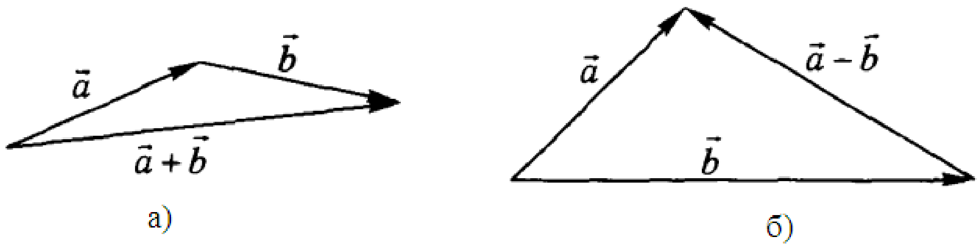


Рис. 1.1

В параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, одна направленная диагональ является *суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а другая – *разностью* (рис. 1.2).

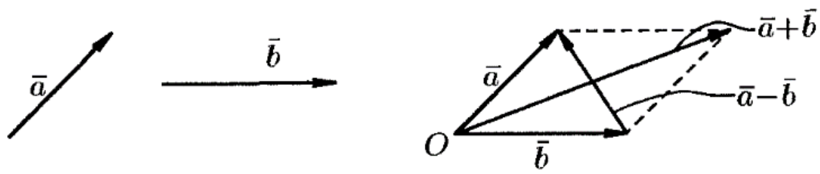


Рис. 1.2

3) При умножении вектора $\overline{a}$ на число (скаляр) λ длина вектора умножается на $|\lambda|$, а направление сохраняется, если $\lambda > 0$, и изменяется на противоположное, если $\lambda < 0$ (рис. 1.3).

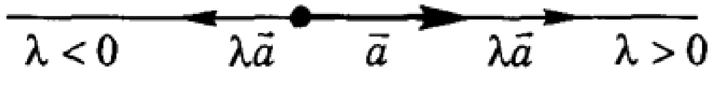


Рис.1.3

Запись $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ означает, что вектор $\overline{a}$ имеет координаты a_x, a_y, a_z, или $\overline{a}$ разложен по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ($\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орты осей

Ox, Oy и Oz пространственной системы координат $Oxyz$).

При этом: $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Числа $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$ называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$; α, β, λ – углы между вектором $\bar{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно. Единичный вектор $\bar{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – орт вектора $\bar{a}$. Для любого вектора справедливо: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Линейные операции над векторами, которые заданы своими координатами, определяются следующим образом: пусть $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогда $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$ и $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Следовательно, при *сложении* векторов *складываются* их соответствующие координаты, а при *умножении* вектора на число *умножаются на число* все координаты вектора.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, устанавливаемое равенством $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ может быть записано соотношениями $b_x = \lambda a_x;\ b_y = \lambda a_y;\ b_z = \lambda a_z$, из которых следует пропорциональность координат: $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Если один из членов какого-нибудь из этих отношений равен нулю, то и второй член того же отношения должен быть нулем. Геометрически это значит, что в этом случае оба вектора перпендикулярны соответствующей координатной оси (например, если $a_x = b_x = 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b} \perp Ox$).

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно независимой*, если равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_m\bar{a}_m = 0 \tag{1.9}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – действительные числа) возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Если же равенство (1.9) возможно при некотором нетривиальном наборе $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, то система этих векторов называется *линейно зависимой*. Любой вектор линейно зависимой системы линейно выражается через остальные.

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{M_1M} = \lambda\,\overline{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом

λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\ (\lambda \neq -1).$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$, и внешним, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2; координаты середины отрезка определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Скалярное произведение векторов и его приложения. Проекция вектора на ось.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла φ между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \tag{1.10}$$

Из OBB' (рис. 1.4) имеем $OB' = OB \cdot \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$ ($\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$ – проекция вектора $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$).

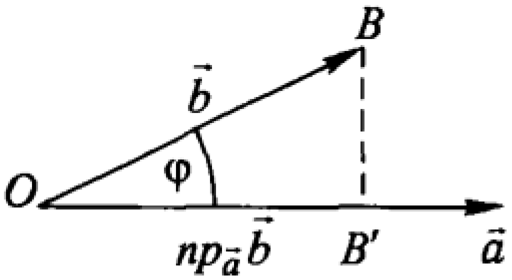


Рис. 1.4

Итак, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} \Rightarrow \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}$ и $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, то есть скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

При этом $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2\ (\varphi=0^\circ)$; если же $\varphi=90^\circ$, т.е. $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ – условие перпендикулярности двух векторов.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_x^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Понятие скалярного произведения возникло в механике. Если вектор $\bar{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\bar{S}$, то работа A указанной силы определяется равенством $A=\bar{F}\cdot\bar{S}=|\bar{F}|\cdot|\bar{S}|\cdot\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\bar{F}$ и $\bar{S}$.

Векторное и смешанное произведения векторов, их приложения.

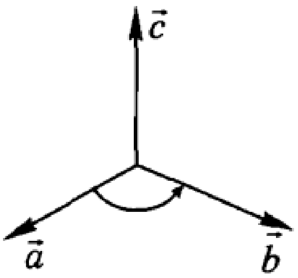
Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, приведенные к одному началу, образуют правую (левую) тройку при условии: если смотреть из конца вектора $\bar{c}$ на плоскость векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ совершается против (по) часовой стрелки (рис. 1.5 – а).

Векторным произведением ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{a}\times\bar{b}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

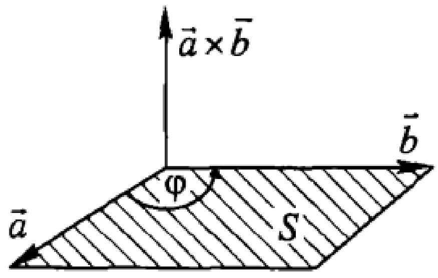
1) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}; \bar{c}\perp\bar{b}$;

2) Вектор $\bar{c}$ направлен так, что векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

3) $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, т.е. его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 1.5 – б), таким образом, $|\bar{a}\times\bar{b}|=S$.



а)



б)

Рис. 1.5

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то под $\bar{a}\times\bar{b}$ понимается нулевой вектор: $\bar{a}\times\bar{b}=0\,(\sin\varphi=0)$.

Если известны координаты векторов-сомножителей $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ то для отыскания координат векторного произведения служит формула:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* M силы F, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A:

$$\overline{M}=\overline{AB}\times\overline{F}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ или $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ и определяемое как скалярное произведение вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ и вектора $\bar{c}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Если $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку, то $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}>0$. Если $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют левую тройку, то $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}<0$.

Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ равен объему параллелепипеда (рис. 1.6 – а), построенного на этих векторах, $V=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$. Условие $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$ равносильно тому, что векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ расположены в одной плоскости, т. е. компланарны. Имеет место равенство:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

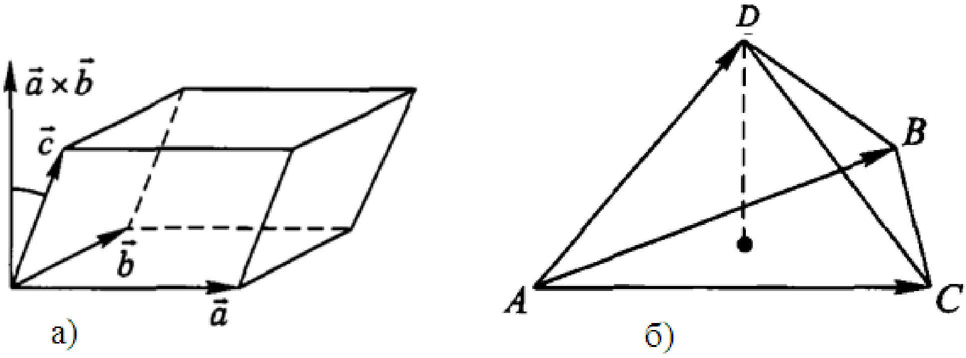


Рис. 1.6

Объем тетраэдра с вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ (рис. 1.6 – б) можно вычислить по формуле $V_T = \frac{1}{6}|\Delta|$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Условие $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \neq 0$ равносильно условию линейной независимости $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, а тогда любой вектор $\bar{d}$ линейно выражается через них, т. е. $\bar{d} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b} + z \cdot \bar{c}$. Для определения x, y, z следует решить соответствующую систему линейных уравнений.

ТЕМА 1.2 Аналитическая геометрия

1.2.1 Уравнения и свойства линий на плоскости.

Пусть на плоскости задана некоторая линия l. Выберем какую-либо декартову прямоугольную систему координат Oxy. Уравнение

$$F(x, y) = 0$$

называют *уравнением линии* l в системе координат Oxy, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$, принадлежащей линии l, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой линии.

Линии первого порядка на плоскости.

К линиям первого порядка относятся те линии, для которых общее их уравнение имеет вид:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.11)$$

где A, B, C – постоянные числа, причем A и B не равны нулю одновременно. Соотношение (1.11) называют *общим уравнением прямой*; вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным* вектором прямой (рис. 1.7 – а). Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

При $B \neq 0$ из уравнения (1.11) можно выразить переменную как функцию от аргумента x:

$$y = kx + b, \; b = -\frac{C}{B}, \; k = -\frac{A}{B} \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k, при этом $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox (рис. 1.7 – а), b– величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox и отстоит от нее на b масштабных единиц.

Уравнение прямой с *заданным угловым коэффициентом* k, *проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

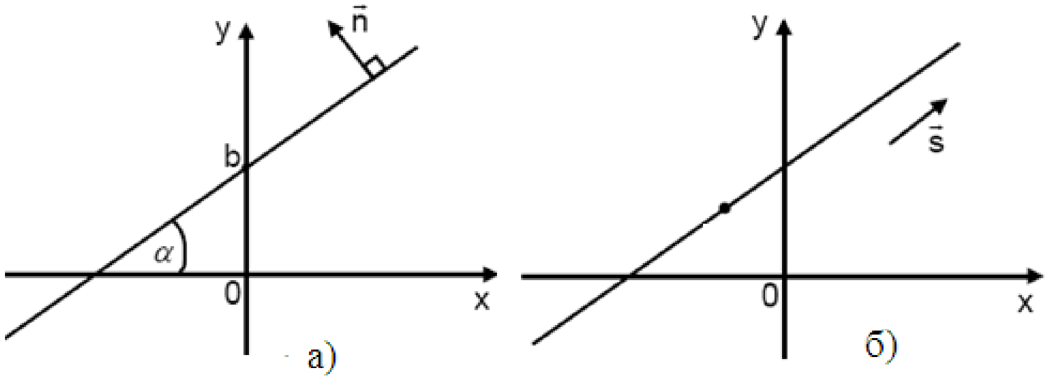


Рис. 1.7

Если заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, записывается следующим образом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ или } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{1.13}$$

Вектор $\bar{s} = (m, n)$, где $m = x_2 - x_1$; $n = y_2 - y_1$ называется *направляющим вектором* прямой (рис. 1.7 – б).

Уравнение (1.13) при $x_1 = x_2$ записывается в виде $x = x_1$, а при $y_1 = y_2$

оно имеет вид $y = y_1$.

Пусть в уравнении (1.11) все три коэффициента A, B, C отличны от нуля. Разделив обе части этого уравнения на $-C$ и введя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, представим его в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b определяют величины направленных отрезков, которые прямая отсекает на осях Ox, Oy, считая от начала координат (рис. 1.8 – а).

Уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad (1.15)$$

называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p – угол между положительным направлением оси Ox и перпендикуляром OP, p – длина перпендикуляра OP (рис. 1.8 – б); φ – угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси.

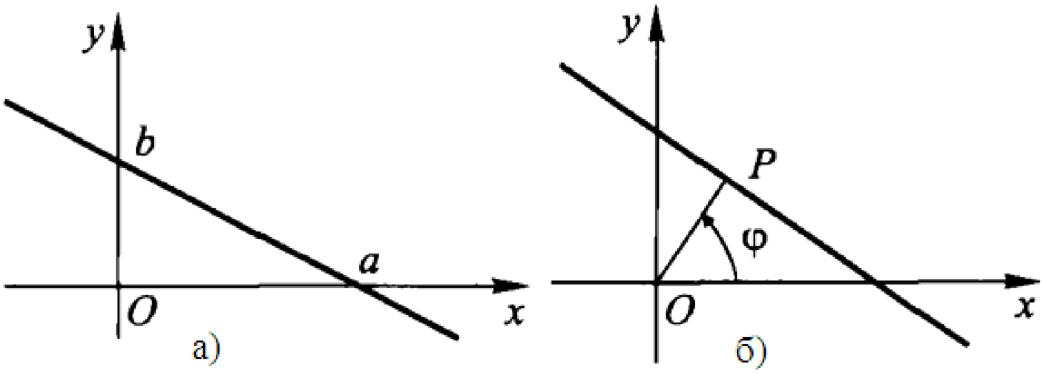


Рис. 1.8

Общее уравнение прямой (1.11) можно преобразовать в нормальное уравнение (1.15) путем умножения на *нормирующий множитель* $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Прямые на плоскости могут быть параллельны, перпендикулярны, могут пересекаться или совпадать.

Под *углом между прямыми* понимают один из смежных углов, образованных этими прямыми (рис. 1.9).

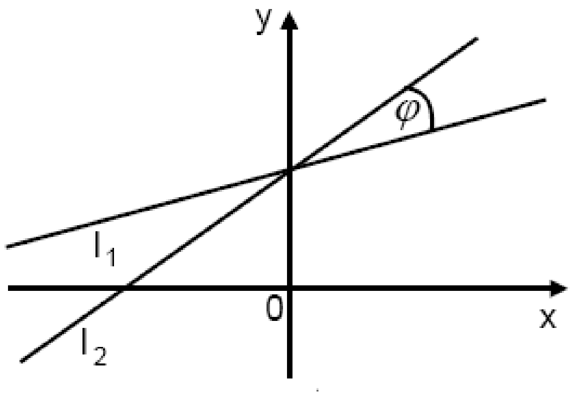


Рис. 1.9

Пусть обе прямые заданы общим уравнением:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда угол φ между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{1.16}$$

Условие перпендикулярности прямых $(l_1 \perp l_2)$: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Условие параллельности прямых: $(l_1 \| l_2)$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие совпадения прямых: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Пусть обе прямые заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$$l_1 : y = k_1x + b_1;\ \ l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Угол φ между прямыми находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{1.17}$$

Условие перпендикулярности прямых $(l_1 \perp l_2)$: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Условие параллельности прямых: $(l_1 \| l_2)$: $k_1 = k_2$.

Если прямая задана уравнением общего вида (1.11), то расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.18}$$

Точка пересечения двух прямых l_1 и l_2 определяется решением системы, составленной из уравнений этих прямых:

$$l_1 \cap l_2 : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}.$$

1.2.2. Линии второго порядка.

К кривым второго порядка относятся следующие четыре линии: *окружность, эллипс, гипербола, парабола*. Координаты x, y точек каждой из этих линий удовлетворяют соответствующему уравнению второй степени относительно переменных x и y.

Под *геометрическим местом точек* (сокращенно ГМТ) подразумевается некоторое множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют определенному условию.

Окружность. *Окружностью* радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется ГМТ, равноудаленных от точки M_0 на расстоянии R (рис. 1.10 – а).

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

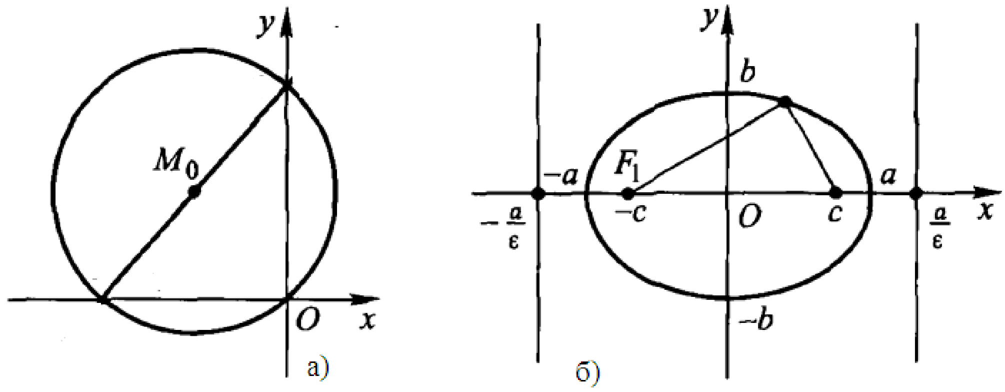


Рис. 1.10

Эллипс. *Эллипсом* называется ГМТ, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. (Данная величина больше расстояния между фокусами).

Если предположить, что фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,0)$; $F_2(c,0)$ $(c>0)$, а данная величина равна $2a$, то из его определения можно получить каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.19}$$

При этом $a>0$ – большая полуось, $b>0$ – малая полуось, c –фокусное расстояние и $a^2=c^2+b^2$. Точки $(a,0)$ и $(-a,0)$ называют *вершинами эллипса*.

Сам эллипс изображен на рис. 1.10 – б. Важными характеристиками эллипса являются:

– эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(0<\varepsilon<1)$; если $\varepsilon\approx 0$ то эллипс почти круглый, т. е. близок к окружности, а если $\varepsilon\approx 1$, то эллипс сплющенный, близок к отрезку $[-a,a]$;

– директрисы эллипса – прямые с уравнениями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$;

– расстояния точки $M(x,y)$ эллипса до его фокусов (r_1 до левого, r_2 до правого), вычисляющиеся по формулам: $r_1=a+\varepsilon\cdot x$, $\quad r_2=a-\varepsilon\cdot x$.

Гипербола. Гиперболой называется ГМТ, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. (Данная величина меньше расстояния между фокусами).

Если фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c>0$, а данная величина равна $2a$, то такая гипербола имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.20}$$

где $a^2+b^2=c^2$.

При этом a – действительная полуось, b – мнимая полуось $(a>0, b>0)$, c – фокусное расстояние $(c>0)$ (рис. 1.11).

Прямые с уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$ называется *асимптотами* гиперболы. Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(1<\varepsilon<+\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы (при больших ε ветви гиперболы широкие, почти вертикальные, а при $\varepsilon\approx 1$ ветви гиперболы узкие, гипербола приближается к оси Ox).

Расстояния от точки $M(x,y)$ гиперболы до ее фокусов (r_1 до левого, r_2 до правого), равны: $r_1=|a+\varepsilon\cdot x|$, $r_2=|a-\varepsilon\cdot x|$.

Прямые с уравнениями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

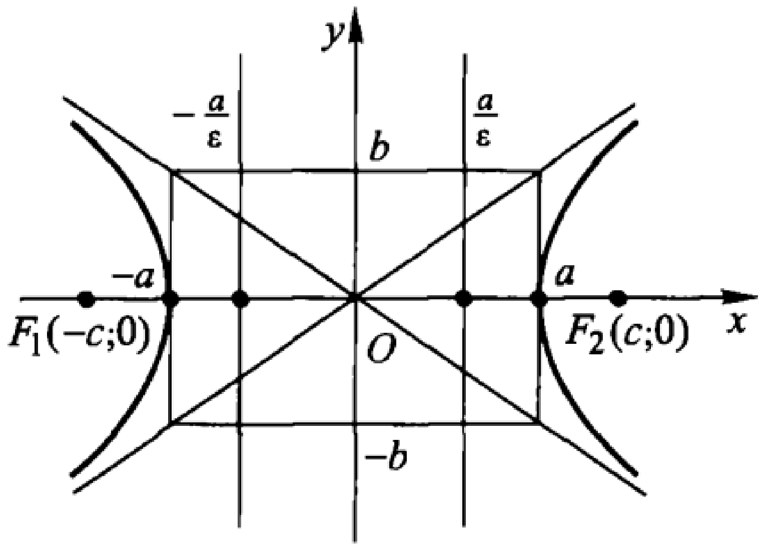


Рис. 1.11

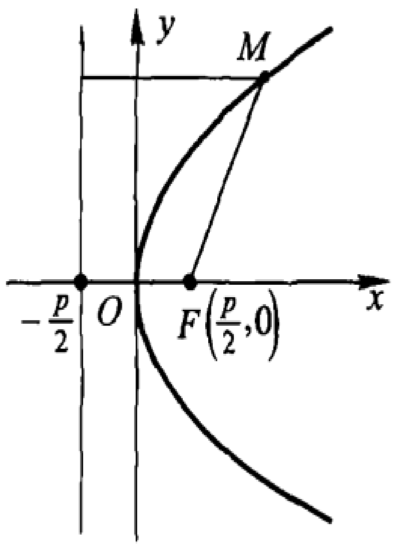


Рис.1.12

Парабола.

Параболой называется ГМТ, для которых расстояние до фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой *директрисой*. Если фокус параболы расположен в точке $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, то такая парабола имеет каноническое уравнение $y^2 = 2px$.

При этом p называется *параметром* параболы. Расстояние от точки $M(x, y)$ параболы до фокуса F равно $r = x + \frac{p}{2}$ (рис. 1.12).

1.2.3. Плоскость в пространстве

Всякая *плоскость* определяется *уравнением первой степени* относительно декартовых координат переменной точки плоскости. Всякое уравнение первой степени относительно декартовых координат определяет *плоскость*.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1.21)$$

$\overline{N}$ называется *нормальным вектором* плоскости.

Уравнение (1.21) называют *уравнением плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору*.

Если в уравнении (1.21) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1.22)$$

называемое *общим уравнением плоскости*. Здесь $A, B, C, D \in R$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (т. е. A, B, C не равны нулю одновременно).

Неполные уравнения плоскости:

1) если $D = 0$, т. е. $Ax + By + Cz = 0$, то плоскость проходит через начало координат;

2) отсутствие в общем уравнении плоскости коэффициента при какой-либо переменной означает, что нормальный вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ имеет соответствующую нулевую координату, т. е. перпендикулярен к этой оси, а плоскость, следовательно, параллельна этой оси.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, получается раскрытием следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.23)$$

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b, c, т.е. проходит через три точки $M_1(a, 0, 0)$; $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$ (рис. 2.7 – а).

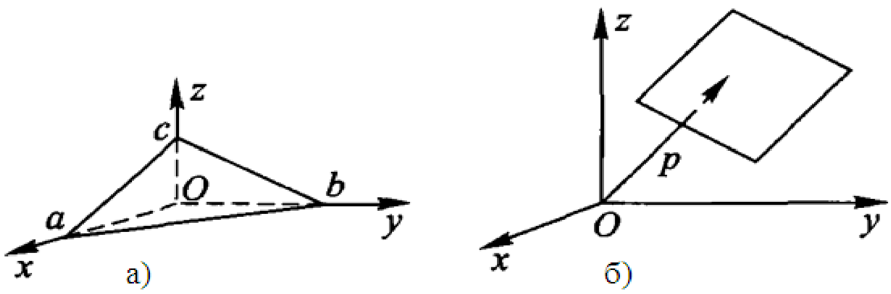


Рис. 1.13

Подставим координаты этих точек в уравнение (1.23) и раскроим определитель. Получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1.24)$$

Уравнение (1.24) называют уравнением плоскости в отрезках на осях. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Если $|p|$ есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость (рис. 1.13 – б), а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – *направляющие косинусы* этого перпендикуляра, то $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$ называется *нормаль-*

ным уравнением плоскости.

Общее уравнение плоскости всегда можно привести к нормальному виду умножением всех его членов на *нормирующий* множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где знак перед корнем берется противоположным знаку D.

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (1.25)$$

Угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть двугранный угол (рис. 2.8), который измеряется углом между нормальными векторами этих плоскостей: $\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}$.

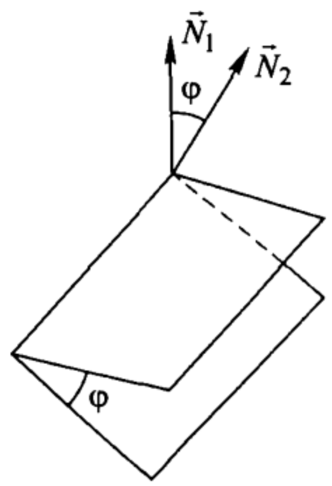


Рис. 1.13

Условие перпендикулярности плоскостей равносильно условию перпендикулярности их нормальных векторов: $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$ или:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей совпадает с условием коллинеарности векторов $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$:

$$\overline{N}_1 = \lambda\overline{N}_2 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda.$$

1.2.4 Прямая в пространстве

Прямую в пространстве можно определить как линию пересечения двух плоскостей. Система уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

задает общие уравнения прямой.

Каждый ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется *направляющим вектором* этой прямой и обозначается $\bar{s} = (m, n, p)$.

Если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой и направляющий вектор $\bar{s}$, то прямая может быть определена соотношениями вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{1.26}$$

В таком виде уравнения прямой называются *каноническими*.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.27}$$

Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях (1.26), получаем $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$. Выражая x, y, z, получаем *параметрические уравнения* прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s} = (m, n, p)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}. \tag{1.28}$$

Для приведения общих уравнений прямой к каноническому виду следует:

– взять две точки на прямой, для чего одной переменной нужно придать два числовых значения и решить систему уравнений относительно других переменных (или взять два значения параметра t);

– написать уравнения прямой, проходящей через две точки.

Направляющий вектор $\bar{s}$ прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

имеет вид: $\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ – векторное произведение нормальных векторов $\overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2, заданные формулами:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Возможны следующие случаи расположения этих прямых:

1) прямые пересекаются, $l_1 \cap l_2$, следовательно, они лежат в одной плоскости. Векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$, – компланарны, тогда их смешанное произведение $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}$, где $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, и расстояние между прямыми $d = 0$.

2) Прямые параллельны, $l_1 \| l_2$, тогда $\bar{s}_1 = \lambda \bar{s}_2$

Расстояние между прямыми d можно найти, используя определение векторного произведения. Модуль векторного произведения $|\overline{M_1M_2} \times \overline{S_1}|$ – это площадь параллелограмма, тогда высота параллелограмма равна

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2} \times \overline{S_1}|}{|\overline{S_1}|} \tag{1.29}$$

3) Прямые *скрещивающиеся*, они не лежат в одной плоскости, тогда искомое расстояние d определяется длиной общего перпендикуляра к этим прямым, то есть это расстояние между параллельными плоскостями, проходящими через прямые l_1 и l_2.

$$d = np_{\overline{N}} \overline{M_1M_2}$$

$\overline{N} = \bar{s}_1 \times \bar{s}_2$ – нормальный вектор к плоскостям.

Под *углом* между двумя скрещивающимися прямыми, заданными каноническими уравнениями следует понимать угол между направляющими векторами этих прямых.

Этот угол можно определить при помощи косинуса:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых есть вместе с тем условие перпендикулярности их направляющих векторов:

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых совпадает с условием коллинеарности направляющих векторов:

$$\bar{s}_1 = \lambda \cdot \bar{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

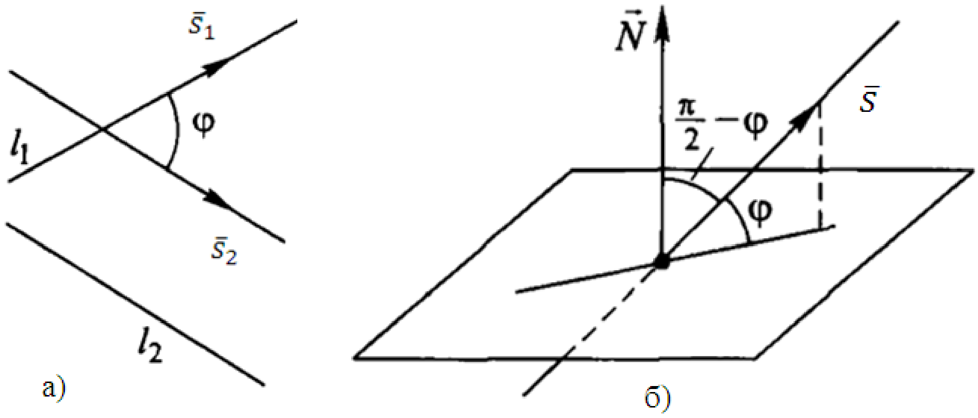


Рис. 1.14

1.2.5 Плоскость и прямая в пространстве

Углом φ *между прямой и плоскостью* будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 1.14 – б).

Угол φ между прямой $l: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ и плоскостью

$P: Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}. \tag{1.30}$$

В частности, если $l \parallel P$, то $\bar{s} \perp \bar{n}$ тогда $Am + Bn + Cp = 0$; если $l \perp P$, то $s \parallel \bar{n}$, тогда $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Точка пересечения прямой, заданной каноническими уравнениями, с плоскостью находится путем решения системы задающих их уравнений. Эту точку можно найти и из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости.

Если прямая задана параметрическими уравнениями (1.28), то, подставив значения переменных x, y, z в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, получим уравнение:

$$(Am + Bn + Cp) \cdot t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

из которого (в случае, если прямая не параллельна плоскости, т.е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$), найдем соответствующее точке пересечения значение t и, подставив это значение t в параметрические уравнения, вычислим координаты точки пересечения.

РАЗДЕЛ II Основы математического анализа

ТЕМА 2.1 Функции и пределы

2.1.1 Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Пусть переменная x принимает последовательные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью* $\{x_n\}$. Последовательность задана, если известна формула для n – го члена.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого столь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Переменная α называется *бесконечно малой*, если все ее значения, следящие за некоторым значением α_0, по абсолютному значению будут меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно не было.

Переменная z называется *бесконечно большой*, если все ее значения, следующие за некоторым значением z_0, по абсолютному значению будут больше любого заранее данного положительного числа N, как бы велико оно ни было.

Бесконечно большая величина предела не имеет, но иногда условно говорят, что предел ее есть бесконечность (∞), причем, если она, начиная с некоторого момента, принимает только положительные значения, то предел ее $(+\infty)$, если отрицательные, то $(-\infty)$.

Из определения предела последовательности, бесконечно малой и бесконечно большой величин следует:

1) предел бесконечно малой равен нулю (т.е. если α бесконечно малая, то $\lim \alpha = 0$, или $\alpha \to 0$);

2) разность между последовательностью и ее пределом есть величина бесконечно малая (т.е. если $\lim x_n = a$, то $x_n - a = \alpha$);

3) величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая (т.е. если $z \to \infty$, то $\frac{1}{z} \to 0$);

4) величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая (т.е. если $\alpha \to 0$, то $\frac{1}{\alpha} \to \infty$).

2.1.2. Предел функции. Основные теоремы о пределах.

Если каждому элементу x из области D по определенному правилу ставится в соответствие некоторое число из множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f(x)$. Область D называется *областью определения*, E *– область значения*, элемент x называется *аргументом*. Если паре чисел $(x,\ f(x))$ поставить в соответствие точку на координатной плоскости, то линия, соединяющая эти точки, называется *графиком функции* $y = f(x)$.

Число b называется *пределом функции* при x стремящемся к x_0, если для значений аргумента близких к x_0, соответствующие значения функции сколь угодно мало отличаются от b.

Теорема 2.1. Функция может иметь только один предел в точке.

Замечание. Если при стремлении x к x_0 принимает значения меньше x_0 (больше x_0), и при этом $f(x)$ стремится к b, то говорят об *односторонних пределах* функции $f(x)$, соответственно слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, то есть, если односторонние пределы существуют и равны между собой, то существует предел функции в точке.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, и, кроме того $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = b_1$; $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b_2$.

Теорема 2.2. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(u(x) \pm v(x)\right) = \lim_{x\to x_0} u(x) \pm \lim_{x\to x_0} v(x) = b_1 \pm b_2 .$$

Теорема 2.3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b_1 \cdot b_2$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot v(x)\right) = c\cdot \lim_{x\to x_0} u(x) = c\cdot b_1,\ c - const .$$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^n = b_1^n,\ \forall n \in N .$$

Теорема 2.4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)} = \frac{b_1}{b_2}; \ \lim_{x \to x_0} v(x) \neq 0 .$$

Замечание. Если при нахождении пределов суммы, произведения, частного, нарушаются условия теорем, то могут возникать неопределенности вида:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right), \ (\infty - \infty), \ (0 \cdot \infty), \ \left(1^{\infty}\right),$$

для раскрытия которых требуются дополнительные алгебраические преобразования.

Раскрывать неопределенности позволяет:

1) упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);

2) использование замечательных пределов;

3) использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным (использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

2.1.3. Замечательные пределы.

Широко используются следующие два замечательных предела:

I. *Первый замечательный предел*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \qquad (2.1)$$

В более общем виде первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1; \ \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad (2.2)$$

II. *Второй замечательный предел*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e\approx 2{,}718 \qquad (2.3)$$

Имеет место более общая формула:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{b\cdot x}=e^{a\cdot b} \qquad (2.4)$$

Функция $y=e^{x}$ называется *экспоненциальной* (*показательной*), а логарифмы с основанием e – *натуральными*: $\log_{e}x=\ln x$.

В более общем виде второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e,\ \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\infty.$$

Замечание. Для предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ характерно, что сумма, равная единице плюс бесконечно малая, возводится в степень, обратную этой бесконечно малой.

Следовательно, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, то и $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{1/f(x)}=e.$

2.1.4. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$. Таким образом, $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x),\ x\to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x)),\ x\to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ – o малое от $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая в окрестности x_0, то:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2} \qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$$

$$(1+\alpha(x))^n-1\sim\alpha(x)\cdot n \qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n} \qquad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x)\sim\beta_1(x), x\to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta_1(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

2.1.5. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняются следующие условия:

1) Функция $f(x)$ определена в точке x_0, то есть точка x_0 принадлежит области определения функции, то есть существует значение функции $f(x)$ в точке x_0;

2) существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной, то есть если нарушено хотя бы одно из условий непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

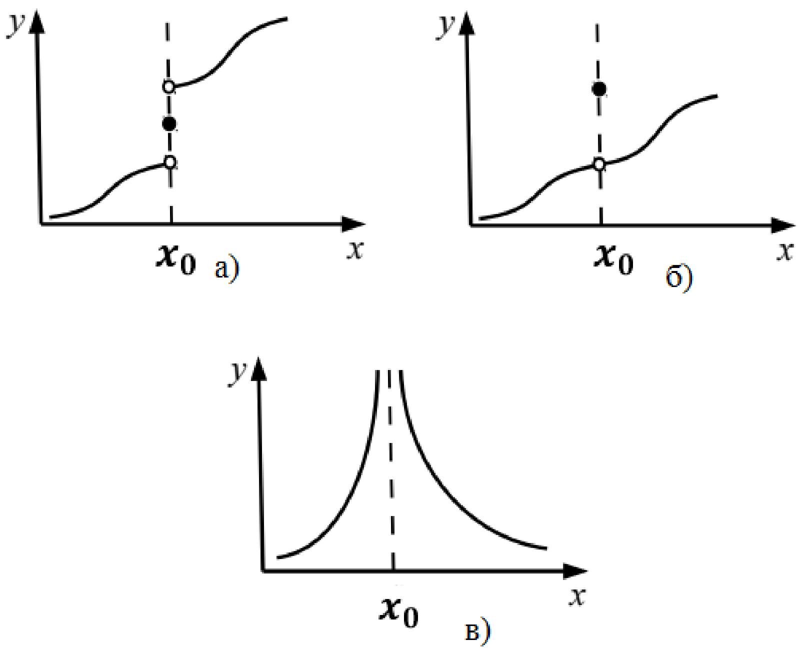


Рис. 2.1

Классификация точек разрыва:

1. *Точка устранимого разрыва*. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но x_0 не принадлежит области определения функции $y = f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (рис. 2.1 – б).

2. *Точка разрыва первого рода*. Функция имеет в точке x_0 разрыв первого рода (рис. 2.1 –а), если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$

и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, причем $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

Разность $h = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется *скачком* функции в точке x_0.

3. *Точка разрыва второго рода*. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности (рис. 2.1 – в).

Отметим важное *свойство* элементарных функций. Элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем в точке a она непрерывна справа $(f(a+0) = f(a))$, а в точке b – слева $(f(b-0) = f(b))$.

ТЕМА 2.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

2.2.1. Определение производной функции, ее геометрический и физический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Производная обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

Таким образом:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.5)$$

Физический смысл производной. Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x)$ – скорость изменения величины x. Например:

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t. Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.

в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a, x]$. Тогда $m'(x_0)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.6}$$

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0, называется *нормалью к кривой в точке* M_0. Т.к. для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}, \text{ если } f'(x_0) \neq 0 \tag{2.7}$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ будет иметь вид $y = f(x_0)$, а нормаль $x = x_0$.

2.2.2 Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

Если указанный предел (2.5) существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной y' – *дифференцированием*.

Если C – постоянное число и $u = u(x); v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

В частности

$$\left(u \cdot v \cdot w\right)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

В частности, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Производная сложной функции. Если $y = f(u), u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Производная обратной функции. Если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция, $x = g(y)$ и $g'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Таблица производных основных элементарных функций (будем считать, что функция $u = u(x)$).

1	$C' = 0; C - const$	2	$x' = 1$
3	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	4	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';\ a \in R$
5	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$	6	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
7	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9	$(\sin u)' = -\cos u \cdot u'$	10	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	12	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	14	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$	16	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
17	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$	18	$\left(\dfrac{1}{u^{\alpha}}\right)' = -\dfrac{\alpha}{u^{\alpha+1}} \cdot u'$

2.2.3 Дифференциал функции и его линеаризация.

Дифференциалом дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется произведение ее производной на произвольное приращение аргумента:

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x = y'\Delta x$$

Для функции $y = x$ ее дифференциал равен $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$.

Дифференциал аргумента совпадает с его произвольным приращением, поэтому дифференциал функции записывают в виде:

$$dy = df(x) = f'(x)dx = y'dx.$$

Инвариантность формы дифференциала. Если $y = f(x)$ – сложная функция, то $df(u) = f'(u)du$ или $dy = y'_u du$, т.е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

При $\Delta x \to 0$ дифференциал – бесконечно малая величина. Дифференциал функции аппроксимирует (приближает) приращение функции, т.е.: если $\Delta x \approx 0$, то $\Delta f(x) \approx df(x)$, или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$.

Отсюда получаем приближенное равенство $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, $\Delta x \approx 0$, которое называется *линеаризацией* функции $f(x)$ в точке x. Геометрически это означает замену дуги графика функции $y = f(x)$ отрезком касательной, что возможно при достаточно малых x.

Линеаризацию функции в фиксированной точке x_0 можно использовать в приближенных вычислениях:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (2.8)$$

2.2.4 Дифференцирование неявно заданных функций. Понятие о логарифмической производной.

Если y как функция от x задается соотношением $F(x, y) = 0$, то y называется *неявной функцией* от x, в отличие от явного способа задания $y = f(x)$. Производная от y по x при неявном способе задания функции может быть определена дифференцированием выражения $F(x, y)$ как сложной функции, считая y функцией от x; решая полученное уравнение относительно производной y', находим выражение производной от неявной функции в виде $y' = f(x,y)$.

При нахождении производных от показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную:

Логарифмической производной от $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow (\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, можно вывести формулу для производной показательно степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v \qquad (2.9)$$

2.2.5 Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной параметрически.

Предположим, что производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция. Тогда ее производная $(y')'$ называется *второй производной* функции $f(x)$ и обозначается $y'' = f''(x)$. Производные высших порядков определяются последовательно: $y''' = (y'')'$; $y^{(4)} = (y''')'$ и так далее.

Физический смысл второй производной. Если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t, то $S'(t_0)$ – скорость в момент времени t_0, $S''(t_0)$ – ускорение в момент времени t_0 (скорость изменения скорости).

Дифференциалы высших порядков определяются следующим образом:

$$d^n x = f^{(n)}(x)dx^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Если функция $y = y(x)$ задается параметрически, т.е. при помощи двух функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ аргумента t, а $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – дифференцируемые функции, то производную $y' = y'(x)$, обозначаемую еще y'_x, находим при помощи дифференциала:

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Вторую производную $y'' = y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ можно найти при помощи одной из двух формул – они основаны на производной сложной функции, дроби и обратной функции $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \text{ или } y''_{xx} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{(x'_t)^2}.$$

2.2.6 Приложения дифференциального исчисления

1. *Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.*

Теорема 2.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ (или } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\text{)}.$$

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, при этом имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (2.10)$$

Теорема 2.5 справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$.

В случае, когда и отношение производных приводит к одному из виду неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ можно к отношению производных применить правило Лопиталя.

В случае неопределенностей вида $\infty - \infty$ или $0\cdot\infty$ следует путем алгебраических преобразований привести их к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

В случае неопределенностей вида 1^{∞}, ∞^{0} или 0^{0}, следует предварительно прологарифмировать заданную функцию, а затем найти предел ее логарифма:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\exp\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)=\exp\left(\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)\right).$$

2. Возрастание, убывание функции. Экстремумы функции.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на области D, если $\forall x_1>x_2\ (x_1,x_2\in D)$ выполняется неравенство: $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 2.2 – а).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на области D, если $\forall x_1<x_2\ (x_1,x_2\in D)$ выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 2.2 – б).

Теорема 2.6 (*достаточное условие возрастания (убывания) функции*). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, то функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Интервалы, на которых функция возрастает или убывает, называются *интервалами монотонности* функции.

Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $y=f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполнятся неравенство: $f(x_0)\geq f(x)$.

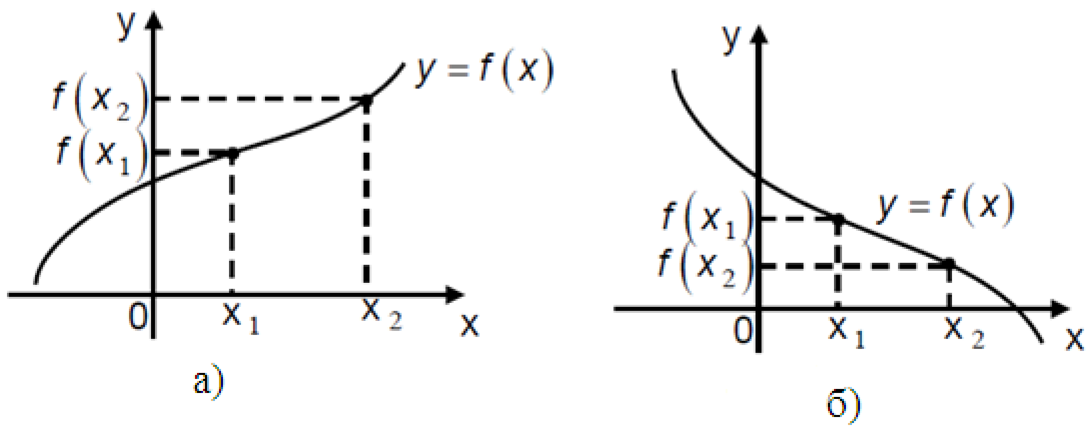


Рис. 2.2

Точка x_0 называется точкой *локального минимума* функции $y=f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0)\le f(x)$.

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называется *максимумом (минимумом)* функции. Максимум и минимум функции называется *экстремумом функции* (рис. 2.3).

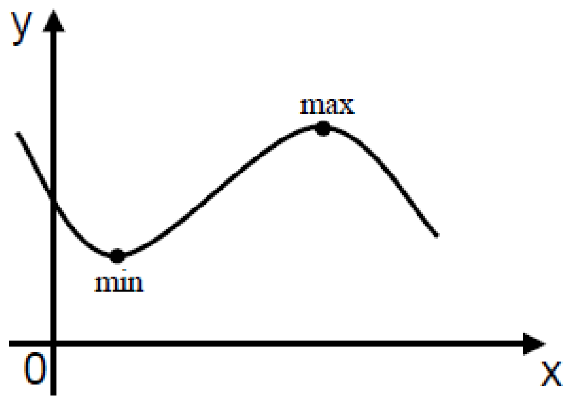


Рис. 2.3

Теорема 2.7 (*необходимое условие существования экстремума*). Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0)=0$.

Замечание. Обратная теорема неверна, т.е., если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0 – точка экстремума.

Точки, в которых производная обращается в ноль или не существует, называются *критическими или стационарными*.

Теорема 2.8 (*достаточное условие существования экстремума*). Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 – точка локального максимума; если производная меняет свой знак с минуса на плюс, то точка x_0 – точка локального минимума.

Правило исследования функции на экстремум.

1. Найти точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, то есть найти критические точки.

2. Среди критических точек выбрать те, которые принадлежат области определения функции.

3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой из выбранных точек.

3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*или вогнутым*) на интервале (a, b), если на этом интервале график расположен выше касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала (a,b) – рис. 2.3 – а.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым верх* (*или выпуклым*) на интервале (a, b), если на этом интервале график расположен ниже касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала (a,b) – рис. 2.4 – б).

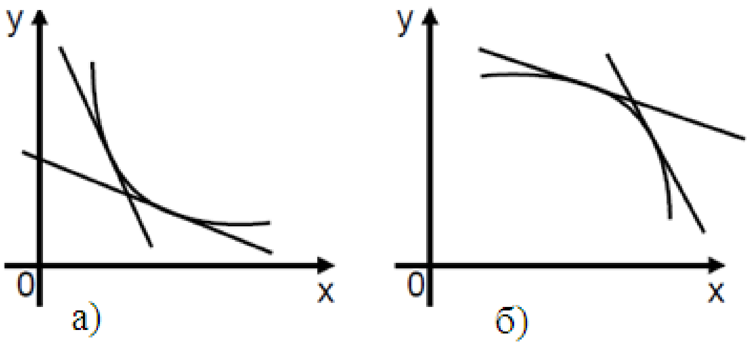


Рис. 2.4

Теорема 2.9. Если функция $y = f(x)$ на интервале (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ для любого x из интервала (a,b), то график функции на интервале (a,b) вогнутый; если $f''(x) < 0$ для любого x из интервала (a,b), то график функции на интервале (a,b) выпуклый.

Точка графика дифференцируемой функции называется *точкой перегиба* функции $y = f(x)$, если в ней характер выпуклости меняется на противоположный (рис. 2.5).

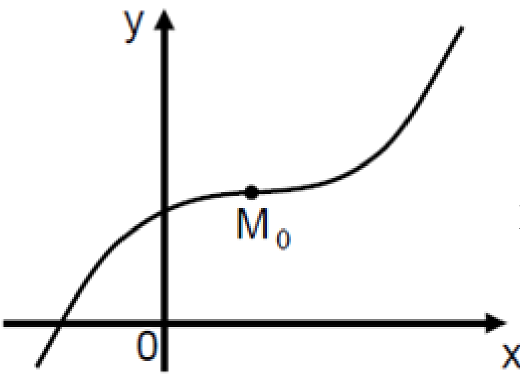


Рис. 2.5

Теорема 2.15. Если для функции $y = f(x)$ вторая производная в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует, и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

4. Асимптоты графика функции.

Асимптотой графика функции y=f(x) называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика этой функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ (рис.2.6 – а), если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности.

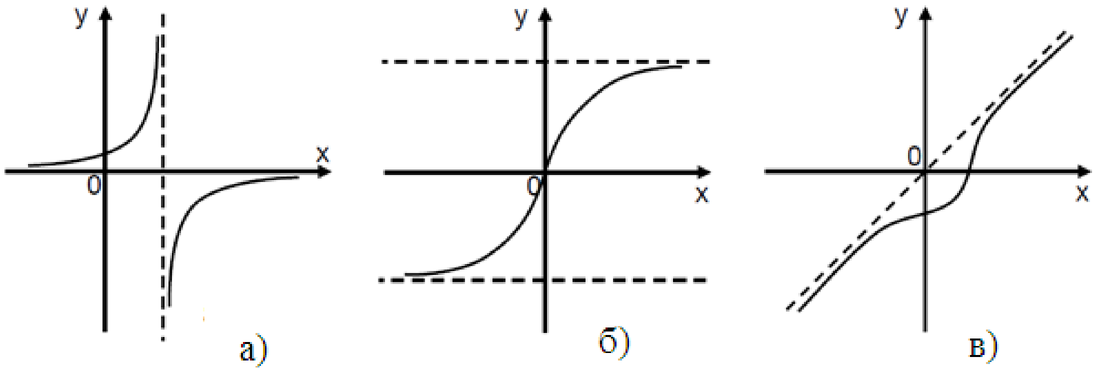


Рис. 2.6

Замечание. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ (рис. 2.6 – в)при x стремящемся к бесконечности, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной* (рис. 2.6 – б).

Теорема 2.10. Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right). \qquad (2.11)$$

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то график функции наклонной асимптоты не имеет.

1.2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.

Формирование навыков самостоятельной работы у современного специалиста является одним из важнейших направлений воспитательного процесса. В большинстве учебных планов общих и специальных дисциплин отводятся часы на самостоятельную работу студентов. Опираясь на потребность учащихся в знаниях, возникает возможность развития навыков умственной самостоятельности, формирования самодисциплины, самоорганизации учебного времени.

При подготовке сопутствующего методического руководства акцент был сделан на формирование навыков планирования, анализа и оценки деятельности обучающегося.

Важной формой обучения студента заочном отделении является самостоятельная работа над учебным материалом. Она заключается в изучении предмета по учебникам и учебно-методическим пособиям, в ответах на вопросы для самопроверки, в выполнении тестов и контрольных работ. При изучении теоретического материала следует переходить к новому вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления и строя все графики и чертежи. Особое внимание следует уделять изучению основных понятий и определений курса.

Рекомендуется вести конспект, в который необходимо вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. Чтение учебника обязательно должно сопровождаться решением задач. Решение следует излагать достаточно подробно, чтобы его можно было легко восстановить при необходимости, и доводить до конечного ответа. Условия задач и их решения необходимо записывать в отдельную тетрадь.

При изучении курса студент должен выполнить ряд контрольных работ и тестов с целью закрепления материала и проверки его усвоения.

Правила оформления контрольной работы

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 – четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) не зачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ.

Практикум 1. Векторная алгебра и матричное исчисление

Примеры решения задач

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Найти $2A-3B$.

Решение. По определению операций суммы матриц и произведения матрицы на число:

$$2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ 9 & -3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-0 & 4-3 & 6-6\\ 8-9 & 10-(-3) & -12-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 13 & 18\end{pmatrix}.$$

2. Если это возможно, найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

Решение. Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение $A\cdot B$ возможно. По определению произведения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&-1&-2\\0&3&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3\\3&5\\-1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot0+3\cdot3-1\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot5-1\cdot2\\-2\cdot0-1\cdot3+2\cdot1 & -2\cdot3-1\cdot5+2\cdot2\\0\cdot0+3\cdot3+5\cdot1 & 0\cdot3+3\cdot5+5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&19\\-1&-7\\14&25\end{pmatrix}$$

3. Найти произведение трех матриц $\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0\\4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&-1\end{pmatrix}$.

Решение. Пользуясь свойством ассоциативности умножения матриц, начнем с произведения первой и второй матриц:

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-3)+0\cdot4 & 3\cdot0+0\cdot(-2)\\0\cdot(-3)+(-1)\cdot4 & 0\cdot0+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&0\\-4&2\end{pmatrix}.$$

Домножим результат на третью матрицу справа:

$$\begin{pmatrix}-9&0\\-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\cdot(-1)+0\cdot(-1) & -9\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\-4\cdot(-1)+2\cdot(-1) & -4\cdot(-3)+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&27\\2&10\end{pmatrix}.$$

4. Найти $A^T\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Решение. Находим матрицу, транспонированную к A:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

Тогда: $A^T\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3\\4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3\\7\cdot1+8\cdot2+9\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\32\\50\end{pmatrix}$.

5. Вычислить следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

Решение.

1) Согласно формуле (1.2):

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-3) - 4\cdot(-1) = 9 + 4 = 13.$$

2) Применяя правило треугольника (1.4), получим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot 8\cdot 2 + 1\cdot 9\cdot 3 + 7\cdot 5\cdot 1 - 3\cdot 8\cdot 1 - 0\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 0 + 27 + 35 - 24 - 0 - 14 = 24.$$

6. Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$:

1) разложив его по элементам какой-либо строки (столбца);
2) получив предварительно нули в какой-либо строке (столбцу);
3) приведя его к треугольному виду.

Решение. 1) Вторая строка определителя содержит один нуль и единицу. Будем раскладывать определитель по элементам этой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{24}\cdot A_{24} =$$

$$= a_{21}\cdot A_{21} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{24}\cdot A_{24}.$$

(так как $a_{22}=0$).

Тогда:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-(-4+6-12-18+4+4)=20;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=-(2-18-8-12-6-4)=-46;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2-12+8-8+6+4=-4.$$

$$\Delta=4\cdot 20-2\cdot 46-1\cdot(-4)=80-92+4=-8$$

б) Обратим предварительно в нуль все элементы второй строки, кроме –1. Для этого поочередно домножая четвертый столбец на 4 и –2, будем добавлять результат соответственно к первому и третьему столбцам:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-11 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -10 & -2 & 6 & -2\\ -2 & -3 & 3 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-11 & 2 & 4\\ -10 & -2 & 6\\ -2 & -3 & 3\end{vmatrix}=$$
$$=-(66+120-24-16-198+60)=-8.$$

в)
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -2 & -1\\ -2 & -2 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 1 & -1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{из 2 строки вычитаем 1, умноженную на 4}\\ \text{к 3 строке добавляем 1, умноженную на 2}\\ \text{складываем 3 - ю и 4 - ю строки}\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & -3\\ 0 & -8 & 6 & 11\\ 0 & 2 & -2 & 8\\ 0 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{выносим за определитель общий множитель}\\ \text{3-ей строки, равный 2 и меняем местами}\\ \text{2-ю и 3-ю строки}\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & -8 & 6 & 11\\ 0 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{к 3 строке прибавляем 2, умноженную на 8}\\ \text{к 4 строке прибавляем 2, умноженную на 5}\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -2 & -21\\ 0 & 0 & -2 & -23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{из 4 строки вычитаем 3}\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -2 & -21\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot1\cdot1\cdot(-2)\cdot(-2)=-8.$$

7. Вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами первую и вторую строки, ранг матрицы от этого не изменится:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы первого столбца, кроме a_{11} были равны нулю. Умножим все элементы первой строки на 2 и сложим с соответствующими элементами третьей строки. Затем сложим все элементы первой строки с соответствующими элементами третьей строки:

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

Теперь добиваемся, чтобы все элементы второго столбца, кроме a_{12} и a_{22} были равны нулю. Умножаем все элементы второй строки на (–3) и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Затем умножаем все элементы второй строки на (–3) и складываем с соответствующими элементами четвертой строки. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей, то отбрасываем их.

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица содержит миноры второго порядка не равные нулю, например: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, следовательно, $r_A = 2$.

8. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $|A| = 0-3+0+2+2-0 = 1 \neq 0$, то A^{-1} существует и может быть найдена по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

Поскольку

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+1=1;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-(0-1)=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(0-2)=2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-(2-3)=1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3-2=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-2-0)=2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2-0=2;$$

то $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

9. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=9\\ x_1+3x_3=-2\\ 3x_1-x_2+5x_3=-4\end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=0+1+27-0+6-15=19.$$

Вычислим определитель Δ_1, полученный из Δ, заменой первого столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 3\\ -4 & -1 & 5\end{vmatrix}=0-2-36-0+27+30=19$$

Аналогично найдем определители Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 4 + 81 - 6 - 45 + 24 = 38$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 9 - 18 - 0 - 4 + 12 = -19$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1.$$

Тройка чисел (1, 2, –1) является решением исходной системы.

10. Решить систему матричным способом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}.$$

Решение. В нашем случае:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица к матрице A была найдена выше (см. задачу 7):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+3 \\ 2+4+3 \\ 1+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 6;\ x_2 = 9;\ x_3 = 11$$

11. Даны векторы $\bar{a} = (1,2,0); \bar{b} = (1,2,3); \bar{c} = (2,3,2)$. Найти векторы $\bar{p} = 2\bar{a} + 4 \cdot (\bar{b} - \bar{c});\ \bar{q} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + 2 \cdot (\bar{c} - \bar{a})$.

Решение. Найдем $\bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{c} - \bar{a}$:

$$\bar{b} - \bar{c} = (1, 2, 3) - (2,3,2) = (1-2,\ 2-3,\ 3-2) = (-1, -1, 1);$$
$$\bar{c} - \bar{a} = (2,3,2) - (1,2,0) = (2-1,\ 3-2,\ 2-0) = (1, 1, 2).$$

Тогда:

$$\bar{p} = 2\bar{a} + 4 \cdot (\bar{b} - \bar{c}) = 2 \cdot (1,2,0) + 4 \cdot (-1, -1, 1) = (2, 4, 0) + (-4, -4, 4) =$$
$$= (2-4,\ 4-4,\ 0+4) = (-2, 0, 4).$$

$$\bar{q} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + 2 \cdot (\bar{c} - \bar{a}) = (2, 4, 0) - 3 \cdot (1, 2, 3) + 2 \cdot (1, 1, 2) = (2, 4, 0) - (3, 6, 9) -$$
$$+ (2, 2, 4) = (2-3+2,\ 4-6+2,\ 0-9+4) = (1, -2, 5).$$

12. Являются ли точки $A(3, -1, 2);\ B(1, 2, -1);\ C(-1, 1, -3);\ D(3, -5, 3)$ вершинами трапеции?

Решение. Проверим, будут ли параллельны стороны AB и CD. Находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = (1-3,\ 2-(-1),\ -1-2) = (-2, 3, -3);$$
$$\overline{CD} = (3-(-1),\ -5-1,\ 3-(-3)) = (4, -6, 6).$$

Так как $\overline{CD} = -2\overline{AB}$, то $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

13. Пусть $|\bar{a}| = 2;\ |\bar{b}| = 5$ и $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Вычислить: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $(3\bar{a} + 2\bar{b})^2$; 3) $(3\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} - 4\bar{a})$.

Решение.

1) Согласно формуле (1.10):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{3}=5.$$

2) Имеем:

$$\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)^2=9\overline{a}^2+12\overline{a}\cdot\overline{b}+4\overline{b}^2=9|\overline{a}|^2+12|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)+4|\overline{b}|^2=$$

$$=9\cdot4+12\cdot5+4\cdot25=36+60+100=196.$$

3) Согласно свойствам скалярного произведения и формулы (1.10):

$$\left(3\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{b}-4\overline{a}\right)=3\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)-12\overline{a}^2+\overline{b}^2-4\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\overline{b}^2-\overline{a}\cdot\overline{b}-12\overline{a}^2=$$
$$=25-5-12\cdot4=20-48=-28.$$

14. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(-1,-2,4)$; $B(-4,-2,0)$; $C(3,-2,1)$. Найти 1) длины сторон треугольника; 2) внутренний угол при вершине B; 3) длину медианы, опущенной из вершины A; 4) координаты центра тяжести треугольника.

Решение. 1) Длины сторон треугольника найдем как длины векторов:

$$\overline{BA}=\left(-1-(-4),-2-(-2),4-0\right)=(3,0,4)\Rightarrow\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5;$$
$$\overline{BC}=\left(3-(-4),-2-(-2),1-0\right)=(7,0,1)\Rightarrow\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{7^2+0^2+1}=5\sqrt{2};$$
$$\overline{AC}=\left(3-(-1),-2-(-2),1-4\right)=(4,0,-3)\Rightarrow\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5.$$

2) Угол треугольника при вершине B равен углу между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, который обозначим φ. Тогда:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}=\frac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{5\cdot5\sqrt{2}}=\frac{21+4}{25\sqrt{2}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

3) Пусть $\overline{AM}$ – медиана, проведенная из вершины A. Тогда:

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right).$$

Так как $\overline{AB}=(-3,0,-4)$; $\overline{AC}=(4,0,-3)$, то:

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(-3,0,-4\right)+\left(4,0,-3\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-3+4,0+0,-4-3\right)=\frac{1}{2}\left(1,0,-7\right).$$

Следовательно, длина медианы AM равна:

$$\left|\overline{AM}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+0^2+(-7)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{50}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

4) Центр тяжести треугольника находится на пересечении трех медиан и делит медиану в отношении 2:1. Пусть O – центр тяжести треугольника. Найдем координаты точки M – середины стороны BC:

$$x_M=\frac{-4+3}{2}=\frac{-1}{2};\ y_M=\frac{-2+(-2)}{2}=-2;\ z_M=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(\frac{-1}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$$

Тогда:

$$x_{\text{o}}=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{-1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+2}=\frac{-2}{3};\ y_{\text{o}}=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{-2-2\cdot 2}{1+2}=-2;$$

$$z_{\text{o}}=\frac{z_A+\lambda z_M}{1+\lambda}=\frac{4+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2}=\frac{5}{3}.$$

Таким образом, $O\left(-\frac{2}{3},-2,\frac{5}{3}\right)$.

15. Даны векторы $\overline{a}=\left(2,3,1\right)$; $\overline{b}=\left(-2,1,1\right)$; $\overline{c}=\left(3,1,0\right)$. Найти:

1) векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}+\vec{c}$; 2) смешанное произведение векторов $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$; 3) вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\overline{a},\overline{b}$; 4) скалярное произведение векторов $\overline{b}$ и $-2\overline{c}$; 5) проекцию вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}+2\overline{c}$.

Решение.

1) Найдем координаты вектора $\overline{b}+\vec{c}$:

$$\overline{b}+\vec{c}=\left(-2,1,1\right)+\left(3,1,0\right)=\left(-2+3,1+1,1+0\right)=\left(1,2,1\right).$$

Определим координаты векторного произведения:

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot(3-2)-\bar{j}\cdot(2-1)+$$

$$+\bar{k}\cdot(4-3)=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}=(1,-1,1).$$

2) $\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0-2+9-3-2-0=-7+9=2.$

3) Так как $V=S\cdot h$, где S – площадь грани, образованная векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$, то $h=\dfrac{V}{S}$.

С другой стороны, объем параллелепипеда равен:

$$V=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|\Rightarrow V=2\left(\text{ед}^3\right).$$

Вычислим площадь основания:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\left|\bar{i}\cdot(3-1)-\bar{j}\cdot(2+2)+\bar{k}\cdot(2+6)\right|=\left|2\bar{i}-4\bar{j}+8\bar{k}\right|=$$

$$=\sqrt{2^2+(-4)^2+8^2}=\sqrt{4+16+64}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}\left(\text{ед}^2\right).$$

Таким образом, $h=\dfrac{V}{S}=\dfrac{2}{2\sqrt{21}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}$.

4) Так как $\bar{b}=(-2,1,1)$; $-2\bar{c}=-2\cdot(3,1,0)=(-6,-2,0)$, то

$$\bar{b}\cdot(-2\bar{c})=(-2,1,1)\cdot(-6,2,0)=-2\cdot(-6)+1\cdot2+1\cdot0=12+2=14.$$

5) Проекция вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}+2\bar{c}$ вычисляется по формуле: $np_{\bar{a}+2\bar{c}}\bar{b}=\dfrac{\bar{b}\cdot(\bar{a}+2\bar{c})}{\left|\bar{a}+2\bar{c}\right|}$.

Вычислим вектор $\bar{a}+2\bar{c}$:

$\bar{a}+2\bar{c}=(2,3,1)+2(3,1,0)=(2+6,3+2,1+0)=(8,5,1)$.

Получаем:

$$np_{\bar{a}+2\bar{c}}\bar{b}=\frac{\bar{b}\cdot(\bar{a}+2\bar{c})}{|\bar{a}+2\bar{c}|}=\frac{(-2,1,1)\cdot(8,5,1)}{\sqrt{8^2+5^2+1^2}}=\frac{-16+5+1}{\sqrt{90}}=\frac{-10}{3\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

16. Даны три силы $\bar{F}_1=(7,-6,\ 2);\bar{F}_2=(-6,2,-1);\ \bar{F}_3=(7,3,-1)$, приложенные к точке $M_1(3,-6,1)$. Вычислить: а) работу равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $M_2(6,-2,7)$; б) величину момента равнодействующих этих сил относительно точки M_2.

Решение. а) Найдем сначала равнодействующую трех данных сил:

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3=(7,-6,2)+(-6,2,-1)+(7,3,-1)=$$
$$=(7-6+7,\ -6+2+3,\ 2-1-1)=(8,-1,0).$$

Согласно определению работы и скалярного произведения получаем $A=\bar{F}\cdot\bar{s}$, где $\bar{s}=\overline{M_1M_2}=(6-3,-2-(-6),7-1)=(3,4,6)$ – вектор пути.

Тогда: $A=8\cdot3-1\cdot4+0\cdot6=24-4=20$ (единиц работы).

б) Момент силы $\bar{M}=\overline{M_2M_1}\times\bar{F}$; $\overline{M_2M_1}=(-3,-4,-6)$.

$$\bar{M}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & -4 & -6\\ 8 & -1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -6\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 8 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 8 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=\bar{i}\cdot(0-6)-\bar{j}\cdot(0+48)+\bar{k}\cdot(-3+32)=-6\bar{i}-48\bar{j}+29\bar{k}.$$

17. Дана пирамида: $A(0,1,2);\ B(1,2,2);\ C(-1,2,2);\ D(-1,3,1)$.

Найти: 1) площадь основания ABC; 2) объем пирамиды; 3) длину высоты, опущенной на основание ABC.

Решение.

1) Так как $\bar{a}=\overline{AB}=(1,1,0)$; $\bar{b}=\overline{AC}=(-1,1,0)$; $\bar{c}=\overline{AD}=(-1,2,1)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0\cdot\bar{i}-0\cdot\bar{j}+\bar{k}\cdot(1+1)=2\bar{k}.$$

Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{0^2+0^2+2^2}=2$ (кв. ед.).

2) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(1+1)=-2$.

$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$ (куб. ед.).

3) Так как $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$, следовательно $h=\frac{6V}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}=\frac{6\cdot\frac{1}{3}}{2}=2$ (ед.).

18. Вектор $\bar{d}=(-9, 2, 25)$ разложить по векторам $\bar{a}=(1,1,3)$; $\bar{b}=(2,-1,-6)$ и $\bar{c}=(5,3,-1)$.

Решение.

Необходимо найти такие числа x, y, z, что $x\cdot\bar{a}+y\cdot\bar{b}+z\cdot\bar{c}=\bar{d}$, т.е.

$$x\cdot(1,1,3)+y\cdot(2,-1,-6)+z\cdot(5,3,-1)=(-9,2,25).$$

Имея в виду, что при сложении векторов складываются их координаты и равные векторы имеют равные координаты, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}x+2y+5z=-9\\ x-y+3z=2\\ 3x-6y-z=25\end{cases},$$

из которой $x=2;\ y=-3;\ z=-1$. Значит, $\bar{d}=2\bar{a}-3\bar{b}-\bar{c}$.

19. Показать, что система векторов $\bar{a}_1=(2,1,3)$, $\bar{a}_2=(1,0,-1)$ и $\bar{a}_3=(0,0,1)$ линейно независима.

Решение. В данном случае равенство (1.9) имеет вид:

$$\lambda_1(2,1,3)+\lambda_2(1,0,-1)+\lambda_3(0,0,1)=0 \Leftrightarrow (2\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, 3\lambda_1+\lambda_3)=0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ 3\lambda_1+\lambda_3=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=0;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=0.$$

Это подтверждает независимость данных векторов.

20. Показать, что система векторов $\bar{a}_1=(2,1,3)$, $\bar{a}_2=(1,1,-1)$ и $\bar{a}_3=(1,-1,9)$ линейно зависима.

Решение. Равенство (1.9) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1-\lambda_2+9\lambda_3=0 \end{cases}.$$

Она имеет ненулевое решение, например $\lambda_1=2;\ \lambda_2=-3;\ \lambda_3=-1$. Таким образом, $2\bar{a}_1-3\bar{a}_2-\bar{a}_3=0 \Rightarrow \bar{a}_3=2\bar{a}_1-3\bar{a}_2$, т.е. вектор $\bar{a}_3$ линейно выражается через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Также $\bar{a}_1$ можно выразить через $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$, а $\bar{a}_2$ – через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение матричного выражения:

1) $-3A+4B,\quad A=\begin{pmatrix}-7 & 6 & -5 \\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & -1\end{pmatrix};$

2) $2A+4B,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 6 \\ 4 & -3 \\ -5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 7 & -2\end{pmatrix}.$

2. Найти произведение матриц $A \cdot B$:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$

3. Найти и сравнить произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix};$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

4. Найти произведение трех матриц:

1) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

5. Вычислить произведения $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix};$ 2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

6. Вычислить следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

7. Вычислить определитель четвертого порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

8. Найти обратную матрицу:

1) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -20 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Решить невырожденную систему линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 \qquad = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 8 \\ 13x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

11. Решить систему методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-x_4=1\\ 7x_1+3x_2-5x_3+5x_4=5\\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3\end{cases}\qquad 2)\begin{cases} -3x_1+x_2-2x_3+x_4=4\\ 3x_1-x_2-2x_3+3x_4=8\\ 7x_1-2x_2-5x_3+3x_4=20\end{cases}$$

12. Найти общее решение и одну из фундаментальных систем решений для следующей системы однородных уравнений:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0\\ 4x_1+5x_2+6x_3=0;\\ 7x_1+8x_2+9x_3=0\end{cases}\quad 2)\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+6x_4=0\\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=0\\ x_1+7x_2-10x_3+20x_4=0\end{cases}.$$

13.Даны векторы $\bar{a}=(2,1,3)$; $\bar{b}=(-2,3,4)$; $\bar{c}=(-2,-1,2)$. Найти векторы: 1) $\bar{d}=\bar{a}+2\bar{b}$; 2) $\bar{p}=2\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c}$; 3) 3) $\bar{q}=3\cdot(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}-4\bar{b}$.

14. Проверить, являются ли точки $A(-2,3,4)$; $B(2,-4,5)$; $C(-1,2,-3)$; $D(7,-12,-1)$ вершинами трапеции?

15. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$, если:

1) $\bar{c}=\bar{a}+3\bar{b}$; $\bar{d}=2\bar{a}-\bar{b}$ и $|\bar{a}|=1, |\bar{b}|=2, \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $\bar{c}=7\bar{a}-3\bar{b}$; $\bar{d}=2\bar{a}+6\bar{b}$ и $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4, \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{5\pi}{3}$.

16. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1,1,-2)$; $B(1,3,-1)$; $C(4,-1,-2)$. Найти 1) длины сторон треугольника; 2) внутренний угол при вершине A; 3) длину медианы, опущенной из вершины B; 4) координаты центра тяжести треугольника.

17. Даны векторы $\bar{a}=(-2,-1,2)$; $\bar{b}=(2,1,2)$; $\bar{c}=(3,3,1)$. Найти: 1) векторное произведение векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\vec{c}$; 2) смешанное произведение векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$; 3) вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах

$\bar{a}, \bar{b}$; 4) скалярное произведение векторов $2\bar{a}$ и $-\bar{b}$; 5) проекцию вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{a}+\bar{b}$.

18. Даны три силы $\overline{F_1}=(3,-4,\ 5); \overline{F_2}=(2,1,-4); \overline{F_3}=(1,6,2)$, приложенные к точке $M_1(4,2,-3)$. Вычислить: а) работу равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $M_2(7,4,1)$; б) величину момента равнодействующих этих сил относительно точки M_2.

19. Даны вершины треугольной пирамиды: $A(2,1,4)$; $B(4,3,8)$; $C(1,1,3)$; $D(0,2,-2)$. Найти: 1) площадь основания ABC; 2) объем пирамиды; 3) длину высоты, опущенной на основание ABC.

20. Вектор $\bar{d}=(-9,2,25)$ разложить по векторам $\bar{a}=(1,1,3)$; $\bar{b}=(2,-1,-6)$ и $\bar{c}=(5,3,-1)$.

21. Являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми?

1) $\bar{a}=(-1,2,2)$; $\bar{b}=(-2,3,-5)$; $\bar{c}=(-2,2,-6)$;
2) $\bar{a}=(2,2,0)$; $\bar{b}=(-3,-2,0)$; $\bar{c}=(1,2,2)$.

Ответы

1. 1) $\begin{pmatrix} 41 & -30 & 31 \\ 34 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 4 & -6 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$

2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & -10 \\ -22 & -54 & -8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -33 & 0 & 14 \\ 17 & -21 & 24 & 11 \end{pmatrix}$

3. 1) $A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$; 2) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

3) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -12 & 10 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix} -21 & -13 & 7 \\ 8 & 11 & -3 \\ -18 & -14 & 6 \end{pmatrix}$

4. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -28 & 27 \\ -15 & 50 & 73 \\ 59 & -41 & 14 \end{pmatrix}$

5. 1) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -10 & 31 \end{pmatrix}$ $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -5 \\ -3 & 25 & -5 & 10 \\ 4 & -5 & 10 & -11 \\ -5 & 10 & -11 & 13 \end{pmatrix}$

2) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -4 & 20 & 10 \\ -3 & 10 & 10 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

6. 1) –9 2) 5 3) 0 4) –98 5) 13 **7.** 1) 15 2) 94

8. 1) $\begin{pmatrix} -4 & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

9. 1) 3 2) 2 3) 4.

10. 1) $x_1 = 1;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2$

2) $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$

3) $x_1 = 10;\ x_2 = -9;\ x_3 = 8$

11. 1) система несовместна

2) $X = \begin{pmatrix} \alpha & -2+3\alpha & -2-\alpha & 2-2\alpha \end{pmatrix}^T$; $\alpha \in R$

12.

1) общее решение: $X = \begin{pmatrix} c & -2c & c \end{pmatrix}^T$; $c \in R$

фундаментальная система решений: $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$

2) общее решение: $X = \begin{pmatrix} -\dfrac{19c_1 + 52c_2}{3} & \dfrac{7c_1 - 10c_2}{3} & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T$; $c_1, c_2 \in R$;

	x_1	x_2	x_3	x_4
фундаментальная система решений:	$-19/3$	$7/3$	1	0
	$52/3$	$-10/3$	0	1

13. 1) $\overline{d}=(-6,9,12)$; 2) $\overline{p}=(-8,0,10)$; 3) $\overline{q}=(-6,5,10)$

15. 1) $\overline{c}\cdot\overline{d}=-5$; 2) $\overline{c}\cdot\overline{d}=54$

16. 1) $|AB|=\sqrt{6}$; $|AC|=2\sqrt{2}$; $|BC|=\sqrt{26}$ 2) $\angle A=135^\circ$

3) $|BM|=\sqrt{14}$; 4) $O\left(\frac{7}{3},0,\frac{1}{3}\right)$

17. 1) 4 2) 12 3) $h=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 4) 2 5) 1

18. 30 (Дж) 2) $\sqrt{86}$

19. 1) $\sqrt{3}$ 2) 10 3) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

20. $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$

21. 1) да 2) нет

Практикум 2. Аналитическая геометрия

Примеры решения задач

1. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(9,-5)$ и $B(3,5)$. Найти:

1) координаты направляющего $\overline{s}$ и нормального $\overline{n}$ векторов этой прямой.

2) угловой коэффициент k этой прямой;

Решение.

1) По условию $x_0=9$; $y_0=-5$; $x_1=3$; $y_1=5$. Подставляя эти значения в уравнения (1.13), получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-9}{3-9}=\frac{y+5}{5+5}\Leftrightarrow\frac{x-9}{-6}=\frac{y+5}{10}\ \text{или}\ \frac{x-9}{-3}=\frac{y+5}{5}.$$

Тогда имеем: $\bar{s} = (-3, 5)$.

Преобразуем канонические уравнения следующим образом:

$$5 \cdot (x-9) = -3 \cdot (y+5) \Leftrightarrow 5x - 45 + 3y + 15 = 0.$$

Общее уравнение прямой: $5x + 3y - 30 = 0$.

Координаты нормального вектора исходной прямой: $\bar{n} = (5, 3)$.

2) Из общего уравнения прямой выразим y:

$$y = \frac{50-5x}{3} = \frac{50}{3} - \frac{5}{3}x \Rightarrow k = -\frac{5}{3}.$$

2. Дано общее уравнение прямой $3x + 4y - 12 = 0$. Составить уравнение этой прямой:

1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) нормальное.

Решение.

1) Разрешив общее уравнение прямой относительно y, получим:

$$y = \frac{12-3x}{4} \text{ или } y = 3 - \frac{3}{4}x,$$

где $k = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{3}{4}; b = -\dfrac{C}{B} = \dfrac{12}{4} = 3.$

2) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и, разделив обе части на 12, получим:

$$\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1.$$

Перепишем последнее уравнение в виде:

$$\frac{x}{12/3} + \frac{y}{12/4} = 1 \text{ или } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Это уравнение прямой в отрезках. Отсюда следует, что данная прямая отсекает на оси Ox отрезок $|a| = 4$, а на оси Oy – отрезок $|b| = 3$ или, что тоже самое, прямая проходит через точки $A(4, 0)$ и $B(0, 3)$.

3) Найдем нормирующий множитель общего уравнения:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$$

(так как в общем уравнении $C = -12$, то перед корнем берем знак плюс). Умножив обе части общего уравнения на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{12}{5} = 0,$$

где $\cos\alpha = \frac{3}{5}; \sin\alpha = \frac{4}{5}; m = \frac{12}{5}$.

3. Дана прямая $l_1 : 2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой:

1) l_2, проходящей через точку $M(2,1)$, параллельно прямой l_1;

2) l_3, проходящей через точку $M(2,1)$, перпендикулярно прямой l_1.

Решение. 1) Найдем угловой коэффициент прямой l_1:

$$l_1 : 2x + 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3y = -2x - 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow k_{l_1} = -\frac{2}{3}.$$

Так как искомая прямая параллельна прямой l_1, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k_{l_1} = k_{l_2} = \frac{2}{3}$.

Теперь для нахождения уравнения прямой l_2 воспользуемся уравнением по заданному угловому коэффициенту и точке:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow l_2 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

2) Так как прямые l_1 и l_3 перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно (–1), то есть $k_{l_1} \cdot k_{l_2} = -1 \Rightarrow k_{l_2} = -\frac{1}{k_{l_1}} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Для нахождения уравнения прямой l_3 воспользуемся снова уравнением прямой по заданному угловому коэффициенту и точке:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2)\Rightarrow y=\frac{3}{3}x-3+1\Rightarrow l_3: y=\frac{3}{2}x-2.$$

4. Найти расстояние d от точки $A(2,-1)$ до прямой $4x+3y+10=0$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8) вычисления расстояния от точки до прямой.

В нашем случае $A=4, B=3, C=10, x_0=2, y_0=-1$. Тогда искомое расстояние будет равно:

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot(-1)+10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|8-3+10|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3.$$

5. Даны уравнения двух прямых: $x-3y+5=0$; $2x-y-15=0$.

Найти: 1) косинус угла между ними; 2) точку их пересечения.

Решение.

1) Найдем косинус угла между прямыми по формуле (2.6):

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2-3\cdot(-1)}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

2) Чтобы найти точку пересечения прямых, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x-3y+5=0\\2x-y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y-5\\2\cdot(3y-5)-y-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y-5\\5y=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\y=5\end{cases}.$$

6. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-6x+8y+21=0$.

Решение. В данном уравнении выделим полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие числа. Получаем:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)-9-16+21=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=4.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением окружности, находим: $x_0=3$; $y_0=4$; $R=2$.

7. Определить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллип-

са, заданного уравнением $9x^2+25y^2=225$.

Решение. Разделив на 225 обе части уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.19), находим:

$$a^2=25;\ b^2=9;\ c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4;\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}.$$

Таким образом, имеем: $a=5;\ b=3;\ F_1(-4;0);\ F_2(4;\,0);\ c=\dfrac{4}{5}$.

8. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот гиперболы $144x^2-25y^2=3600$.

Решение. Приведем данное уравнение к каноническому виду, для чего необходимо разделить обе его части на 3600. Выполняя деление получим:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.20), заключаем, что $a^2=25;\ b^2=144$. Таким образом, $a=5$ есть действительная полуось, $b=12$ – мнимая полуось. Далее:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13 \Rightarrow F_1(-13{,}0);\ F_2(13{,}0);\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{5}.$$

Подставляя значения a и b в формулу $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, получим уравнения асимптот: $y=\pm\dfrac{12}{5}x$.

Далее находим уравнения директрис: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{5}{13/5}=\pm\dfrac{25}{13}$.

9. Найти координаты вершины и фокуса, уравнения оси и директрисы параболы $y^2+4y-24x+76=0$.

Решение. Преобразуем уравнение параболы:

$$y^2+4y=24x-76;\ y^2+2\cdot 2y+2^2=24x-76+2^2;\ y^2+2\cdot 2y+4=24x-72.$$

Отсюда $(y+2)^2=24(x-3)$ или $Y^2=24X$, где $Y=y+2;\ X=x-3$.

Следовательно, вершина параболы лежит в точке $O_1(-2,3)$; параметр $p=12$. Уравнение оси параболы $y=3$.

Расстояние от вершины параболы до фокуса равно $p/2=12/2=6$. Абсцисса фокуса равна $3+p/2=3+6=9$. Фокус лежит правее вершины параболы, поскольку ветви параболы направлены вправо; ордината фокуса равна ординате вершины; так как ось параболы параллельна оси Ox, тогда $F(9,-2)$.

Директриса параболы проходит на расстоянии $p/2$ от ее вершины перпендикулярно оси параболы. Так как ветви параболы направлены вправо, директриса проходит левее вершины. Она также проходит и левее начала координат, так как расстояние от вершины до оси Oy равна 3, а от вершины до директрисы равно 6. Абсцисса директрисы равна разности $p/2-3=6-3=3$, взятая со знаком минус, поэтому уравнение директрисы $x=-4$.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через $K(1,0,-2)$, перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$, если $M_1(2,-1,3)$; $M_2(0,-3,2)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна к вектору $\overline{M_1M_2}$, то этот вектор можно принять за нормальный вектор $\overline{N}=(A,B,C)$ плоскости.

Найдем координаты нормального вектора:

$$\overline{N}=\overline{M_1M_2}=(0-2,-3-(-1),2-3)=(-2,-2,-1).$$

Напишем уравнение плоскости в виде (1.21):

$$-2(x-1)-2(y-0)-(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z=0.$$

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,-1,1)$; $M_2(3,5,1)$; $M_3(1,-3,-1)$. Чему равны длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат?

Решение. Воспользуемся формулой (1.23):

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 5+1 & 1-1 \\ 1 & -3+1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим последний определитель по первой строке:

$$x \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-12x + 6(y+1) - 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0$.

Приведем общее уравнение плоскости $2x - y + 2z - 3 = 0$ к уравнению плоскости в отрезках. Перенесем –3 в правую часть: $2x - y + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $2x - y + 2z = 3$.

Разделим обе части полученного равенства на 3:

$$2x - y + 2z = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 1.$$

Отправляем коэффициенты при переменных x, y и z в знаменатели:

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3/2} = 1 \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}; |b| = 3; |c| = \frac{3}{2}.$$

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,3)$ и параллельной векторам $\bar{a} = (3, 0, -1)$ и $\bar{b} = (-3, 2, 2)$. Привести уравнение плоскости к нормальному виду. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость.

Решение. В качестве нормального вектора $\bar{N} = (A, B, C)$ искомой плоскости можно взять векторное произведение $\bar{a}$ на $\bar{b}$:

$$\bar{N} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (0+2) -$$
$$- \bar{j} \cdot (6-3) + \bar{k} \cdot (6-0) = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Используя теперь уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ при

$A = 2$; $B = -3$; $C = 6$; $x_0 = 2$; $y_0 = -1$; $z_0 = 3$, получим:

Найдем нормированный множитель μ, знак которого выбираем противоположным знаку свободного члена D общего уравнения. Так как $D = -25 < 0$, то:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}.$$

Умножив все члены данного уравнения на μ, получим нормальное уравнение: $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{25}{7} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{7}$; $\cos\beta = \frac{-3}{7}$; $\cos\gamma = \frac{6}{7}$; $p = \frac{25}{7}$.

13. Найти расстояние:

а) от точки $A(2, 3, -2)$ до плоскости $6x - 7y - 6z - 124 = 0$; б) между параллельными плоскостями $x + 4y - z + 8 = 0$ и $2x + 8y - 2z + 12 = 0$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулой (1.25), получим:

$$d = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 124|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-6)^2}} = \frac{|12 - 21 + 12 - 124|}{\sqrt{36 + 49 + 36}} = \frac{121}{\sqrt{121}} = \sqrt{121} = 11\,(\text{ед.})$$

б) Для нахождения искомого расстояния нужно взять точку на одной из плоскостей и определить расстояние от этой точки до другой плоскости по формуле (1.25). Полагая в уравнении второй из заданных плоскостей $x = 1$, $z = 1$, имеем $8y + 16 = 0 \Rightarrow y = -2$. Получаем точку $M(1, -2, 1)$.

Теперь находим расстояние от данной точки M до плоскости $x + 4y - z + 12 = 0$:

$$d = \frac{|1 - 8 + 1 + 12|}{\sqrt{1 + 16 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}\ (\text{ед.})$$

14. Составить параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $A(5, -1, 4)$ и параллельной вектору $\bar{s} = (6, -4, 1)$; 2) проходящей через точки $M(-2, -1, -3)$; $N(0, 2, 1)$.

Решение.

1) Воспользуемся формулами (1.28). Так как в данном случае $x_0 = 5$;

$y_0 = -1$; $z_0 = 4$; $m = 6; n = -4; p = 1$, то параметрические уравнения прямой имеют вид: $x = 5 + 6t;\ y = -1 - 4t;\ z = 4 + t$.

2) По формулам (1.26) получаем:

$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y+1}{2+1} = \frac{z+3}{1+3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{4}.$$

Обозначая буквой t равные отношения и выражая x, y, z через t получим параметрические уравнения прямой: $x = -2 + 2t;\ y = -1 + 3t;\ z = -3 + 4t$.

15. Найти угол между двумя прямыми:

$$l_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-7}{1}; \quad l_2 : \frac{x-4}{-11} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-6}{7}.$$

Решение. Первая прямая имеет направляющий вектор $\bar{s}_1 = (4, -10, 1)$, вторая $\bar{s}_2 = (-11, 8, 7)$. Получаем:

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot(-11) - 10\cdot 8 + 1\cdot 7}{\sqrt{16+100+1}\cdot\sqrt{121+64+49}} = \frac{-44-80+7}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \frac{-117}{\sqrt{2}\cdot 117} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 135^\circ$.

16. Найти расстояние между прямыми $l_1 : \dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{4}$ и $l_2 : \dfrac{x}{8} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z-4}{-8}$.

Решение. Первая прямая проходит через точку $M_1(5, 2, 1)$ и имеет направляющий вектор $\bar{s}_1 = (-4, 7, 4)$; вторая проходит через $M_2(0, 3, 4)$ и имеет направляющий вектор $\bar{s}_2 = (8, -14, -8)$. Так как $\bar{s}_1 = -\dfrac{1}{2}\cdot\bar{s}_2$, то прямые параллельны. Найдем расстояние между параллельными прямыми.

Поскольку $\overline{M_1M_2} = (0-5, 3-2, 4-1) = (-5, 1, 3)$, то:

$$\overline{M_1M_2} \times \bar{s}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= -17\bar{i} + 8\bar{j} - 31\bar{k}$.

Тогда

$$d = \frac{\sqrt{17^2 + 8^2 + 31^2}}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{1314}}{\sqrt{81}} = \frac{3\sqrt{146}}{9} = \frac{\sqrt{146}}{3}.$$

17. Найти точку пересечения прямой $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ с плоскостью $P: x + 2y + z - 4 = 0$, а также синус угла между l и P.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 5 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости P, получим

$$2t + 1 + 2 \cdot (t - 5) + t + 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t + 1 + 2t - 10 + t - 1 = 0,$$

или $5t - 10 = 0 \Rightarrow t = 2$, тогда $x = 5; y = -3; z = 5$.

Точка $M(5, -3, 5)$ является точкой пересечения прямой l с плоскостью P.

Для нахождения $\sin\varphi$ применим формулу (1.30). Так как $m = 2, n = 1, p = 1;\ A = 1, B = 2, C = 1$, то

$$\sin\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{5}{6}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2, 1)$ и $B(-4, -1)$. Найти координаты направляющего $\bar{s}$ и нормального $\bar{n}$ векторов этой прямой. Найти угловой коэффициент k этой прямой.

2. Дано уравнение прямой $2x - 5y + 20 = 0$. Составить уравнения этой прямой:

1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) нормальное.

3. Составить уравнения прямой:

1) проходящей через точку $A(-3,2)$ параллельно прямой $5x-3y+21=0$;

2) проходящей через точку $M(1,-4)$ параллельно прямой, проходящей через точки $A(-3,1)$ и $B(3,2)$.

3) проходящей через точку пересечения прямых $x+2y+4=0$ и $3x-y-9=0$ перпендикулярно прямой $x+y-7=0$.

4. Найти расстояние:

1) от точки $M(-2,4)$ до прямой $4x-3y-5=0$;

2) между параллельными прямыми $3x+4y-15=0$ и $6x+8y+5=0$.

5. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2+y^2-4x+2y=0$; 2) $3x^2+3y^2+6x-4y-1=0$.

6. Дано уравнение кривой второго порядка. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

1) $16x^2+25y^2=400$ 2) $20x^2-5y^2=100$

7. Установить, что каждое из следующих уравнений образует параболу, и найти координаты ее вершины A, величину параметра p и уравнение директрисы:

1) $y^2=4x-8$ 2) $y^2=4-6x$ 3) $x^2=6y+2$

8. Составить уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $B(-3,2,4)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC}$, если $A(-8,0,7)$; $C(-1,4,5)$. Чему равны длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат?

2) проходящей через точки $M_1(3,-1,2)$; $M_2(4,-1,-1)$; $M_3(2,0,2)$. Привести уравнение плоскости к нормальному виду. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость.

3) проходящей через точку $M(2,-1,3)$ параллельно векторам $\overline{a}_1=(1,-1,2)$ и $\overline{a}_2=(2,1,-3)$;

4) проходящей через точки $M_1(2,-15,1)$; $M_2(3,1,2)$ перпендикулярно плоскости $3x-y-4z=0$.

9. Найти один из двугранных углов между плоскостями:

1) $P_1: 5x-4y+3z+6=0$;
$P_2: 2x+4y+2z-9=0$.

2) $P_1: 7x+3y-9z-11=0$;
$P_2: 3x+4y+2z-3=0$

10. Вычислить расстояние:

1) от точки $A(8,-1,2)$ до плоскости $P: x-2y-2z+6=0$;

2) между параллельными плоскостями $P_1: 2x+y-2z+33=0$ и $P_2: 2x+y-2z-22=0$.

11. Составить канонические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $A(2,0,3)$ параллельно вектору $\bar{s}=(3,-2,-2)$;

2) проходящей через точки $M(2,4,6)$ и $P(8,-6,2)$.

12. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1,2,3)$; $B(0,-1,2)$; $C(3,-4,5)$. Составить параметрические уравнения ее медианы, проведенной из вершины B.

13. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(2,-1,3)$ 1) параллельно; 2) перпендикулярно прямой, проходящей через точки $M(5,2,-7)$ и $N(-7,\ 11,5)$.

14. Найти угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

15. Найти расстояние:

1) от точки M_0 до прямой $\begin{cases}2x-y+z=1\\ x+y+z=3\end{cases}$;

2) между параллельными прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

16. Найти величину острого угла между прямой $\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x+y-z-3=0\end{cases}$ и

плоскостью $2x+y+2z-5=0$.

17. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,1,-2)$ и точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ и плоскости $2x-3y-5z-3=0$.

Ответы.

1. $\bar{s}=(3,1);\ \bar{n}=(1,-3);\ k=1/3$

2. 1) $y=0{,}4x+4$; 2) $\frac{x}{-10}+\frac{y}{4}=1$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{29}}+\frac{5y}{\sqrt{29}}-\frac{20}{\sqrt{29}}=0$

3. 1) $5x-3y+21=0$; 2) $x-6y-25=0$; 3) $x-y-5=0$.

4. 1) $d=5$; 2) $d=3{,}5$ **5.** 1) $O_1(2,-1);\ R=\sqrt{5}$; 2) $O_1\left(-1,\frac{2}{3}\right);\ R=\frac{4}{3}$

6. 1) $a=5;\ b=4;\ \varepsilon=0{,}6;\ F_1(-3,0);\ F_2(3,0);\ x=\pm\frac{25}{3}$;

2) $a=\sqrt{5};\ b=2\sqrt{5};\ \varepsilon=\sqrt{5};\ F_1(-5,0);\ F_2(5,0);\ x=\pm1;\ y=\pm2x.$

7. 1) $A(2{,}0);\ p=2;\ x-1=0$; 2) $A\left(\frac{2}{3},0\right);\ p=3;\ 6x-13=0$;

3) $A\left(0,-\frac{1}{3}\right);\ p=3;\ 6y+11=0$.

8. 1) $7x+4y-2z+21=0;\ |a|=3;\ |b|=5{,}25;\ |c|=10{,}5$;

2) $3x+3y+z-8=0;\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{19}};\ \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{19}};\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{19}};\ p=\frac{8}{\sqrt{19}}$;

3) $x+7y+3z-4=0$ 4) $9x-y+7z-40=0$.

9. 1) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 2) $\varphi=\arccos\frac{15}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{129}}$.

10. 1) 4; 2) $\frac{55}{3}$

11. 1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{-2}$; 2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}$.

12. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3y \\ z=3+t \end{cases}$.

13. 1) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$;   2) $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}$.

14. $\varphi=\frac{\pi}{3}$ **15.** 1) $\sqrt{6}$ 2) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$

16. $\varphi=\frac{\pi}{4}$ **17.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$

Практикум 3. Функции и пределы

1. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

Решение.

1) Здесь: $(2n+1)^2-(n+1)^2=4n^2+4n+1-n^2-n-1=3n^2+2n$.

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+n+1}$.

Высшей степенью с основанием n и в числителе, и в знаменателе является n^2, его выносим за скобки и сокращаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2++1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0}{1+0+0}=3.$$

2) Факториал натурального числа n представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n$.

Поэтому: $(n+2)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+1)(n+2)=(n+2)(n+1)!$;

$$(n+3)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)(n+2)(n+3) = (n+3)(n+2)(n+1)!.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0.$$

3) Применим формулу суммы арифметической прогрессии:

$$1+2+\ldots+n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+1)-n\cdot(n+2)}{2(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-2n}{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+4/n} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

2. Вычислить

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2-x+6\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$

Решение.

1) Применяя теоремы о пределах, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(2x^2-x+6\right) = 2\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}6 = 2\cdot 3^2-3+6 = 21.$$

2) Пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю. Пользуясь теоремой о пределе частного, получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^2-5x+2\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-6x+4\right)}=\frac{4\cdot 2^2-5\cdot 2+2}{3\cdot 2^2-6\cdot 2+4}=\frac{8}{4}=2.$$

3. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+5x-5}{2x^3-2x^2-x+1}$

Решение.

1) При $x=-1$ и числитель, и знаменатель равны нулю:

$$(-1)^2-4\cdot(-1)-5=1+4-5=0;\quad (-1)^2+3\cdot(-1)+2=1-3+2=0.$$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители, а потом сократим на их общий множитель:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-5}{x+2}=\frac{-6}{1}=-6.$$

2) Здесь также имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную формулу разложения квадратного трехчлена: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Определим корни многочленов:

$$D=b^2-4ac;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

$$3x^2-7x+2=0,\quad D=25,\quad x_1=1/3,\quad x_2=2.$$

$$4x^2-5x-6=0,\quad D=121,\quad x_1=-3/4,\quad x_2=2.$$

Тогда:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x+2}{4x^2-5x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-1/3)(x-2)}{4(x+3/4)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{4x+3}=\frac{5}{11}.$$

3) Разложим многочлены третей степени, стоящие в числителе и знаменателе, на множители с помощью группировки:

$$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5);$$
$$2x^3-2x^2-x+1=2x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(2x^2-1).$$

Получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+5x-5}{2x^3-2x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+5)}{(x-1)(2x^2-1)}-\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5}{2x^2-1}=\frac{1+5}{2-1}=6.$$

4. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$

Решение.

1) В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия применим стандартный прием. Вынесем из числителя и знаменателя x в старшей степени, а затем воспользуемся тем, что функции $c/x, c/x^2$ и c/x^3 бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+3x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}-1\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}-1}{2-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0+0-1}{2-0+0}=\frac{-1}{2}.$$

2) Выражение в скобках представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим функцию под знаком предела на выражение, сопряженное разности в скобках:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

в) Здесь также имеем неопределенность вида $\infty-\infty$ при $x\to 3$. Производим вычитание этих дробей и сокращение на множитель $x-3\neq 0$, переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9-27}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3x+9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}.$$

5. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$

Решение.

1) Подставляя значение $x=1$ в числитель и знаменатель, убеждаемся, что имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия избавимся от иррациональности в числителе, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

2) Умножаем числитель и знаменатель на произведение $\left(\sqrt{x+7}+3\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)$. Получим:

$$\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{\left(1-\sqrt{3-x}\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{(x+7-9)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(1-3+x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}.$$

Тогда:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1+1}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

3) Введем новую переменную по формуле: $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4;\ t\to\sqrt[4]{81}=3.$

Получаем: $$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}=\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{9-t^2}=\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{(3-t)(3+t)}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{3+t}=\frac{1}{6}.$$

6. Найти пределы, используя первый замечательный предел

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 4x}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Решение.

1) Преобразуем функцию, чтобы можно было применить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7;$$

2) Данное выражение содержит неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем его к виду, содержащему первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\left(1-\cos^2 5x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\cdot\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}=25\lim_{x\to 0}\cos 5x\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=25\cdot\cos 0\cdot 1^2=25$$

3) Воспользуемся формулой $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x-\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{8x-4x}{2}\cos\frac{8x+4x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 6x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}2\cos 6x=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}2\cos 6x=2\cdot 2=4.$$

4) При указанном изменении аргумента функция представляет собой произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$).

Полагая $1-x=t$, получим:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi\cdot t}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos\frac{\pi\cdot t}{2}}{\sin\frac{\pi\cdot t}{2}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi\cdot t}{2}}\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi\cdot t}{2}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi\cdot t}{2}}{\sin\frac{\pi\cdot t}{2}}\cdot\cos 0=\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

6. Найти пределы, используя второй замечательный предел

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{x+2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

Решение.

1) Приведем данный предел к отношению двух вторых замечательных, разделив числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+3/x}{1-2/x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+3/x\right)^{x}}{\left(1-2/x\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+3/x\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-2/x\right)^{x}}=\frac{e^{3}}{e^{-2}}=e^{5}.$$

2) Имеем неопределенность 1^{∞}. Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и бесконечно малой функции, что позволит воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-5-3x-2}{3x+2}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{x}.$$

Сделаем следующую замену: $3x+2=y;\ x=\dfrac{y-2}{3};\ x\to\infty\Rightarrow y\to\infty$. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{3x+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-7}{7}\right)^{\frac{y-2}{3}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-7}{y}\right)^{\frac{y}{3}}\cdot\left(1+\frac{-7}{y}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-7}{y}\right)^{\frac{y}{3}}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-7}{y}\right)^{-\frac{2}{3}} = e^{-7/3}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e^7}}.$$

3) Полагая $-2x=\alpha$, найдем $\alpha\to 0$, когда $x\to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{-2} = e^{-2}.$$

7. Найти пределы, используя свойства эквивалентных бесконечно малых функций и таблицу эквивалентностей:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{x^2}-1\right)}{2\sin x-\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg} 6x}{(\arcsin 4x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(x^2-5x+7\right)}{x-3}$

Решение.

1) Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе отношения эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \left|\begin{matrix} 3x\to 0 \Rightarrow \sin 3x \sim 3x \\ 4x\to 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 4x \sim 4x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

2) Воспользуемся таблицей эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^{x^2}-1\right)}{2\sin x-\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^{x^2}-1\right)}{2\sin x(1-\cos x)} = \left|\begin{matrix} e^{x^2}-1\sim x^2 \\ \sin x\sim x;\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2}{2x\cdot\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} = 1.$$

3) Принимая во внимание, что при $\alpha \to 0$ $\arcsin\alpha \sim \alpha$ и $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \operatorname{arctg}6x}{(\arcsin 4x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{(4x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{16x^2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

4) При $x\to 3$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так как $x^2-5x+7\to 1$ и $\ln\left(x^2-5x+7\right)\to 0$.

Преобразуем выражение x^2-5x+7 следующим образом:

$$x^2-5x+7=1+\left(x^2-5x+6\right)=1+\alpha \Rightarrow \alpha\to 0 \text{ при } x\to 3.$$

Так как $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, то $\ln\left(x^2-5x+7\right)\sim x^2-5x+6$. Тогда:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-5x+7\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=3-2=1.$$

8. Исследовать данную функцию на непрерывность:

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;1)$; $(-1;1)$ и $(1;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=-1$ и $x_2=1$.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x_1=-1$. Для этого вычислим односторонние пределы и значение функции в этой точке:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+4)=-1+4=3.$$
$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2+2\right)=(-1)^2+2=3;$$
$$f(-1)=\left(x^2+2\right)\Big|_{x=-1}=(-1)^2+2=3.$$

Так $f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)$, то точка $x_1=-1$ – точка устранимого разрыва.

Для точки $x_2 = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \left(x^2 + 2\right) = 1^2 + 2 = 3.$$
$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} 2x = 2 \cdot 1 = 2;$$
$$f(1) = 2x\big|_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Получили, что $f(1-0) \neq f(1+0)$, следовательно, функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x_2 = 1$. Точка $x_2 = 1$ – точка разрыва первого рода, причем скачок $h = f(1+0) - f(1-0) = 2 - 3 = -1$.

График функции изображен на рис. 2.7.

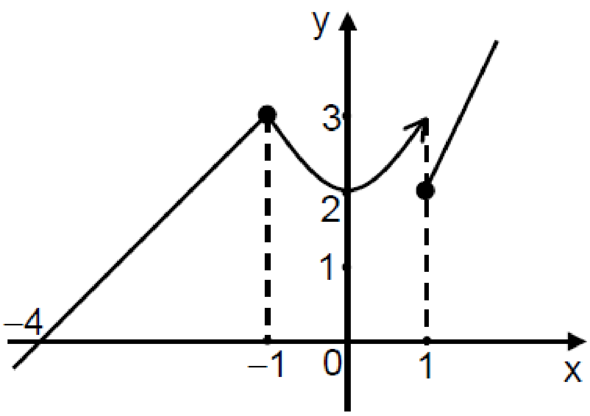


Рис. 2.7

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^2}$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n! + (n+1)!}{(3n+1) \cdot n!}$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right)$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{1 + 4 + 9 + \ldots + n^2}$

2. Используя свойства предела функции, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2+3x-4\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x^3-3x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-8x^2-11x+10}{x^3+8}$ 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 7}\left(\dfrac{5}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x-7}\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$

3. Найти пределы функций, используя первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{5x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}4x}{\cos x-\cos^3 x}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sin(x+2)}$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{ctg}2x\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)$

4. Найти пределы функций, используя второй замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{2/x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x-3}\right)^{2x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(2x+3)-\ln 2x\right)$

5. Найти пределы, используя свойства эквивалентных бесконечно малых и таблицу эквивалентных бесконечно малых:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-4x}-e^{2x}}{\operatorname{arctg}3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2\left(\operatorname{tg}^2 2x+1-\cos 2x\right)}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(3x^2+5x-21\right)}{x^2-6x+8}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\left(\sqrt{1+x-3x}-1\right)}{8^{\operatorname{tg}x^2}-1}$

6. Исследовать на непрерывность и построить график функции. Найти скачок функции в точках разрыва.

1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ 1-x, & x\in(0,1]\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$

Ответы

1.	1) $-\dfrac{8}{9}$	2) $\dfrac{1}{3}$	3) $\dfrac{1}{2}$	4) 0	
2.	1) 22	2) 3	3) 2	4) $\dfrac{7}{4}$	5) $\dfrac{1}{4}$
	6) 2	7) $-\dfrac{1}{12}$	8) $-\dfrac{1}{5}$	9) ∞	
3.	1) 0,2	2) 4	3) – 4	4) 2	
4.	1) e^2	2) $e^{13/2}$	3) e^{-6}	4) $e^{2/3}$	
5.	1) –2	2) 0,5	3) –8,5	4) $\dfrac{5}{6\ln 2}$	

6. 1) $x=-3$ – точка устранимого разрыва
2) $x=0$ – разрыв первого рода со скачком, равным 1; $x=1$ – разрыв второго рода

Практикум 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y=x^4+\sqrt[3]{x^2}-x\cdot\sqrt[4]{x}$ 2) $y=\left(x^3+1\right)\cdot\sqrt{x}$

3) $y=\operatorname{tg}x\cdot\arcsin x\cdot e^x$ 4) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

Решение.

1) Воспользуемся правилом 1) и таблицей основных производных, для чего преобразуем функцию к виду $y=x^4+x^{2/3}-x^{5/4}$. Тогда, используя

формулу $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, получим:

$$y' = \left(x^4 + \sqrt[3]{x^2} - x \cdot \sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^4 + x^{2/3} - x^{5/4}\right)' = (x^4)' + (x^{2/3})' - (x^{5/4})' =$$

$$= 4 \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^{2/3-1} - \frac{5}{4} \cdot x^{5/4-1} = 4x^3 - \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{4}x^{1/4} = x^3 - \frac{3}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}\,.$$

2) Имеем производную произведения функций, содержащихся в формулах 1), 3) и 16):

$$y' = \left((x^3+1) \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(x^3+1\right)' \cdot \sqrt{x} + \left(x^3+1\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = 3x^2\sqrt{x} + \left(x^3+1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{6x^3 + x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3+1}{2\sqrt{x}}\,.$$

3) $\left(\operatorname{tg} x \cdot \arcsin x \cdot e^x\right)' =$

$$= (\operatorname{tg} x)' \cdot \arcsin x \cdot e^x + \operatorname{tg} x \cdot (\arcsin x)' \cdot e^x + \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x \cdot (e^x)' =$$

$$= \frac{\arcsin x \cdot e^x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x \cdot e^x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x \cdot e^x\,.$$

4) Применяем правило 4), формулы 8) и 9):

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' =$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)' \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x) \cdot (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

2. Найти y', если $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

Решение. Применяем правило 4), частный случай, и формулу 15):

$$y' = \frac{-(\operatorname{arcctg} x)'}{\operatorname{arcctg}^2 x} = -\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arcctg}^2 x} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\cdot \operatorname{arcctg}^2 x}.$$

3. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производные следующих функций:

1) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ 2) $y = \ln(\cos 3x)$ 3) $y = \dfrac{\sin^2 2x}{1+e^{4x}}$

Решение.

1) Введем обозначение $u = \sqrt{x}$. Тогда $y = \operatorname{arctg} u$, и, применяя формулу производной сложной функции, получаем:

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

2) Функция $\ln(\cos 3x)$ – композиция функций $u = \cos 3x$ и $f(u) = \ln(\cos u)$, откуда $y'(x) = (\ln u)'_x = \dfrac{1}{u}\cdot u' = \dfrac{1}{\cos 3x}\cdot(\cos 3x)'$.

Функция $\cos 3x$, в свою очередь, является композицией функций $v = 3x$ и $g(v) = \cos v$, поэтому для нахождения ее производной еще раз применим правило дифференцирования сложной функции:

$$(\cos 3x)' = (\cos v)' = -\sin v\cdot v' = -\sin 3x\cdot(3x)' = -3\sin 3x.$$

Отсюда окончательно: $y' = \dfrac{1}{\cos 3x}\cdot(\cos 3x)' = -\dfrac{3\sin 3x}{\cos 3x} = -3\operatorname{tg} 3x$.

3) Дифференцируем частное двух сложных функций:

$$y' = \frac{(\sin^2 2x)'\cdot(1+e^{4x}) - \sin^2 2x\cdot(1+e^{4x})'}{(1+e^{4x})^2} =$$

$$=\frac{2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'-\sin^2 2x\cdot(e^{4x})'}{(1+e^{4x})^2}=$$

$$=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'-\sin^2 2x\cdot e^{4x}\cdot(4x)'}{(1+e^{4x})^2}=\frac{2\sin 4x-4\sin^2 2x\cdot e^{4x}}{(1+e^{4x})^2}.$$

4. Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

1) $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ 2) $y=\dfrac{\left(x^3-2\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(2x+5)^4}$

Решение.

1) Прологарифмируем обе части равенства $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$, т.е.

$$\ln y=\ln(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\Leftrightarrow \ln y=\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x).$$

Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения:

$$(\ln y)'=\left(\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\right)',\ \text{т.е.}\ \frac{y'}{y}=(\cos x)'\ln(\operatorname{tg}x)+\cos x\cdot(\ln(\operatorname{tg}x))'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\cos x\cdot\frac{(\operatorname{tg}x)'}{\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\frac{\cos x}{\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}.$$

Отсюда $y'=y\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\dfrac{1}{\sin x}\right)$ или, так как, что $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$:

$$y'=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\frac{1}{\sin x}\right).$$

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, поэтому применим логарифмическую производную.

Берем логарифм обеих частей равенства:

$$\ln y=\ln\frac{\left(x^3-2\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(2x+5)^4}\Leftrightarrow\ln y=\ln\left(x^3-2\right)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-4\ln(2x+5)$$

Дифференцируем обе части полученного равенства, причем левую часть $\ln y(x)$ как сложную функцию:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{(x^3-2)'}{x^3-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)'}{x-1} - \frac{4\cdot(2x+5)'}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{8}{2x+5}.$$

Отсюда:

$$y' = y\cdot\left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{8}{2x+5}\right) =$$

$$= \frac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{(2x+5)^4}\cdot\left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{8}{2x+5}\right).$$

5. Найти производную y'_x следующих функций:

1) $3x^3 + 4x^2y + 5y^2 = 1$ 2) $\begin{cases} x = t - \operatorname{arctg} t \\ y = \dfrac{t^3}{3} + t \end{cases}$

Решение.

1) Так как исходная функция – неявно заданная, то дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y – есть функция от x, получим $6x^2 + 8xy + 4x^2\cdot y' + 10y\cdot y' = 0$. Отсюда находим y':

$$y'\cdot\left(4x^2 + 10y\right) = -\left(6x^2 + 8xy\right) \Rightarrow y' = -\frac{2x^2+5y}{3x^2+4xy}.$$

2) Производная параметрически заданной функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, откуда, в нашем случае:

$$y'(x) = \frac{\left(t^3\!/3 + 1\right)'}{(t - \operatorname{arctg} t)'} = \frac{3\cdot\frac{t^2}{3}}{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \frac{t^2}{\frac{1+t^2-1}{1+t^2}} = \frac{t^2\left(1+t^2\right)}{t^2} = 1 + t^2.$$

6. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x+4}$ в точке $x_0=5$. Найти угол наклона этой касательной к оси Ox.

Решение. Уравнение касательной имеет вид (см. формулу 2.6):

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

В данном случае:

$$f'(x)=(\sqrt{x+4})'=\frac{1}{2\sqrt{x+4}};\quad f'(x_0)=f'(5)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{5+4}}=\frac{1}{6};$$
$$f(x_0)=f(5)=\sqrt{5+4}=3.$$

Подставив полученные значения в уравнение касательной, получим:

$$y-3=\frac{1}{6}(x-5)\Leftrightarrow 6y-18=x-5,\text{ т. е } x-6y+13=0.$$

Уравнение нормали (2.7) имеет вид $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. Значит, в данном случае уравнение нормали $y-3=-6(x-5)$, т. е $6x+y-33=0$.

Определим угол наклона касательной: $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)=\frac{1}{6}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{6}$.

7. Найти:

1) $f'''(x)$, где $f(x)=x\cdot\ln x$; 2) y''_{xx}, если $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=\cos t\end{cases}$

Решение.

1) Находим первую производную:

$$f'(x)=(x\cdot\ln x)'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

Отсюда получаем вторую производную $f''(x)=(\ln x+1)'=(\ln x)'+1'=\frac{1}{x}$.

А затем и искомую третью: $f'''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

2) Имеем:

$x_t' = (2\sin^2 t)' = 2\cdot 2\sin t\cdot(\sin t)' = 4\sin t\cdot\cos t$; $y_t' = (\cos t)' = -\sin t$.

Получаем:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{4\sin t\cdot\cos t}{-\sin t} = -4\cos t.\ (y_x')_t' = (-4\cos t)' = 4\sin t.$$

Тогда $y_{xx}'' = \dfrac{(y_x')_t'}{x_t'} = \dfrac{4\sin t}{-\sin t} = -4$.

8. Найти dy и dy^2, если $y = \ln\left(\sin^2 3x\right)$.

Решение. Поскольку:

$$dy = y'dx = (\ln(\sin^2 3x))'dx = \frac{(\sin^2 3x)'}{\sin^2 3x}dx = \frac{2\sin 3x(\sin 3x)'}{\sin^2 3x}dx =$$
$$= \frac{2\sin 3x(\cos 3x)(3x)'}{\sin^2 3x}dx = \frac{6\cos 3x}{\sin 3x}dx = 6\operatorname{ctg}3x dx,$$
то

$$d^2y = d\left(dy\right) = d\left(6\operatorname{ctg}3x dx\right) = (6\operatorname{ctg}3x)'(dx)^2 = -\frac{6\cdot(3x)'}{\sin^2 3x}dx^2 = -\frac{18}{\sin^2 3x}dx.$$

9. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\ln\left(x^2-3\right)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln x}$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\left(4-x\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

Решение.

1) Подстановка в заданную функцию значения $x = 2$ приводит к неопределенности $\frac{0}{0}$. Поэтому находим производную каждой функции и получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\ln\left(x^2-3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3x+2\right)'}{\left(\ln(x^2-3)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x/\left(x^2-3\right)}=\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2/(4-3)}=\frac{1}{4}.$$

2) Поскольку $\ln\sin 2x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x\to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x/\sin 2x}{1/x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\cos 0\cdot 1=1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

3) При $x\to 4$ $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}\to\infty$, а $4-x\to 0$; таким образом имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Можно предварительно преобразовать выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 4}(4-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)\cdot\sin\frac{\pi x}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}}=\lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi x}{4}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)'}{\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

4) Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x\cdot(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+x\cdot e^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

10. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$ 3) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$

Решение.

1) В этом случае имеем неопределенность вида 1^{∞}. Неопределенность этого вида, также как и неопределенности вида 0^0 и ∞^0, можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Пусть $y=(\cos 2x)^{3/x^2}$. Прологарифмируем:

$$\ln y=\ln(\cos 2x)^{3/x^2} \Leftrightarrow \ln y=\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x).$$

Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos 2x))'}{(x^2)'}=3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\cos 2x)'}{\cos 2x}}{2x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=-6\cdot 1\cdot 1=-6.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=-6$, то $\lim\limits_{x\to 0} y=e^{-6}$.

2) Имеем неопределённость ∞^0. Обозначим $y=(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$. Прологарифмировав, получим:

$$\ln y=\ln(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} \Leftrightarrow \ln y=2\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)=\frac{2\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}}.$$

Находим предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(\operatorname{tg} x))'}{\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 0$, откуда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = 1.$

3) Здесь неопределенность вида 0^0. Обозначим $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ и прологарифмируем:

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}.$$

Здесь имеем неопределенность $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

$$\lim_{x\to+0} \ln y = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{(\ln(e^x-1))'} = \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{e^x-1}\cdot e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+0} \frac{(e^x-1)'}{(x\cdot e^x)'} = \lim_{x\to+0} \frac{e^x}{e^x + x\cdot e^x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Правило Лопиталя в этом примере применялось дважды.

Так как $\lim\limits_{x\to+0} \ln y = 1$, то $\lim\limits_{x\to+0} y = e^1 = e$.

11. Найти экстремумы и промежутки монотонности функции $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 7$.

Решение. Область определения данной функции: $D(y) = (-\infty, \infty)$.

Найдем производную: $y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 7 \right)' = x^2 - 5x + 6$.

Область ее определения $D(y') = (-\infty, \infty)$.

Приравняв производную нулю $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$, найдем критические точки $x_1 = 2;\ x_2 = 3$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2,3)$	3	$(3;+\infty)$
y	↗	–7/3	↘	–5/2	↗
y'	+	0	–	0	+

Значит, $x_1 = 2$ – точка максимума, $y_{\max} = -7/3$; $x_2 = 3$ – точка минимума, $y_{\min} = -5/2$; функция возрастает при $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; функция убывает при $x \in (2; 3)$.

12. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = x^4 - 4x^3 + x - 1$.

Решение. Область определения данной функции $D(y) = (-\infty, \infty)$.

Найдем вторую производную:

$$y' = \left(x^4 - 4x^3 + x - 1\right)' = 4x^3 - 12x^2 + 1;\ y'' = \left(4x^3 - 12x^2 + 1\right)' = 12x^2 - 24x$$

Область ее определения $D(y'') = (-\infty, \infty)$.

Приравняв y'' нулю $12x^2 - 24x = 0$, найдем точки $x_1 = 0;\ x_2 = 2$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2;+\infty)$
y	$\cup$	–1	$\cap$	–15	$\cup$
y''	+	0	–	0	+

Значит, $(0,-1); (2,-15)$ – точки перегиба, функция выпукла при $x \in (0, 2)$, функция вогнута (при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x$ на отрезке $[0,2]$.

Решение. Функция $y=x^3-3x$ непрерывна на отрезке $[0,2]$.

Найдем производную: $y'=\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3$. Она также непрерывна на отрезке $[0,2]$.

Приравняв производную нулю $y'=0 \Rightarrow 3x^2=3=0$, найдем критические точки $x_1=-1;\ x_2=1$. Точка $x_1=-1 \notin [0,\ 2]$, а $x_2=1 \in [0,\ 2]$.

Вычислим значение функции в точке x_2 и на концах отрезка:

$$y(1)=-2;\ y(0)=0;\ y(2)=2.$$

Значит, наибольшее значение функции $y_{\text{наиб}}=y(2)=2$, наименьшее значение функции $y_{\text{наим}}=y(1)=-2$.

15. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение. Найдем вертикальные асимптоты.

Область определения функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Поскольку:

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty,$$

то $x=-1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$. При $x\to\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3\left(1+2/x+1/x^2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2/x+1/x^2}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x\cdot\left(x^2+2x+1\right)}{x^2+2x+1}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-2-2/x)}{x^2\left(1+2/x+1/x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2-2/x}{1+2/x+1/x^2} = -2 .$$

Значит, $y = x-2$ – наклонная асимптота. Аналогичным образом получаем, что при $x \to -\infty$ прямая $y = x-2$ также является наклонной асимптотой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x + 5\sqrt{x} + \frac{8}{x^2} -$ 2) $y = \frac{\ln x}{\cos x} + x \cdot \operatorname{tg} x$

3) $y = x^3 \cdot \sin x \cdot \ln x$ 4) $y = \frac{1}{10x^2 + x + 20}$

2. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производные следующих функций:

1) $y = \sqrt{\sin^2 3x + \cos^2 x}$ 2) $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

3) $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1 - x^2 - 2x} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

3. Используя логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций:

1) $y = (1 + \sin 2x)^{\cos 4x}$ $y = \frac{x^3\left(x^2+1\right)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$

4. Найти производную y'_x следующих функций:

1) $x^2 - xy - y^2 + 18x - 8y = -12$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - t} \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$

5. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке $x_0 = 1$. Найти угол наклона этой касательной к оси Ox. Построить график функции, искомую касательную и нормаль.

6. Найти производные указанного порядка следующих функций:

1) $y=\arcsin x$, найти y''

2) $y=x^2\cdot\cos 2x$, найти y'''

3) $y=x^4\ln x$, найти $y^{(4)}$

4) $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\ln(\cos t) \end{cases}$, найти y''_{xx}

7. Найти dy и d^2y, если

1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

2) $y=\sqrt{x^2+1}$

3) $y=\ln^2\sqrt{x-1}$

8. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin 5x}{2^x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$

9. Найти экстремумы и промежутки монотонности функций:

1) $y=x^3-3x^2-9x+7$

2) $y=x-\ln(x+1)$

10. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости функций:

1) $y=2x^2+\ln x$

2) $y=x^5-10x^2+7x$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке:

1) $y=x^4-8x^2;\ [1;3]$

2) $y=(x^2+3x+3)\cdot e^{-x};\ [-4;0]$

12. Найти асимптоты графиков следующих функций:

1) $y=\dfrac{2x^2-9}{x-1}$

2) $y=\dfrac{2x-1}{3x}$

Ответы.

1. 1) $y' = 8x^3 - 2x^2 - 4 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{x}$

2) $y' = \operatorname{tg} x + x \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) + \frac{1}{x \cdot \cos x} + \frac{\ln x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

3) $y' = 3x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot \ln x + x^2 \cdot \sin x$ 4) $y' = -\frac{20x + 1}{10x^2 + x + 20}$

2. 1) $y' = \frac{3\sin 6x - \sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 3x + \cos^2 3x}}$ 2) $y' = \frac{2x^2 - 2}{3\left(x^4 + x^2 + 1\right)}$

3) $y' = \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

3. 1) $y' = (1 + \sin 2x)^{\cos 4x} \cdot \left(\frac{2\cos 2x \cdot \cos 4x}{1 + \sin 2x} - 4\sin 4x \cdot \ln(1 + \sin 2x)\right)$

2) $y' = \frac{x^3\left(x^2 + 1\right)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{8x}{x^2 + 1} - \frac{2x - 1}{2x^2 - 2}\right)$

4. 1) $y'_x = \frac{2x - y + 18}{x + 2y + 8}$ 2) $y'_x = \frac{2\sqrt{t^2 - t} \cdot \sqrt[3]{t - 1}}{6t^2 - 9t + 3}$

5. Касательная: $y = -5x + 2$. Нормаль: $y = \frac{x - 16}{5}$. Угол: $\pi - \operatorname{arctg} 5$

6. 1) $y'' = \frac{x}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}$ 2) $y''' = 8x^2 \sin 2x - 24x\cos 2x - 12\sin 2x$

3) $y^{(4)} = 24\ln x + 50$ 4) $y''_{xx} = -\frac{1}{2\cos^4 t}$

7. 1) $dy = \frac{2}{(x+1)^2}dx;\ d^2y = -\frac{4}{(x+1)^3}dx^2$

2) $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx;\ d^2y = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}}dx^2$

3) $dy = \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}dx;\ d^2y = \frac{\ln(x-1) - 1}{2(x-1)^2}dx^2$

8. 1) $-\dfrac{5}{\ln 2}$ 2) 2 3) 0

4) $\dfrac{2}{3}$ 5) 1 6) e^3

9. 1) $y_{\max}=12$ при $x=-1$; $y_{\min}=-20$ при $x=3$; возрастает при $x\in(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$; убывает при $x\in[-1,3)$

10. 2) $y_{\min}=0$ при $x=0$; возрастает при $x\in(0;+\infty)$; убывает при $x\in(-1,0)$

11. 1) $y_{\text{наиб}}=y(3)=9$; $y_{\text{наим}}=y(2)=-19$;
2) $y_{\text{наиб}}=y(-4)=7e^4$; $y_{\text{наим}}=y(-1)=e$

12. 1) $x=1$; $y=2x+2$ 2) $x=0$; $y=\dfrac{2}{3}$

III КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

3.1 ПРОВЕРОЧНЫЕ ТЕСТЫ

3.1.1 Проверочный тест по теме «Векторная алгебра и матричное исчисление»

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, тогда $3A+B=$

Варианты ответов:
1) $\begin{pmatrix}4 & 13\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}8 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}0 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 5) другой ответ

2. Чему равна сумма всех элементов матрицы $A\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$?

Варианты ответов:
1) 26 2) 18 3) 24 4) 20 5) другой ответ

3. Если определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ x & -3 \end{vmatrix} = -2$, то $x =$

Варианты ответов:

1) 14 2) 12 3) 8 4) 10 5) другой ответ

4. Найти сумму элементов обратной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Варианты ответов:

1) –4 2) –6 3) 0 4) 8 5) другой ответ

5. Сумма модулей всех значений переменных, которые образуют решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ y + z = 5 \\ -2z = -8 \end{cases}$, равна

Варианты ответов:

1) 9 2) 7 3) 8 4) 10 5) другой ответ

6. Даны три вектора $\bar{a} = (1, -1, 0); \bar{b} = (-2, 3, 1); \bar{c} = (2, -2, 1)$. Длина вектора $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$ равна

Варианты ответов:

1) 21 2) $\sqrt{86}$ 3) $\sqrt{146}$ 4) 18 5) другой ответ

7. Векторы заданы своими координатами $\bar{a} = (k, 1, 3)$ и $\bar{b} = (4, 4, -4)$. Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $k =$

Варианты ответов:

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) другой ответ

8. Даны векторы $\bar{a} = (2, 2, -1); \bar{b} = (7, 5, -2)$, тогда их векторное произведение имеет вид

Варианты ответов:

1) $9\bar{i} - 11\bar{j} - 4\bar{k}$ 2) $\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$ 3) $-9\bar{i} + 11\bar{j} - 4\bar{k}$

4) $\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ 5) другой ответ

9. Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = (3, 0, 0)$ и $\bar{b} = (3, 2, 1)$ равна

Варианты ответов:
1) 1,5 2) 3 3) 5 4) 2,5 5) другой ответ

10. Образуют ли векторы $\bar{a} = (1, 2, 3)$; $\bar{b} = (-1, 1, -1)$; $\bar{c} = (2, 1, 1)$ базис векторного пространства R^3?

Варианты ответов:
1) да 2) нет

Ответы к тесту по теме «Векторная алгебра и матричное исчисление»

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	3	4	2	2	3	4	2	5	1

3.1.2 Проверочный тест по теме «Аналитическая геометрия»

1. Если точка $Q(m, n)$ находится в середине отрезка с концами $A(-8, -2)$ и $B(-2, 12)$, то сумма координат точки Q равна

Варианты ответов:
1) 1 2) –1 3) 2 4) 0 5) другой ответ

2. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(3,5)$ и $B(4,2)$ равен:

Варианты ответов:
1) –9 2) –7 3) –1/9 4) 7 5) другой ответ

3. Прямые заданы уравнениями $y_1 = 5x - 7$ и $y_2 = 3x + 5$. Угол φ между прямыми равен

Варианты ответов:
1) $\mathrm{arctg}\frac{1}{8}$ 2) 30° 3) $-\mathrm{arctg}\frac{1}{8}$ 4) 90° 5) другой ответ

4. Если $x + by + c = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точки (–3, 0) и (0, 4), то $4b + c$ равно

Варианты ответов:

1) 0 2) 1 3) –1 4) 2 5) другой ответ

5. Расстояние от точки $M_0(3,8)$ до прямой $3x+4y+13=0$ равно

Варианты ответов:

1) 4,5 2) 13/6 3) –2 4) 2 5) другой ответ

6. Сумма координат центра и радиуса окружности $x^2+y^2+10x-4y+13=0$ равна

Варианты ответов:

1) 6 2) 7 3) 5 4) 8 5) другой ответ

7. Плоскость задана точкой $M(1,2,-1)$ и вектором нормали $\overline{N}=(5,-3,2)$. Уравнением этой плоскости является:

Варианты ответов:

1) $5x-3y+2z=21$ 2) $5x-3y+2z=3$ 3) $5x-3y+2z+6=0$

4) $5x-3y+2z+3=0$ 5) другой ответ

8. Расстояние от точки $M_0(2,-1,-1)$ до плоскости $16x-12y+15z-4=0$ равно:

Варианты ответов:

1) 4 2) 2 3) 1 4) 3 5) другой ответ

9. Угол между прямыми $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ и $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$ равен

Варианты ответов:

1) 30° 2) 90° 3) 60° 4) 0° 5) другой ответ

10. Прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ пересекает плоскость $2x-y-z+3=0$ в точке с координатами:

Варианты ответов:

1) (6, –4, 2) 2) (–1, 0, 5) 3) (3, –2, 1) 4) (–3, 1, 8) 5) другой ответ

Ответы к тесту по теме «Аналитическая геометрия»

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4	5	3	1	1	2	4	3	2	5

3.1.3 Проверочный тест по теме «Основы математического анализа»

1. Область определения функции $y=\sqrt{4-x}+\dfrac{1}{x^3}$ равна

Варианты ответов:

1) $(-\infty;\,0)$ 2) $(-\infty;\,4)$ 3) $(0;4)\cup(4;+\infty)$
4) $(-\infty;0)\cup(0;4]$ 5) $(4;+\infty)$ 6) другой ответ

2. Предел последовательности $x_n=\dfrac{8n^2+1}{2n^2-n+2}$ при $n\to\infty$ равен

Варианты ответов:

1) 0 2) $+\infty$ 3) -4
4) $0{,}5$ 5) 4 6) другой ответ

3. Значение $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$ равно

Варианты ответов:

1) 2 2) 3 3) 1
4) 0 5) $+\infty$ 6) другой ответ

4. Значение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{4x^2}$ равно

Варианты ответов:

1) 1 2) 0 3) $0{,}5$
4) 2 5) -2 6) другой ответ

5. Значение $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$ равно

Варианты ответов:

1) 1 2) 0 3) $\sqrt{e}$
4) e^2 5) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 6) другой ответ

6. Функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси, если a равно

Варианты ответов:

1) -1 2) 5 3) 0

4) 2 5) -2 6) другой ответ

7. Если $f(x)=2e^x+4x$, то $f'(0)$ принимает значение, равное

Варианты ответов:

1) 6 2) 5 3) 4

4) 3 5) 2 6) другой ответ

8. Значение производной функции $y=\dfrac{\pi+x}{\cos x}$ в точке $x_0=\pi$ равно

Варианты ответов:

1) 0 2) 1 3) 2

4) -1 5) -2 6) другой ответ

9. Значение производной неявно заданной функции $\ln y+\dfrac{x}{y}=3$ в точке $(3,1)$ равно

Варианты ответов:

1) 0 2) 1 3) $0{,}5$

4) $-0{,}5$ 5) -1 6) другой ответ

10. Производная y'_x параметрически заданной функции $\begin{cases}x=\ln 2t\\ y=\dfrac{1}{t}\end{cases}$ равна

Варианты ответов:

1) t^2 2) t 3) t^{-1}

4) $-t^{-1}$ 5) $-t^{-2}$ 6) другой ответ

11. Функция $y=(x+1)e^{2x}$ имеет минимум в точке

Варианты ответов:

1) 0 2) 1 3) $-1{,}5$

4) $1{,}5$ 5) -1 6) другой ответ

12. Для функции $y=-2x^3+3x^2+120x-10$ точка максимума x_0 принимает значение, равное

Варианты ответов:

1) -4 2) 5 3) -5

4) 1 5) -1 6) другой ответ

13. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ на отрезке $[2,5]$, то значение выражения $m+4M$ равно

Варианты ответов:

1) 12 2) -12 3) 20

4) -20 5) 0 6) другой ответ

14. Уравнение наклонной асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$ имеет вид

Варианты ответов:

1) $y=x-2$ 2) $y=x-8$ 3) $y=2x-3$

4) $y=x+8$ 5) $y=2x+8$ 6) другой ответ

15. Число точек перегиба графика функции $y=4x^4-3x^2+2x-1$ равно

Варианты ответов:

1) 2 2) 1 3) 0

4) 3 5) 4 6) другой ответ

Ответы к тесту по теме «Элементы математического анализа»

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	4	5	2	1	5	2	1	4	3	4	3	2	3	2	1

3.2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Задание 1. Найти матрицу C:

1. $C = A^T \cdot B - 2B^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $C = A \cdot B^T - A^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = (A \cdot B - B \cdot A)^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

4. $C = 2A \cdot \left(B - A^T\right)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$

5. $C = B \cdot \left(A + 3B^T\right)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -22 \\ -21 & -23 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

6. $C = 3A - 2B^T \cdot A^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $C = B \cdot (A + 3B)^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. $C = \left(B^T + 2A\right) \cdot A$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $C = A^T \cdot (B + A)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

10. $C = 3B - B^T \cdot A^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

11. $C = 2A \cdot (A - B)^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

12. $C = A \cdot B - 4B^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

13. $C=(B-2A)\cdot A^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}11 & 16\\ 15 & 20\end{pmatrix}$

14. $C=(A\cdot B+B\cdot A)^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

15. $C=A\cdot B^T-3B$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

16. $C=(A-B\cdot A)^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}$

17. $C=(B+A\cdot B)^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

18. $C=2A^T\cdot B-B\cdot A^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 11\end{pmatrix}$

19. $C=A^T\cdot B-4B\cdot A$ $\quad A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

20. $C=A\cdot B+4B^T-A$ $\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

21. $C=(A+B)\cdot(2B^T-A)$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

22. $C=A\cdot B^T-3B+A$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

23. $C=(2B+A^T)^2$ $\quad A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

24. $C=A\cdot B^T+A$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

25. $C=(2B+A)\cdot(A^T-B)$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

26. $C=(A+3B)\cdot(A+B)$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

27. $C=(A-2B)\cdot A^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&1\\7&5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-4&3\\7&3\end{pmatrix}$

28. $C=(A+4B)^T\cdot B$ $\quad A=\begin{pmatrix}3&4\\5&-7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}$

29. $C=A^T\cdot B-3B$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&5\\3&6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2\\5&8\end{pmatrix}$

30. $C=A\cdot B+4A^T$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&1\\5&-3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&-4\\7&-3\end{pmatrix}.$

Задание 2. Вычислить следующие определители

1. а) $\begin{vmatrix}-5&6\\2&2\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}2&-1&9\\1&5&-6\\3&-1&-5\end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix}3&-1\\-3&4\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}2&-3&7\\1&5&2\\9&-1&5\end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix}5&-7\\1&2\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix}3&2\\-6&-4\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{vmatrix}$

5. а) $\begin{vmatrix}2&4\\7&6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&1&-2\\4&2&-4\\9&3&-8\end{vmatrix}$

6. а) $\begin{vmatrix}2&4\\7&6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&1&-2\\4&2&-4\\9&3&-6\end{vmatrix}$

7. а) $\begin{vmatrix}-3&-4\\5&-1\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{vmatrix}$

8. а) $\begin{vmatrix}12&5\\-7&-6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{vmatrix}$

9. а) $\begin{vmatrix}-12&6\\10&-5\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{vmatrix}$

10. а) $\begin{vmatrix}20&14\\-7&-6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{vmatrix}$

11. а) $\begin{vmatrix}21&4\\71&-6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{vmatrix}$

12. а) $\begin{vmatrix}12&4\\7&-6\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&-3&2\\-2&2&3\\4&-5&6\end{vmatrix}$

13. а) $\begin{vmatrix}-2&-3\\4&-5\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&-3&2\\-2&4&3\\5&0&6\end{vmatrix}$

14. а) $\begin{vmatrix}2&41\\-7&-8\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1&-3&2\\3&2&3\\3&-1&0\end{vmatrix}$

15. а) $\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & 6 \end{vmatrix}$ 16. а) $\begin{vmatrix} 23 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

17. а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & -6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 21 & 3 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 18. а) $\begin{vmatrix} 22 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

19. а) $\begin{vmatrix} 22 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ 20. а) $\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix}$

21. а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ 22. а) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \\ 2 & 12 & 8 \end{vmatrix}$

23. а) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ 24. а) $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

25. а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 26. а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

27. а) $\begin{vmatrix} -10 & 12 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 28. а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$

29. а) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 30. а) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 16 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Задание 3. Решить систему уравнений, используя правило Крамера, матричным методом и методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ 5x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 15 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 12 \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -9 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

Задание 4. Найти ранг матрицы

1. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & -4 \\ 16 & 14 & 6 & -14 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \\ -11 & -10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -10 & 4 & -12 & 6 & 2 \\ 10 & -4 & 12 & -6 & -2 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & 16 & -2 & 20 \\ 2 & 7 & 21 & -1 & 25 \\ -4 & 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 11 & 7 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & -4 & 1 \\ 9 & 12 & 6 & -6 & -12 \\ -3 & -4 & -2 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 36 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ -5 & -11 & -11 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & -6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ -16 & -18 & -10 & -8 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ -5 & 12 & 18 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & 6 & -3 & -11 \\ 33 & -12 & -15 & 6 & 18 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 5 & 18 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 5. Даны три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Требуется найти: а) вектор $\bar{d}$, его модуль и направляющие косинусы; записать орт вектора $\bar{d}^0$; б) скалярное и векторное произведения векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{b}-\bar{a}$; в) смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

1. $\bar{a}=(3,-6,-3); \bar{b}=(0,2,-3); \bar{c}=(4,-2,1);\ \bar{d}=\frac{\bar{a}}{3}-\bar{b}+\bar{c}.$

2. $\bar{a}=(3,1,0); \bar{b}=(-3,6,9); \bar{c}=(1,1,1);\ \bar{d}=\bar{a}+\frac{\bar{b}}{3}+2\bar{c}.$

3. $\bar{a}=(2,4,-2); \bar{b}=(2,10,1); \bar{c}=(-4,1,3);\ \bar{d}=\frac{\bar{a}}{2}+\bar{b}-2\bar{c}.$

4. $\bar{a}=(-3,1,0); \bar{b}=(1,-1,1); \bar{c}=(6,2,-2);\ \bar{d}=\bar{a}-2\bar{b}+\frac{\bar{c}}{2}.$

5. $\bar{a}=(1,2,2); \bar{b}=(2,3,4); \bar{c}=(5,1,3);\ \bar{d}=2\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}.$

6. $\bar{a}=(3,2,-5); \bar{b}=(1,-1,4); \bar{c}=(1,-3,1);\ \bar{d}=\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}.$

7. $\bar{a}=(7,-8,9); \bar{b}=(1,-1,1); \bar{c}=(2,0,4);\ \bar{d}=\bar{a}-\bar{b}+\frac{\bar{c}}{2}.$

8. $\bar{a}=(2,-3,1); \bar{b}=(0,1,4); \bar{c}=(5,-2,3);\ \bar{d}=\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}.$

9. $\bar{a}=(1,-2,1); \bar{b}=(3,2,1); \bar{c}=(1,0,-1);\ \bar{d}=\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c}.$

10. $\bar{a}=(3,5,-1); \bar{b}=(0,-2,2); \bar{c}=(-2,2,3);\ \bar{d}=\bar{a}+\frac{\bar{b}}{2}-2\bar{c}.$

11. $\bar{a}=(3,-6,-1); \bar{b}=(1,4,-5); \bar{c}=(2,-4,12);\ \bar{d}=\bar{a}+\bar{b}-\frac{\bar{c}}{2}.$

12. $\bar{a}=(3,4,-1); \bar{b}=(2,3,5); \bar{c}=(1,0,1);\ \bar{d}=2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}.$

13. $\bar{a}=(3,1,1)$; $\bar{b}=(3,-6,9)$; $\bar{c}=(2,1,1)$; $\bar{d}=\bar{a}+\frac{\bar{b}}{3}-\bar{c}$.

14. $\bar{a}=(1,2,4)$; $\bar{b}=(5,1,2)$; $\bar{c}=(3,-1,1)$; $\bar{d}=3\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$.

15. $\bar{a}=(4,-3,5)$; $\bar{b}=(-3,1,2)$; $\bar{c}=(2,-4,-2)$; $\bar{d}=3\bar{a}+\bar{b}-\frac{\bar{c}}{2}$.

16. $\bar{a}=(2,3,0)$; $\bar{b}=(0,-3,-2)$; $\bar{c}=(1,1,-1)$; $\bar{d}=2\bar{a}-3\bar{b}+2\bar{c}$.

17. $\bar{a}=(3,3,1)$; $\bar{b}=(0,-6,-2)$; $\bar{c}=(-1,1,1)$; $\bar{d}=\bar{a}-\frac{\bar{b}}{2}+\bar{c}$.

18. $\bar{a}=(2,1,1)$; $\bar{b}=(4,0,2)$; $\bar{c}=(1,3,1)$; $\bar{d}=2\bar{a}+\frac{\bar{b}}{2}-\bar{c}$.

19. $\bar{a}=(2,-1,5)$; $\bar{b}=(8,-4,0)$; $\bar{c}=(-1,1,1)$; $\bar{d}=\bar{a}-\frac{\bar{b}}{4}+2\bar{c}$.

20. $\bar{a}=(2,3,-1)$; $\bar{b}=(-2,4,5)$; $\bar{c}=(-4,-4,0)$; $\bar{d}=2\bar{a}+\bar{b}-\frac{\bar{c}}{4}$.

21. $\bar{a}=(2,1,0)$; $\bar{b}=(3,2,-1)$; $\bar{c}=(1,-1,4)$; $\bar{d}=3\bar{a}+2\bar{b}-4\bar{c}$.

22. $\bar{a}=(2,-5,1)$; $\bar{b}=(-2,-5,-1)$; $\bar{c}=(6,-3,12)$; $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}+\frac{\bar{c}}{3}$.

23. $\bar{a}=(-12,2,-4)$; $\bar{b}=(-4,2,3)$; $\bar{c}=(-3,4,3)$; $\bar{d}=\frac{\bar{a}}{2}+\bar{b}-2\bar{c}$.

24. $\bar{a}=(4,-2,-2)$; $\bar{b}=(2,1,2)$; $\bar{c}=(2,-3,6)$; $\bar{d}=\frac{\bar{a}}{2}+2\bar{b}-\bar{c}$.

25. $\bar{a}=(-2,1,1)$; $\bar{b}=(1,5,0)$; $\bar{c}=(4,-4,2)$; $\bar{d}=2\bar{a}+\bar{b}+\frac{\bar{c}}{2}$.

26. $\bar{a}=(5,2,0)$; $\bar{b}=(2,5,1)$; $\bar{c}=(3,3,-6)$; $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}+\frac{\bar{c}}{3}$.

27. $\bar{a}=(2,-1,1)$; $\bar{b}=(-3,2,1)$; $\bar{c}=(1,-1,1)$; $\bar{d}=3\bar{a}-\bar{b}+4\bar{c}$.

28. $\bar{a}=(-6,2,0)$; $\bar{b}=(1,-1,1)$; $\bar{c}=(5,2,2)$; $\bar{d}=\frac{\bar{a}}{2}-2\bar{b}+\bar{c}$.

29. $\bar{a}=(2,4,-6)$; $\bar{b}=(-9,-3,6)$; $\bar{c}=(3,0,-1)$; $\bar{d}=\bar{a}-\frac{\bar{b}}{3}+2\bar{c}$.

30. $\bar{a}=(2,-5,1)$; $\bar{b}=(-2,-5,1)$; $\bar{c}=(4,-12,4)$; $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}+\frac{\bar{c}}{4}$.

Задание 6. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами. Найти:

а) длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; б) косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$; в) проекцию вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$.

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
1	–2	10	10	8	3	2
2	–7	–2	6	10	–8	3
3	–6	7	11	–1	2	–2
4	7	–4	9	11	1	2
5	7	–1	7	9	5	–8
6	–5	7	11	–9	2	–10
7	0	–4	–4	–1	–3	–8
8	–10	–6	1	–5	7	–6
9	2	–10	1	10	–6	1
10	5	10	3	6	–5	–2
11	5	11	–5	–4	1	–9
12	–1	–2	–4	–6	8	5
13	–2	2	–7	11	–7	–5
14	6	–4	10	–7	–3	2
15	–1	3	6	–2	–3	8
16	–1	10	–8	–10	–6	5
17	11	–9	3	–6	9	11
18	18	10	1	–10	–1	–10
19	19	11	–3	6	9	2
20	20	–7	–10	–6	–7	–4
21	21	0	–1	11	7	11
22	1	8	10	6	–7	–1
23	5	7	6	5	–5	–5

Вариант	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z
24	–10	2	9	–4	–5	–1
25	–2	–3	–6	–1	2	–4
26	–10	–4	–3	6	2	11
27	4	–8	10	9	1	5
28	–1	9	5	5	–9	6
29	10	0	5	5	–3	11
30	–10	–9	–8	–4	3	–6

Задание 7. Треугольник *ABC* дополнен до параллелограмма *ABCD* (отрезок *AC* его диагональ). Найти: а) координаты вершины *D*; б) длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины *D*; в) координаты центра тяжести треугольника *ABC*.

1. $A(0,1,7)$; $B(0,-7,0)$; $C(4,3,-10)$
2. $A(-6,-4,0)$; $B(6,-6,2)$; $C(10,0,4)$
3. $A(1,1,-2)$; $B(3,3,7)$; $C(-3,5,0)$
4. $A(2,4,-5)$; $B(-3,2,4)$; $C(5,9,7)$
5. $A(0,-1,6)$; $B(-10,5,-7)$; $C(-8,5,0)$
6. $A(1,1,7)$; $B(5,1,-10)$; $C(1,9,8)$
7. $A(1,1,5)$; $B(1,5,1)$; $C(9,0,-1)$
8. $A(2,-2,4)$; $B(4,0,10)$; $C(-2,2,2)$
9. $A(1,1,6)$; $B(1,5,1)$; $C(9,0,4)$
10. $A(-1,1,-1)$; $B(-9,3,-5)$; $C(-5,5,6)$
11. $A(2,-3,5)$; $B(-1,3,2)$; $C(6,1,19)$
12. $A(2,0,-1)$; $B(4,-8,0)$; $C(6,-4,0)$
13. $A(-1,5,\text{-}10)$; $B(5,-7,8)$; $C(5,-4,2)$
14. $A(2,1,3)$; $B(5,2,-1)$; $C(-3,3,-3)$
15. $A(2,-6,0)$; $B(-4,8,2)$; $C(-6,26,2)$
16. $A(8,-3,9)$; $B(-4,6,-6)$; $C(-5,7,2)$
17. $A(-1,1,6)$; $B(7,1,-2)$; $C(-3,5,-1)$
18. $A(0,-2,9)$; $B(-10,4,1)$; $C(-8,4,7)$
19. $A(-2,2,-5)$; $B(-10,2,9)$; $C(0,-6,6)$
20. $A(0,-1,0)$; $B(-8,3,2)$; $C(-2,2,-1)$

21. $A(0,1,6)$; $B(-4,3,-10)$; $C(-4,5,5)$
22. $A(1,0,4)$; $B(-3,2,-6)$; $C(-3,4,-1)$
23. $A(0,1,10)$; $B(-4,3,-8)$; $C(-4,5,2)$
24. $A(-2,1,2)$; $B(4,7,-1)$; $C(-2,7,2)$
25. $A(0,-1,-2)$; $B(2,5,7)$; $C(-2,5,-4)$
26. $A(-1,2,1)$; $B(5,8,-9)$; $C(-1,8,-1)$
27. $A(1,-2,-3)$; $B(-4,5,1)$; $C(-3,10,-1)$
28. $A(4,2,-1)$; $B(1,-3,2)$; $C(-4,2,1)$
29. $A(-2,0,-4)$; $B(-2,-4,-1)$; $C(-6,1,-5)$
30. $A(-1,1,5)$; $B(3,5,-3)$; $C(1,9,-7)$

Задание 8. Даны вершины пирамиды *ABCD*. Найти:

а) площадь основания *ABC*; б) объем пирамиды *ABCD*; в) длину высоты, опущенной из вершины *D*.

1. $A(7,2,4)$; $B(7,-1,-2)$; $C(3,3,1)$; $D(-4,2,1)$
2. $A(1,3,6)$; $B(2,2,1)$; $C(-1,0,1)$; $D(-4,6,-3)$
3. $A(-2,0,-4)$; $B(-1,7,1)$; $C(4,-8,-4)$; $D(1,-4,6)$
4. $A(-1,0,2)$; $B(3,4,0)$; $C(-1,-2,3)$; $D(6,3,1)$
5. $A(2,3,1)$; $B(-5,-4,8)$; $C(6,3,7)$; $D(4,1,-2)$
6. $A(2,-1,1)$; $B(4,1,3)$; $C(5,5,4)$; $D(3,2,-6)$
7. $A(-2,1,-1)$; $B(2,6,8)$; $C(2,-2,0)$; $D(2,2,-3)$
8. $A(-7,-2,1)$; $B(3,-1,4)$; $C(3,5,1)$; $D(4,-1,7)$
9. $A(7,4,2)$; $B(1,-5,3)$; $C(-5,3,-9)$; $D(7,-9,1)$
10. $A(-2,0,-8)$; $B(7,0,3)$; $C(1,2,4)$; $D(-1,-2,0)$
11. $A(3,4,0)$; $B(0,-3,1)$; $C(0,2,5)$; $D(1,2,0)$
12. $A(5,2,0)$; $B(2,5,0)$; $C(1,2,4)$; $D(0,1,2)$
13. $A(10,-5,10)$; $B(-11,-2,10)$; $C(-2,-14,5)$; $D(1,2,0)$
14. $A(3,1,-2)$; $B(1,-2,1)$; $C(-2,1,0)$; $D(2,2,5)$
15. $A(1,-3,1)$; $B(-3,2,-3)$; $C(-3,-3,3)$; $D(-2,0,4)$
16. $A(3,1,-1)$; $B(-1,-2,4)$; $C(7,0,-5)$; $D(1,2,-1)$
17. $A(5,2,1)$; $B(-2,7,3)$; $C(-1,3,9)$; $D(1,0,2)$
18. $A(2,2,2)$; $B(0,4,0)$; $C(-3,-1,5)$; $D(-1,5,6)$
19. $A(-1,6,2)$; $B(8,4,4)$; $C(5,4,0)$; $D(2,1,0)$
20. $A(3,-1,1)$; $B(0,-2,3)$; $C(-2,-1,0)$; $D(3,-9,2)$
21. $A(-6,0,1)$; $B(1,5,-2)$; $C(2,7,1)$; $D(0,0,1)$

22. $A(1,-2,6)$; $B(4,1,1)$; $C(0,2,1)$; $D(2,-1,1)$
23. $A(-5,-4,8)$; $B(2,3,1)$; $C(4,-1,2)$; $D(6,3,7)$
24. $A(1,2,3)$; $B(-2,4,1)$; $C(7,6,3)$; $D(4,-3,-1)$
25. $A(1,-1,2)$; $B(2,1,2)$; $C(1,1,4)$; $D(6,-3,8)$
26. $A(2,1,0)$; $B(2,-1,2)$; $C(0,1,3)$; $D(-1,1,0)$
27. $A(2,-3,5)$; $B(0,2,1)$; $C(3,2,4)$; $D(-2,-2,3)$
28. $A(1,-5,4)$; $B(-1,2,3)$; $C(-2,-4,3)$; $D(1,0,6)$
29. $A(1,-5,4)$; $B(-1,2,3)$; $C(-2,-4,3)$; $D(1,0,6)$
30. $A(2,0,1)$; $B(2,3,5)$; $C(6,2,3)$; $D(3,7,2)$

Задание 9. Даны вершины треугольника *ABC*. Найдите: а) уравнение и длину высоты *AH*; б) уравнение медианы *AM*; в) уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*; г) косинус угла при вершине *A*.

1. $A(-6,6)$; $B(-2,5)$; $C(-5,2)$.
2. $A(9,11)$; $B(3,-4)$; $C(0,-1)$.
3. $A(1,-2)$; $B(0,-1)$; $C(3,4)$.
4. $A(2,1)$; $B(6,-1)$; $C(4,2)$.
5. $A(0,-3)$; $B(-12,-3)$; $C(-9,-6)$.
6. $A(-1,-2)$; $B(-4,-3)$; $C(-8,2)$.
7. $A(-4,15)$; $B(-2,5)$; $C(-6,9)$.
8. $A(4,20)$; $B(-2,5)$; $C(-6,1)$.
9. $A(-3,15)$; $B(3,5)$; $C(5,1)$.
10. $A(-3,15)$; $B(3,5)$; $C(-3,2)$.
11. $A(3,3)$; $B(5,-2)$; $C(4,1)$.
12. $A(6,2)$; $B(8,7)$; $C(-4,6)$.
13. $A(1,2)$; $B(3,4)$; $C(1,1)$.
14. $A(0,4)$; $B(-3,-6)$; $C(-5,0)$.
15. $A(6,20)$; $B(3,5)$; $C(6,6)$.
16. $A(7,-10)$; $B(-2,5)$; $C(-11,17)$.
17. $A(-3,-10)$; $B(3,5)$; $C(5,1)$.
18. $A(9,11)$; $B(3,-4)$; $C(7,-3)$.
19. $A(9,-5)$; $B(3,5)$; $C(9,11)$.
20. $A(2,-4)$; $B(0,-2)$; $C(6,8)$.
21. $A(3,3)$; $B(5,1)$; $C(-8,4)$.
22. $A(-11,-10)$; $B(-2,5)$; $C(-8,11)$
23. $A(0,1)$; $B(3,2)$; $C(-8,4)$.
24. $A(-4,3)$; $B(0,1)$; $C(-2,-4)$.
25. $A(3,3)$; $B(1,5)$; $C(-4,4)$.
26. $A(1,-1)$; $B(-2,1)$; $C(8,2)$.
27. $A(7,0)$; $B(-8,1)$; $C(3,4)$.
28. $A(-1,4)$; $B(3,0)$; $C(-2,-5)$.
29. $A(2,3)$; $B(-1,-3)$; $C(6,8)$.
30. $A(2,4)$; $B(-4,1)$; $C(0,-5)$.

Задание 10. Определить вид кривой, найти основные параметры (для окружности – центр и радиус; для эллипса – оси, координаты фокусов, эксцентриситет; для параболы – координаты вершины, фокуса и уравнение директрисы; для гиперболы – оси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот). Сделать чертеж.

1\. 1) $x^2 - x + 8 = y$; 2) $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$.

2\. 1) $x^2 - 5x + 1 = y$; 2) $x^2 + 7y^2 - 11 = 0$.

3\. 1) $5x^2 + y^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 6x - y^2 + 10 = 0$.

4\. 1) $8x^2 - y^2 = 16$; 2) $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$.

5\. 1) $3x^2 - 20y^2 = 40$; 2) $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

6\. 1) $y^2 + 3y + 6 = x$; 2) $x^2 - 4x + y^2 + 4y - 1 = 0$

7\. 1) $y^2 + 7y = x$; 2) $x^2 - 4x + y^2 + 4y - 8 = 0$.

8\. 1) $x^2 - x + 8 = y$; 2) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$.

9\. 1) $x^2 - 5y^2 = 4$; 2) $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 8 = 0$.

10\. 1) $6x^2 + 3y^2 = 50$; 2) $3x^2 - 30x - 9y^2 + 30y + 15 = 0$.

11\. 1) $x^2 + 3x + 6 = y$; 2) $x^2 + 4x + 2y^2 - 12y + 18 = 0$.

12\. 1) $x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 + 4x - 6 = y$.

13\. 1) $y^2 + y - 4 = x$; 2) $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 11 = 0$.

14\. 1) $y^2 - 9y = x + 3$; 2) $4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y - 29 = 0$.

15\. 1) $6x^2 - y^2 = 12$; 2) $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$.

16\. 1) $x^2 - 4x + y^2 - 12 = 0$; 2) $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

17\. 1) $x^2 + 8y^2 - 100 = 0$; 2) $-4x^2 + 8x + 9y^2 + 18y - 31 = 0$.

18\. 1) $2x^2 + 7y^2 - 60 = 0$; 2) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 36y + 32 = 0$.

19\. 1) $x^2 - x + 10 + 11y = 0$; 2) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$.

20\. 1) $8x^2 - y^2 - 16 = 0$; 2) $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$.

21\. 1) $10x^2 + 4y^2 - 55 = 0$; 2) $x^2 - 5x + 1 = y$.

22\. 1) $9x^2 - 4y^2 = 36$; 2) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$.

23\. 1) $5x^2 + 20y^2 = 80$; 2) $5x^2 - 50x + 2y^2 - 8y - 27 = 0$.

24\. 1) $y^2 - 2y - 1 = x$; 2) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$.

25\. 1) $4x^2 - y^2 = 16$; 2) $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$.

26\. 1) $3x^2 - 6x + y + 1 = 0$; 2) $9x^2 + 90x - 16y^2 + 4y + 161 = 0$.

27\. 1) $y^2 - 6y + 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 + 4x + 2y^2 - 12y + 18 = 0$.

28\. 1) $16x^2 + y^2 = 64$; 2) $4x^2 - 48x - 3y^2 + 12y + 120 = 0$.

29. 1) $25x^2-4y^2=100$; 2) $x^2+14x+y^2-6y+54=0$.

30. 1) $y^2+4y-2x+2=0$; 2) $9x^2-36x+25y^2-50y-164=0$.

Задание 11. Написать уравнение плоскости проходящей через точку A, перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

Вариант	Точка A			Точка B			Точка C		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	2	–3	–1	3	4	1	1	–2	–3
2	–1	3	4	–1	5	0	2	6	1
3	4	–2	0	1	–1	–5	–2	1	–3
4	–8	0	7	–3	2	4	–1	4	5
5	7	–5	1	5	–1	–3	3	0	–4
6	–3	5	2	–4	0	3	–3	2	5
7	1	–1	8	–4	–3	10	–1	–1	7
8	–2	0	–5	2	7	–3	1	10	–1
9	1	9	–4	5	7	1	3	5	0
10	–7	0	3	1	–5	–4	2	–3	0
11	0	–3	5	–7	2	6	–3	2	4
12	5	–1	2	2	–4	3	4	–1	3
13	–3	7	2	3	5	1	4	5	3
14	0	–2	8	4	3	2	1	4	3
15	1	–1	5	0	7	8	–1	3	8
16	–4	0	9	12	4	11	8	5	15
17	3	–3	6	1	9	–5	6	6	–4
18	2	1	7	9	0	2	9	2	3
19	–7	1	–4	8	11	–3	9	9	–1
20	1	0	–6	–7	2	1	–9	6	1

Вариант	Точка A			Точка B			Точка C		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
21	–3	1	0	6	3	3	9	4	–2
22	–4	–2	5	3	–3	–7	9	3	–7
23	0	–8	10	–5	5	7	–8	0	4
24	1	–5	–2	6	–2	1	2	–2	–2
25	0	7	–9	–1	8	–11	–4	3	–12
26	–3	–1	7	0	2	–6	2	3	–5
27	5	3	–1	0	0	–3	5	–1	0
28	–1	2	–2	13	14	1	14	15	2
29	7	–5	0	8	3	–1	8	5	1
30	–3	6	4	8	–3	5	10	–3	7

Задание 12. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.

Вариант	Точка M_1			Точка M_2			Точка M_3			Точка M_0		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	3	4	7	1	5	4	5	2	0	12	7	1
2	1	2	3	4	1	0	2	1	2	1	6	5
3	3	1	1	9	1	2	3	5	4	7	0	1
4	1	1	1	2	0	3	2	1	1	2	4	2
5	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	1	4
6	1	0	2	1	2	1	2	2	1	5	9	1
7	1	2	3	1	0	1	2	1	6	3	2	9
8	3	0	1	2	3	5	6	0	3	6	7	10
9	1	2	4	1	2	4	3	0	1	2	3	5
10	0	3	1	4	1	2	2	1	5	3	4	5

Вариант	Точка M_1			Точка M_2			Точка M_3			Точка M_0		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
11	1	3	0	4	–1	2	3	0	1	4	3	0
12	–2	–1	–1	0	3	2	3	1	–4	–21	20	–16
13	–3	–5	6	2	1	–4	0	–3	–1	3	6	68
14	2	–4	–3	5	–6	0	–1	3	–3	2	–10	8
15	1	–1	2	2	1	2	1	1	4	–3	2	7
16	1	3	6	2	2	1	–1	0	1	5	–4	5
17	–4	2	6	2	–3	0	–10	5	8	–12	1	8
18	7	2	4	7	–1	–2	–5	–2	–1	10	1	8
19	2	1	4	3	5	–2	–7	–3	2	–3	1	8
20	–1	–5	2	–6	0	–3	3	6	–3	10	–8	–7
21	0	–1	–1	–2	3	5	1	–5	–9	–4	–13	6
22	5	2	0	2	5	0	1	2	4	–3	–6	–8
23	2	–1	–2	1	2	1	5	0	–6	14	–3	7
24	–2	0	–4	–1	7	1	4	–8	–4	–6	5	5
25	14	4	5	–5	–3	2	–2	–6	–3	–1	–8	7
26	1	2	0	3	0	–3	5	2	6	–13	–8	16
27	2	–1	2	1	2	–1	3	2	1	–5	3	7
28	1	1	2	–1	1	3	2	–2	4	2	3	8
29	2	3	7	4	1	–2	6	3	7	–5	–4	6
30	1	1	–1	2	3	1	3	2	1	–3	–7	6

Задание 13.

Найти угол между плоскостями $A_1x + B_1x + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2x + C_2z + D_2 = 0$.

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	1	–3	0	5	2	–1	5	–16
2	1	–3	1	–1	1	0	1	–1
3	4	–5	3	–1	1	–4	–1	9
4	3	–1	2	15	5	9	–3	–1
5	6	2	–4	17	9	3	–6	–4
6	1	$-\sqrt{2}$	1	–1	1	$\sqrt{2}$	–1	3
7	0	3	–1	0	0	2	1	0
8	6	3	–2	0	1	2	6	–12
9	1	2	2	–3	16	12	–15	–1
10	2	–1	5	16	1	2	3	8
11	2	2	1	–1	1	0	1	–1
12	3	1	1	–4	0	1	1	5
13	3	–2	–2	–16	1	1	–3	–7
14	2	2	1	9	1	–1	3	–1
15	1	2	2	–3	1	–1	2	5
16	3	2	–3	–1	1	1	1	–7
17	1	–3	–2	–8	1	1	–1	3
18	3	–2	3	23	0	1	1	5
19	1	1	3	–7	0	1	1	–1
20	1	–2	2	17	1	–2	0	–1
21	1	2	0	–1	1	1	0	6
22	2	0	–1	5	2	3	0	–7
23	5	3	1	–18	0	2	1	–9

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
24	4	0	3	–2	1	2	2	5
25	1	4	–1	1	2	1	4	–3
26	0	2	1	–9	1	–1	2	–1
27	2	–6	14	–1	5	–15	35	–3
28	1	–1	7	–1	2	–2	0	–5
29	3	–1	0	–5	2	1	0	–3
30	1	1	$\sqrt{2}$	–3	1	–1	$\sqrt{2}$	–1

Задание 14. Написать каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	2	1	1	–2	2	–1	–3	6
2	1	–3	2	2	1	3	1	14
3	1	–2	1	–4	2	2	–1	–8
4	1	1	1	–2	1	–1	–2	2
5	2	3	1	6	1	–3	–2	3
6	3	1	–1	–6	3	–1	2	0
7	1	5	2	11	1	–1	–1	–1
8	3	4	–2	1	2	–4	3	4
9	5	1	–3	4	1	–1	2	2
10	1	–1	–1	–2	1	–2	1	4
11	4	1	–3	2	2	–1	1	–8
12	3	3	–2	–1	2	–3	1	6
13	6	–7	–4	–2	1	7	–1	–5

Вариант	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
14	8	–1	–3	–1	1	1	1	10
15	6	–5	–4	8	6	5	3	4
16	1	5	–1	–5	2	–5	2	5
17	2	–3	1	6	1	–3	–2	3
18	5	1	2	4	1	–1	–3	2
19	4	1	1	2	2	–1	–3	–8
20	2	1	–3	–2	2	–1	1	6
21	1	1	–2	–2	1	–1	1	2
22	1	5	–1	1	1	–1	2	–1
23	1	–1	1	–2	1	–2	–1	4
24	6	–7	–1	–2	1	7	–4	–5
25	1	5	2	–5	2	–5	–1	5
26	1	–3	1	2	1	3	2	14
27	2	3	–2	6	1	–3	1	3
28	3	4	3	1	2	–4	–2	4
29	3	3	1	–1	2	–3	–2	6
30	6	–5	3	8	6	5	–4	4

Задание 15. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Вариант	x_0	y_0	z_0	m	n	p	A	B	C	D
1	2	3	–1	–1	–1	4	1	2	3	14
2	1	3	1	3	4	5	1	2	5	0

Вариант	x_0	y_0	z_0	m	n	p	A	B	C	D
3	1	–5	1	–1	4	2	1	–3	7	–24
4	1	0	–3	1	0	2	2	–1	4	0
5	5	3	2	1	–1	0	3	1	–5	–12
6	–1	–2	3	–3	2	–2	1	3	–5	9
7	1	2	–1	–2	1	–1	1	–2	5	7
8	1	2	4	2	0	1	1	–2	4	–19
9	–2	1	–4	–1	1	–1	2	–1	3	23
10	–2	2	–3	1	0	0	2	–3	–5	–7
11	1	1	–2	2	–1	3	4	2	–1	–11
12	1	–1	1	1	0	–1	3	–2	–4	–8
13	–2	1	–3	–1	1	1	1	2	–1	–2
14	–3	2	–2	1	–5	3	5	–1	4	3
15	2	2	4	2	–1	3	1	3	5	–42
16	3	4	4	–1	5	2	7	1	4	–47
17	–3	1	1	2	3	5	2	3	7	–52
18	3	–1	–3	2	3	2	3	4	7	–16
19	5	2	–4	–2	0	–1	2	–5	4	24
20	1	8	–5	8	–5	12	1	–2	–3	18
21	3	1	–5	1	–1	0	1	7	3	11
22	5	–3	1	–1	5	2	3	7	–5	–11
23	1	2	6	7	1	–1	4	1	–6	–5
24	3	–2	8	1	–1	0	5	9	4	–25
25	–1	0	–1	–2	0	3	1	4	13	–23
26	–1	3	–5	6	1	3	3	–2	5	–3
27	2	1	–3	4	–3	–2	3	–1	4	0

Вариант	x_0	y_0	z_0	m	n	p	A	B	C	D
28	1	–2	3	2	–5	–2	1	2	–5	16
29	1	3	–2	1	0	–2	3	–7	–2	7
30	–3	2	–5	0	–3	11	5	7	9	–32

3.2.1 Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1. Найти матрицу $C = (A+B)^T \cdot (E+B)$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: По правилам выполнения арифметических операций, сначала выполняем операции, указанные в скобках. Найдем суммы матриц:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$E+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем произведение полученных матриц:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + 5\cdot 2 & 4\cdot 5 + 5\cdot 5 \\ 7\cdot 4 + 8\cdot 2 & 7\cdot 5 + 8\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 44 & 75 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Решение.

а) Согласно определению:

$$\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3)-(-8)\cdot(-7) = -24-56 = -80.$$

б) Применим правило треугольника:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 4+(-3)\cdot(-3)\cdot 3+0\cdot 3\cdot 3-$$

$$-3\cdot(-2)\cdot 3-2\cdot 3\cdot(-3)-0\cdot 3\cdot 3 = -16+27+18+18 = 47.$$

Задание 3. Решить систему линейных уравнений, используя правило Крамера, матричным методом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

Решение (правило Крамера). Согласно правилу Крамера нужно составить определители системы и соответствующие каждому неизвестному. И затем по формуле $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ найти решение.

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-3) = 4.$$

Найдем определители для каждого неизвестного, заменяя столбец коэффициентов при этом неизвестном, столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(2-1) = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 5 = -4.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -(-6-2) = 8.$$

Теперь определим значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2.$$

Решение (матричным методом):

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

Тогда исходную систему можно переписать в виде: $A \cdot X = B$.

Решение такой системы определяется по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, в которую входит матрица обратная к исходной A. Найдем ее:

1) определитель исходной матрицы мы уже находили, он равен: $\Delta = 4$;

2) транспонируем исходную матрицу: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

3) для каждого элемента транспонированной матрицы нужно найти алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \; A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \; A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

4) записать их в транспонированную матрицу вместо ее элементов и разделить каждый элемент на определитель исходной матрицы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}.$$

5) Подставляем в формулу:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5+7 \\ 2+1-7 \\ -2+3+7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение (методом Гаусса-Жордано):

Составляем расширенную матрицу системы и преобразуем к треугольному виду. Умножим элементы первой строки на (–2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. Затем умножим элементы второй строки на 3 и сложим с соответствующими элементами третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

получили треугольную матрицу, которая соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & \qquad x_1 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow & x_2 = -1. \\ \qquad\quad 4x_3 = 8 & \qquad x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание 4. Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами первую и вторую строки, ранг матрицы от этого не изменится:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы первого столбца, кроме a_{11} были равны нулю. Умножим все элементы первой строки на 2 и сложим с соответствующими элементами третьей строки. Затем сложим все элементы первой строки с соответствующими элементами третьей строки:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

{Теперь добиваемся, чтобы все элементы второго столбца, кроме a_{12} и a_{22} были равны нулю. Умножаем все элементы второй строки на (-3) и складываем с соответствующими элементами третьей строки. Затем умножаем все элементы второй строки на (-3) и складываем с соответствующими элементами четвертой строки. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей, то отбрасываем их:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица содержит миноры второго порядка не равные нулю, например: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, следовательно, $rang\ A = 2$.

Задание 5. Даны три вектора $\overline{a} = (0, -1, 3), \overline{b} = (3, -2, 1), \overline{c} = (4, 0, -4)$.

Требуется найти:

а) вектор $\overline{d} = 2\overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$, его модуль и направляющие косинусы; записать орт вектора $\bar{d}^0$;

б) скалярное и векторное произведения векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{b}-\bar{a}$;

в) смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Решение.

а) По правилам выполнения арифметических операций над векторами:

$$\bar{d} = 2\cdot(0,-1,3)-(3,-2,1)+3\cdot(4,0,-4)=(0-3+12,\,-2+2+0,\,6-1-12)=$$
$$=(9,\,0,\,-7).$$

Координаты орта вектора равны отношению координат данного вектора к его модулю:

$$|\bar{d}| = \sqrt{9^2+0^2+(-7)^2}=\sqrt{130} \Rightarrow \bar{d}^0 = \left(\frac{9}{\sqrt{130}},\ 0,\ -\frac{7}{\sqrt{130}}\right).$$

б) Сначала выполним операцию сложения векторов, а затем скалярное умножение (сумма произведений одноименных координат):

$$\bar{a}+\bar{c}=(0,-1,3)+(4,0,-4)=(4,-1,-1);$$
$$\bar{b}-\bar{a}=(3,-2,1)-(0,-1,3)=(3,-1,-2);$$
$$(\bar{a}+\bar{c})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=(4,-1,-1)\cdot(3,-1,-2)=$$
$$=4\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)=12+1+2=15.$$

Векторное произведение векторов находится по правилу:

$$(\bar{a}+\bar{c})\times(\bar{b}-\bar{a})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=(2-1)\cdot\bar{i}-(-8+3)\cdot\bar{j}+(-4+3)\cdot\bar{j}=\bar{i}+5\bar{j}-\bar{k}=(1,-5,-1).$$

(определитель раскладываем по элементам первой строки).

в) Произведение векторов, обозначаемое символом $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ есть векторно-скалярное, т.е. смешанное произведение трех векторов. Оно вычисляется по правилу:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & -4\end{vmatrix}=0\cdot 8-1\cdot 16+3\cdot 8=8.$$

Задание 6. Для векторов $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+4\bar{j}+4\bar{k}$ вычислить:

а) длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; б) косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$; в) проекцию вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$.

Решение.

а) Найдем длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=3;$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=6.$$

б) Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ может быть выражен через скалярное произведение и модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Найдем скалярное произведение: $\bar{a}\cdot\bar{b}=-2\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 4=8$.

Тогда: $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{8}{3\cdot 6}=\dfrac{4}{9}$.

в) Проекция вектора $\bar{b}$ на ненулевой вектор $\bar{a}$ находится следующим образом: $\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b}=\dfrac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}=\dfrac{8}{3}$.

Задание 7. Треугольник *ABC* $\left(A(-3,1,-4);\ B(-2,4,3);\ C(1,6,3)\right)$ дополнен до параллелограмма *ABCD* (отрезок *AC* его диагональ).

Найти а) координаты вершины *D*; б) длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины *D*; в) координаты центра тяжести треугольника *ABC*.

Решение.

а) Если *ABCD* – параллелограмм и его диагонали *AC* и *BD*, то

$$x_A+x_C=x_B+x_D \qquad y_A+y_C=y_B+y_D \qquad z_A+z_C=z_B+z_D$$

$$-3+1=-2+x_D \qquad 1+6=4+y_D \qquad -4+3=3+z_D$$

$$-2=-2+x_D\Rightarrow x_D=0 \qquad 7=4+x_D\Rightarrow y_D=3 \qquad -1=3+z_D\Rightarrow x_D=-4$$

б) Длину h найдем через площадь параллелограмма.

1) С одной стороны: $S_{\text{паралл.}} = \left|\overline{AB} \times \overline{AD}\right|$.

Найдем координаты векторов $\overline{AB} = \left(-2-(-3), 4-1, 3-(-4)\right) = \left(1, 3, 7\right)$ и $\overline{AD} = \left(0-(-3), 3-1, -4-(-4)\right) = \left(3, 2, 0\right)$. Тогда:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14\bar{i} + 21\bar{j} - 7\bar{k} .$$

Площадь параллелограмма:

$$S_{\text{паралл.}} = \left|\overline{AB} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{\left(-14\right)^2 + 21^2 + \left(-7\right)^2} = \sqrt{686} = 7\sqrt{14} .$$

2) С другой стороны: $S_{\text{паралл.}} = \left|\overline{AB}\right| \cdot h = h \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 7^2} = h \cdot \sqrt{59}$. Таким образом:

$$h \cdot \sqrt{59} = 7\sqrt{14} \Rightarrow h = \frac{7\sqrt{14}}{\sqrt{59}} .$$

в) Центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан и делит медиану в отношении 2:1, начиная с вершины.

Так как $O\left(-1, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ – середина стороны AC, то BO – медиана треугольника ABC, опущенного из вершины B.

Обозначим координаты центра тяжести треугольника через E, тогда:

$$x_E = \frac{x_B + 2x_o}{1+2} = \frac{2 + 2 \cdot \left(-1\right)}{3} = -\frac{4}{3};\ y_E = \frac{y_B + 2y_o}{1+2} = \frac{4 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{3} = \frac{11}{3};$$

$$z_E = \frac{z_B + 2z_o}{1+2} = \frac{3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Координаты центра тяжести треугольника ABC: $E\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Задание 8. Даны вершины пирамиды *ABCD*: $A(-3,2,-1)$; $B(1,-2,4)$; $C(4,1,-3)$; $D(-3,4,1)$. Найти: а) площадь основания *ABC*; б) объем пирамиды *ABCD*; в) длину высоты, опущенной из вершины *D*.

Решение. Найдем векторы трех ребер пирамиды:

$$\overline{AB}=(4,-4,5);\ \overline{AC}=(7,-1,-2);\ \overline{AD}=(0,2,2).$$

а) Площадь основания *ABC* найдем с помощью векторного произведения: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Так как $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -4 & 5\\ 7 & -1 & -2\end{vmatrix}=13\bar{i}+43\bar{j}+24\bar{k}$, то:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{13^2+43^2+24^2}}{2}=\frac{\sqrt{2594}}{2}\approx 25{,}5\left(\text{ед}^2\right).$$

б) Объем пирамиды можно найти как шестую часть модуля смешанного произведения векторов ее сторон.

Вычислим $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$:

$$\begin{vmatrix}4 & -4 & 5\\ 7 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-8+70+16+56=134\Rightarrow V_{\text{пир}}=\frac{134}{6}=\frac{67}{3}\left(\text{ед}^3\right).$$

в) Длины высоты пирамиды, опущенной на грань ABC, можно найти через полученное значение объема.

Зная, что $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h$, имеем $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{67}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot 25{,}5\cdot h=\frac{67}{3}$.

Таким образом, имеем: $h=\frac{67}{25{,}5}\approx 2{,}6$.

Задание 9. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(-8,-5)$; $B(-2,5)$; $C(-5,2)$. Найти: а) уравнение и длину высоты *AH*; б) уравнение медианы *AM*; в) уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*; г) косинус угла при вершине *A*.

Решение.

а) Вычислим угловой коэффициент прямой BC:

$$k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-5-(-2)}{2-5}=\frac{-3}{-3}=1.$$

Согласно условию перпендикулярности двух прямых угловой коэффициент высоты AD равен: $k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=-\frac{1}{1}=-1$.

Зная точку и угловой коэффициент, выписываем искомое уравнение:

$$y-(-5)=-1\cdot\left(x-(-8)\right)\Leftrightarrow y+5=-x-8\Rightarrow y=-x-13.$$

Найдем уравнение стороны BC по формуле (2.3):

$$\frac{x-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{y-5}{2-5};\quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{-3}\Leftrightarrow x-y+7=0.$$

Вычислим высоту AD как расстояние от точки A до прямой BC:

$$AD=\frac{\left|-8-(-5)+7\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

б) Медиана AM точкой M делит отрезок BC пополам, значит:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-2-5}{2}=\frac{-7}{2};\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+2}{2}=\frac{7}{2}.$$

Значит, $M\left(-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

Уравнение AM запишем в виде $y+5=\dfrac{{}^7\!/_2+5}{-{}^7\!/_2+8}\left(x+8\right)$ или $17x-9y-37=0$.

в) В силу параллельности искомая прямая и прямая BC имеют общий угловой коэффициент k. Так как $k_{BC}=1$, то и угловой коэффициент искомой прямой тоже равен 1. Выпишем уравнение этой прямой:

$$y-(-5)=1\cdot(x-(-8))\Leftrightarrow y+5=x+8\Rightarrow y=x+3.$$

г) Косинус угла при вершине A найдем по формуле нахождения угла между направляющими векторами прямых AB и AC. Так как $\overline{AB}=(-2-(-8),5-(-5))=(6,10)$; $\overline{AC}=(-5-(-8),2-(-5))=(3,7)$, то:

$$\cos\hat{A}=\frac{6\cdot 3+10\cdot 7}{\sqrt{6^2+10^2}\cdot\sqrt{3^2+7^2}}=\frac{18+70}{\sqrt{136}\cdot\sqrt{58}}=\frac{88}{4\sqrt{493}}=\frac{22}{\sqrt{493}}.$$

Задание 10. Определить вид кривой, найти основные параметры (для окружности – центр и радиус; для эллипса – оси, координаты фокусов, эксцентриситет; для параболы – координаты вершины, фокуса и уравнение директрисы; для гиперболы – оси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот).

а) $x^2+4y^2+2x+16y+1=0$; б) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$.

Решение.

а) Преобразуем данное уравнение кривой.

Так как $\left(x^2+2x+1\right)+4\cdot\left(y^2+4y+4-4\right)=(x+1)^2+4\cdot(y+2)^2-16$, то уравнение можно представить в виде $(x+1)^2+4\cdot(y+2)^2=16$, т.е.

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Получаем уравнение эллипса, центр симметрии которого находится в точке $(-1,-2)$. Из уравнения получим: $a=4; b=2$.

Тогда $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как центр эллипса лежит на прямой $y=-2$, то координаты фокусов эллипса равны: $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$; $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

б) Для приведения этого уравнения к каноническому виду достаточно составить полные квадраты:

$$\left(x^2+2x+1\right)-1-9\cdot\left(y^2-4y+4-4\right)-44=0\Leftrightarrow(x+1)^2-9\cdot(y-2)^2=9.$$

Разделим левую и правую часть на 9: $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$.

Проведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало $O'(-1,2)$. Формулы преобразования координат имеют вид:

$$X=x+1;\ Y=y-2.$$

Получим уравнение $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{1}=1$. Это уравнение гиперболы с полуосями $a=3, b=1$ и центром в точке $X=0, Y=0$, т.е. $x+1=0;\ y-2=0 \Rightarrow x=-1;\ y=2$.

Так как $c^2=a^2+b^2=9+1=10$, то $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Координаты фокусов имеют вид: $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right);F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

Найдем уравнения асимптот. Так как $Y=\pm\frac{1}{3}X$, то:

$$y-2=\pm\frac{1}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{3}(x+1)+2.$$

Уравнение первой асимптоты: $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}+2\Leftrightarrow y=\frac{x+7}{3}$.

Уравнение второй асимптоты: $y=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}+2\Leftrightarrow y=\frac{-x+5}{3}$.

Задание 11. Написать уравнение плоскости проходящей через точку $A(2,-1,-4)$, перпендикулярно вектору $\overline{BC}$, где $B(-1,1,-1);C(2,-5,0)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC}=(2-(-1),-5-1,0-(-1))=(3,-6,1).$$

Уравнение плоскости найдем по формуле $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $\overline{N}=(A,B,C)=(3,-6,1)$; $(x_0,y_0,z_0)=(2,-1-4)$.

Получаем:

$$3\cdot(x-2)-6\cdot(y+1)+1\cdot(z+4)=0 \Leftrightarrow 3x-6-6y-6+z+4=0.$$

Или $3x-6y+z-8=0$.

Задание 12. Найти расстояние от точки $M_0(1,5,9)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,2,1), M_2(-1,5,1), M_3(-1,2,7)$.

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1-1 & 5-2 & 1-1 \\ -1-1 & 2-2 & 7-1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

или: $-6\cdot(x-1)+12\cdot(y-2)-2\cdot(z-1)=0$. Раскрыв скобки, получаем:

$$-6x+12y-2z-16=0 \Leftrightarrow 3x-6y+z+8=0.$$

Найдем расстояние от точки $M_0(1,5,9)$ до данной плоскости:

$$d=\frac{|3\cdot1-6\cdot5+9+8|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+1^2}}=\frac{|3-30+9+8|}{\sqrt{9+36+1}}=\frac{10}{\sqrt{46}}=\frac{10\sqrt{46}}{46}=\frac{5\sqrt{46}}{23}.$$

Задание 13. Найти угол между плоскостями $x+2y+2z-3=0$ и $2x-y+2z+5=0$.

Решение. Векторы нормалей плоскостей имеют координаты $\overline{N}_1=(1,2,2)$ и $\overline{N}_2=(2,-1,1)$. Косинус угла φ между плоскостями равен:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\cdot|\overline{N}_2|}=\frac{1\cdot2+2\cdot(-1)+2\cdot2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\frac{2-2+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{4}{9}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{4}{9}.$$

Задание 14. Написать каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x-y+2z-8=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}.$$

Решение. Найдем направляющий вектор прямой:

$$\bar{s} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}\ .$$

Для нахождения точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой, приведем исходные уравнения к виду $\begin{cases} -y + 2z = 8 - x \\ y - z = -3 - 2x \end{cases}$.

Полагая x равным произвольному числу x_0, например $x = 0$, получим систему $\begin{cases} -y + 2z = 8 \\ y - z = -3 \end{cases}$, решая которую находим $z = 5; y = 2$. Т.е. точка $M_0(0, 2, 5)$ лежит на данной прямой.

Записываем искомые канонические уравнения: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-5}{3}$.

Задание 15. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ и плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.

Решение. Найдем точку пересечения прямой и плоскости. Параметрические уравнения прямой запишутся так: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Для определения t подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости:

$$1 + t + 2 \cdot (-1 + 2t) - (-1 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Подставив t в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2, 1, 1).$$

3.3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 ПО ТЕМЕ «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

Задание 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6n+1)^2+2n^2}{(n+1)^3-8n^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(2n-1)^2}{4n^2+5n-2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-2n)^3}{n^3+4n^2-6}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^2+(2n+3)^2}{n^2-(2n+1)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot(n+1)!}{4n!+(n-1)!}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n}{(n+3)^2+(n-3)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+2}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2+(n-1)^2}{5n^2+n+2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+4)!-(n+2)!}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(n+1)^2}{8n^2-2n+5}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25n^2+1}-5n\right)$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^3+(n+1)^3}{5n^3-8n^2+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+2n}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^3-(2n+1)^3}{(4n-1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\cdot(n+7)}-n\right)$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(3n-1)^2}{7n^2-10n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+7n!}{(n+2)!}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-n+4}{(n-3)^2+(2n+3)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+8}-n\right)$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-1}{(n-1)^3-(3n+1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)\cdot n!}{(n+2)!+(n+1)!}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7-2n)^3}{6n^3+n+3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7n-\sqrt{49n^2+3}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2(n+1)-n(n^2-2)}{2n^3+4n^2-1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+2}{(2n+2)^2-(3n-1)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{9n^2+20n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{64n^2+n}-8n\right)$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-2n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n+2)!+3(n+1)!}{2(n+2)!-3(n+1)!}$

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n^2+n}{(n+1)^2+(n+5)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+5)!}{(n+6)!}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^2+(n-1)^2}{3n^2-4n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+5}-n\right)$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n}{(n+8)^2+(n-8)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n-n^2}-n\right)$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7n+1)\cdot n!}{9(n+1)!+7n!}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2-n}{(3-2n)^3+8n^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-n^2(n-2)}{2n^2+(n-1)^2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n-1}\right)$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^3-(n+2)^3}{n^2+4n+3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n-1)!+(4n+1)\cdot n!}$.

26. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n-1)^2}{15n^2-5n+2}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

27. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(3n+1)^3}{(2n+1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-3)}\right)$.

28. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^3+18n^2+14n}{(n+4)^3-(3n+1)^3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

29. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2+(n-2)^2}{n^2+2n-3}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)n!+(n+1)!}$.

30. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(n+6)^2}{4n^2-2n+5}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$.

Задание 2. Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{4}}$ б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{4x^2+23x+28}{x^3+64}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{e^{x^2}-1}$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+10}\right)^{x+8}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{7x^2+15x+2}{x^3+8}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin3x}$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-4x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x\cdot\mathrm{tg}2x}$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\mathrm{tg}(2\pi+2x)}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-3x-1}{x^2+3x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)}{\sin^2 4x}$

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+1}\right)^{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-6}{3x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{4x^2}$

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1-2x)}$

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+7}\right)^{2x+5}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x^2+4x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2 2x}{x\cdot\sin x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-x^2-x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x+7\pi)}$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{5x+3}\right)^{3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{\arcsin2x^2}$

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x-7}{3}}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^3-125}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{5x}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+2}{x^3+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{1-\cos x}$

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-9x+2}{x^3-7x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+6}\right)^{x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-2x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{3\operatorname{arctg}x}$

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+2x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi x+\pi)}{\ln(1+2x)}$

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{x^3-2x^2-5x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^2}{1-\cos x}$

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+9}\right)^{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin(\pi x+2\pi)}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{\frac{5x+8}{4}}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x-10}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x+5\pi)}{e^{3x}-1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+7}\right)^{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{x\cdot\left(2^{-3x}-1\right)}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+5}\right)^{3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{5x^2-6x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}+\pi\right)}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\cdot\operatorname{tg}(\pi x+\pi)}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x-2}\right)^{3x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^3+2x^2-x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+18}{x-2}\right)^{2x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x^3-13x-12}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin^2 6x^2}{\sqrt{x^4+1}-1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+4}{8x-2}\right)^{\frac{x+1}{4}}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+x-10}{x^2-4x+4}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-7}\right)^{x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{2x^2-3x-9}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\pi x}{1-\cos 2x}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x-3}{8x+2}\right)^{5x+4}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2-x-10}{x^3-x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 3x-1}{\ln\left(1-3x^2\right)}$

Задание 3. Исследовать функции на непрерывность. Найти скачок функции в точках конечного разрыва. Построить схематически график.

1. а) $y=\frac{x^2+2x}{x+2}$ б) $y=\begin{cases}-x, & x\le1\\ \frac{2}{x-1}, & x>1\end{cases}.$

2. а) $y=\frac{2}{(x-1)^3}$ б) $y=\begin{cases}\frac{1}{5}\left(2x^2+5\right), & x\le1\\ x-3, & x>1\end{cases}.$

3. а) $y=\frac{x^3-4x}{x}$ б) $y=\begin{cases}\frac{2}{(x-1)^2}, & x<1\\ 1-2x, & x\ge1\end{cases}.$

4. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{5-x}$ б) $y=\begin{cases}2x^2-1, & x<2\\ 2-x, & x\ge2\end{cases}.$

5. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{-x-6}$ б) $y=\begin{cases}x+3, & x<2\\ x^2-1, & x\ge2\end{cases}.$

6. а) $y=\frac{5x^2+1}{x-6}$ б) $y=\begin{cases}x^3-1, & x\le1\\ x-4, & x>1\end{cases}.$

7. а) $y=\frac{x^2-4x}{x+5}$ б) $y=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2+3, & x\ge0\end{cases}.$

8. а) $y=\frac{x^3+8}{x+2}$ б) $y=\begin{cases}e^{x-2}, & x\le1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}.$

9. а) $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$ б) $y=\begin{cases}1, & x\le 3\\ x^2-6, & x>3\end{cases}.$

10. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$ б) $y=\begin{cases}-\sqrt{2-x}, & x\le 0\\ 1-x^2, & x>0\end{cases}.$

11. а) $y=\dfrac{x-8}{x^2}$ б) $y=\begin{cases}4\cdot 3^x, & x<0\\ x+3, & x\ge 2\end{cases}.$

12. а) $y=\dfrac{x+3}{x(x+1)}$ б) $y=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\ x^2-1, & x\ge 0\end{cases}.$

13. а) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+2}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1\\ x, & x\ge -1\end{cases}.$

14. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+4}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{4}{(x-2)^2}, & x<2\\ 1+2x, & x\ge 2\end{cases}.$

15. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ б) $y=\begin{cases}\sqrt{x+4}, & x\ge 0\\ x-1, & x<0\end{cases}.$

16. а) $y=\dfrac{x}{(x+5)^2}$ б) $y=\begin{cases}(x-1)^2, & x\le 0\\ \dfrac{3}{x}, & x>0\end{cases}.$

17. а) $y=\dfrac{2x+1}{(x-2)^2}$ б) $y=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ 2x-1, & x>0\end{cases}.$

18. а) $y=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ б) $y=\begin{cases}2-x, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}.$

19. а) $y=\dfrac{x^2-5x}{x-5}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(3x^2+2), & x\le 1\\ 3-x, & x>1\end{cases}.$

20. а) $y=\dfrac{x^2-4}{x+5}$ б) $y=\begin{cases}2x-5, & x<3\\ x^2-7, & x\ge 3\end{cases}.$

21. а) $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x-2}$ б) $y=\begin{cases}4-x, & x<4\\ x^2-1, & x\ge 4\end{cases}.$

22. а) $y=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}, & x<3\\ x-3, & x\ge 3\end{cases}.$

23. а) $y=\dfrac{7x+9}{x-8}$ б) $y=\begin{cases}4\cdot 3^{-x}, & x>0\\ 2-x, & x\le 0\end{cases}.$

24. а) $y=\dfrac{x^2-x^3}{x-1}$ б) $y=\begin{cases}5x-1, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$

25. а) $y=\dfrac{6x^2-5x}{x}$ б) $y=\begin{cases}e^x, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}.$

26. а) $y=\dfrac{x^2+9x}{x+9}$ б) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ \dfrac{5}{x-1}, & x>1\end{cases}.$

27. а) $y=\dfrac{x^2-4x}{x+1}$ б) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ 4-4x, & x>1\end{cases}.$

28. а) $y=\dfrac{x^2+5x-6}{x+6}$ б) $y=\begin{cases}e^{x+1}, & x\le -1\\ \dfrac{1}{x+1}, & x>-1\end{cases}.$

29. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x-1}$ б) $y=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$

30. а) $y=\dfrac{x^2+7}{x+1}$ б) $y=\begin{cases}x^2-1, & x\le 1\\ \dfrac{1-x}{3}, & x>1\end{cases}.$

Задание 4. Найти производную функции $f(x)$, и ее значение в заданной точке x_0.

1. $f(x)=\ln(\sin 5x)-\dfrac{4x^2}{\pi}+\dfrac{4}{5}$; $x_0=\dfrac{\pi}{10}$ 2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{\sqrt[3]{x}}$; $x_0=8$

3. $f(x)=\ln\sqrt{(x-4)^3}+(x-4)^3$; $x_0=5$ 4. $f(x)=x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}$; $x_0=\dfrac{1}{\pi}$

5. $f(x)=4^x\cdot\sin\dfrac{\pi\cdot(2x+1)}{2};\ x_0=\dfrac{1}{2}$

6. $f(x)=\ln\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2-\operatorname{tg}x};\ x_0=\dfrac{\pi}{3}$

7. $f(x)=(x+1)\cdot e^{-2x};\ x_0=0$

8. $f(x)=x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x};\ x_0=\dfrac{2}{\pi}$

9. $f(x)=x\cdot\ln(\sin x+\cos x);\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$

10. $f(x)=\operatorname{arctg}(2x\sqrt{x})\,;\ x_0=\dfrac{1}{4}$

11. $f(x)=e^{x+1}(4x+5);\ x_0=\ln 2$

12. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{x};\ x_0=5$

13. $f(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot\sin(\ln x);\ x_0=e^{\pi/2}$

14. $f(x)=e^{\cos(\ln x)};\ x_0=e^{\pi/3}$

15. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-16}+x\right);\ x_0=5$

16. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right);\ x_0=\dfrac{3}{2}$

17. $f(x)=\cos e^x+e^x\sin e^x;\ x_0=\ln\dfrac{\pi}{3}$

18. $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{x+1};\ x_0=4$

19. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+5}-x\right);\ x_0=2$

20. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right);\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$

21. $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\,;\ x_0=\ln 5$

22. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1};\ x_0=4$

23. $f(x)=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,;\ x_0=\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

24. $y=\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{2};\ x_0=\dfrac{1}{2}$

25. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-1}{e^x+1};\ x_0=\dfrac{1}{2}$

26. $f(x)=\arcsin\left(\sqrt{2x}\right);\ x_0=\dfrac{1}{4}$

27. $f(x)=x\cdot\ln\left(e^x+e^{-x}\right);\ x_0=0$

28. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-x}{e^x}};\ x_0=0$

29. $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,;\ x_0=\sqrt{2}$

30. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\ x_0=\ln 2$

Задание 5. Вычислить производные следующих функций:

1. а) $y=(6x-5)^{\operatorname{arctg}x}$ б) $(x+y)^2(2x+y)^3=1$
2. а) $y=(\sin x)^{2x-3}$ б) $e^y+e^x+x^2+y^3=0$
3. а) $y=(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{x}}$ б) $\ln\dfrac{y}{x}-x+6y=0$
4. а) $y=(\cos x)^{e^x}$ б) $\operatorname{arctg} y+2x-y=0$

5. а) $y=\left(1+x^2\right)^{1/x}$ б) $e^{xy}+\frac{y}{x}=\cos 3x$

6. а) $y=(0{,}5x+1)^{\sin^2 x}$ б) $x^3+x^2y+y^2=0$

7. а) $y=(\sin x)^{\sqrt[4]{x}}$ б) $\operatorname{arctg} y=x^2+xy$

8. а) $y=\left(1+x^3\right)^{\sqrt{x}}$ б) $\sin 2y+\frac{x^3}{y}=7x$

9. а) $y=\left(4+x^3\right)^{\operatorname{tg} x}$ б) $x^3y^2-x=y\cdot\arcsin x$

10. а) $y=(\ln x)^{1/x}$ б) $y-\operatorname{tg}(x+5y)=e^x x^3$

11. а) $y=(1+\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} x}$ б) $e^{x-3y}+x^3y^2+4=0$

12. а) $y=(6x+1)^{1/x^2}$ б) $xy^3+x=\sin y$

13. а) $y=(x+3)^{x/(x+1)}$ б) $e^y=e^x-x\cdot y$

14. а) $y=(x+1)^{(1-x)/x}$ б) $xy-\cos x+\sin y=0$

15. а) $y=(\operatorname{ctg} x+1)^{1/\sin 2x}$ б) $2x^3+y^3=6xy^2$

16. а) $y=(\cos x)^{x^2}$ б) $y=6x^2-xy^2+\cos x$

17. а) $y=(3x+2)^{\arcsin x}$ б) $xy^2+\cos y-4xy=1$

18. а) $y=\left(2x^3-3x\right)^{1-x}$ б) $x-y^2+\cos x=\sin y$

19. а) $y=(\operatorname{tg} x)^{x^3}$ б) $x^4+x^2y^2+y=x$

20. а) $y=(10x+7)^{\operatorname{tg} x}$ б) $\ln y-6x+\frac{y}{x}=0$

21. а) $y=\left(x^2+2x\right)^{\ln x}$ б) $xy-7=\cos 2y-x$

22. а) $y=\left(x^3+1\right)^{\sin x}$ б) $\frac{x^4}{4}+\frac{y^2}{7}=xy$

23. а) $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{ctg} x}$ б) $\cos y=y^2+5x-4$

24. а) $y=\left(x^2+x\right)^{\ln 3x}$ б) $x^4-y^2+y\cdot\sin x=0$

25. а) $y=(\cos 4x)^{3/x}$ б) $x^3-y^2+yx=7x$

26. а) $y=(\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$ б) $x^3+y^3+5yx=10x$

27. а) $y=(\operatorname{ctg}(4x-1))^x$ б) $y=e^y+\frac{y^2}{x}+x^2$

28. а) $y=(6x-1)^{2x/(1-x)}$ б) $\cos y=xy^2+5$

29. а) $y=\left(3x^2+2x\right)^{\cos x}$ б) $x^3+y^2=6yx$

30. а) $y=(\sin x)^{x/2}$ б) $x-e^y=4y+x^2$

Задание 5. Функция $y=f(x)$ задана параметрически. Найти:
а) первую производную y'_x данной функции;
б) вторую производную y''_{xx} данной функции.

1. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3t-t^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t} \\ y=\operatorname{tg} t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=e^{-\cos^2 t} \\ y=e^{-\sin^2 t} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x=t+\ln(\cos t) \\ y=t+\ln(\sin t) \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x=\operatorname{tg}^2 t \\ y=\ln(\cos t) \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{4} \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^4} \\ y=\arcsin t^2 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}^2 t \\ y=\ln(\sin t) \end{cases}$. 14. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^t \\ y=\ln\left(1+e^{2t}\right) \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=4\left(1+t^2\right) \end{cases}$.

16. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x=t\cdot e^{-t^2} \\ y=\dfrac{1}{3}\cdot\left(3t-2t^3\right) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=2-\sin 2t \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\dfrac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\operatorname{arctg} t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=e^{t^2} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x=\cos t\cdot\sin t \\ y=\operatorname{tg}^2 t \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x=3t\cos t \\ y=3t\sin t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=\ln(\sin t) \\ y=e^{\cos 2t} \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x=t-\operatorname{arctg} t \\ y=\dfrac{t^4}{4}+1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x = \sqrt{1-2t} \\ y = \arccos\sqrt{2t} \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(3t + 2t^3\right) \\ y = t \cdot e^{t^2} \end{cases}$.

Задание 6. Найти dy и d^2y:

1. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ 2. $y = x\cdot(\ln x - 1)$ 3. $y = \dfrac{x^2}{\cos 2x}$
4. $y = \dfrac{x-1}{x^2+4}$ 5. $y = \mathrm{tg}^2 7x$ 6. $y = \dfrac{\sin x}{x}$
7. $y = \ln(\ln x)$ 8. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 9. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$ 11. $y = \dfrac{4x}{(x+2)^2}$ 12. $y = \dfrac{12x}{6-x^2}$
13. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 14. $y = \dfrac{1-x}{x^2+7x}$ 15. $y = \dfrac{4-2x}{1-x^2}$
16. $y = \dfrac{x^2+x}{x+4}$ 17. $y = \dfrac{5\ln x}{\sqrt{x+3}}$ 18. $y = \dfrac{x-2}{3-x^2}$
19. $y = x^2\ln\left(1+x^2\right)$ 20. $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$ 21. $y = \ln\left(x+\sqrt{x}\right)$
22. $y = \left(x^2+1\right)\cdot \mathrm{tg}\, x$ 23. $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$ 24. $y = x^4\cdot\ln\left(1+x^3\right)$
25. $y = -\cos^2 x + \dfrac{\ln x}{x}$ 26. $y = \dfrac{4x^2-8}{2x-1}$ 27. $y = 2x\cdot \mathrm{arctg}\, 2x$
28. $y = \dfrac{7x+1}{x-2}$ 29. $y = \arcsin^2 \dfrac{x}{2}$ 30. $y = \left(1+4x^2\right)\mathrm{arctg} 2x$

Задание 7. Показать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет данному уравнению.

1. $y = x^2\cdot\ln x^3$ $\quad xy' = 3x^2 - 2y$;
2. $y\cdot(\ln x + x) + y = 1$ $\quad xy' - y^2\ln x + y = 0$;
3. $y = e^{2x} + x\cdot e^{2x} + e^x$ $\quad y'' - 4y' + 4y = e^x$;
4. $y = \dfrac{(1-x)^3}{3} + (1-x)^2$ $\quad \dfrac{3y'}{x-3} + \dfrac{3y}{(1-x)^2} = 7 - 4x$;

5. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{x}$ $\qquad y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$;

6. $y=x^2\ln x+2x^2+3x+4$ $\qquad x\cdot y'''=2$;

7. $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{2}$ $\qquad y'+\dfrac{x+y}{x}=0$;

8. $y^2-x^2-y=0$ $\qquad y'\left(x^2+y^2\right)-2xy=0$;

9. $(1+x)=\dfrac{1}{2}\ln(2y+3)$ $\qquad y''(2y+3)-2(y')^2=0$;

10. $y=\left(x^2+1\right)\left(e^x+1\right)$ $\qquad y'-\dfrac{2x}{x^2+1}y=e^x\left(x^2+1\right)$;

11. $y=\dfrac{1}{x^2+5x}$ $\qquad y'+\dfrac{y}{x}+xy^2=0$;

12. $y=\cos^4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)$ $\qquad (y')^2=4yy''+y^2$;

13. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x}}$ $\qquad y''+\dfrac{y'}{x}+\left(1-\dfrac{1}{4x^2}\right)y=0 \quad (x\neq 0)$;

14. $y=e^x+2e^{2x}$ $\qquad y'''-6y''+11y'-6y=0$;

15. $y=x\cdot e^{-x^2/2}$ $\qquad xy'=\left(1-x^2\right)\cdot y$;

16. $y=\arcsin^2 x+3\arcsin x+5$ $\qquad y''\left(1-x^2\right)-xy'=2$;

17. $y=-\ln(1-x)$ $\qquad y''=y''\cdot e^x$;

18. $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$ $\qquad y'\cdot\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$;

19. $y=x+\sin 2x$ $\qquad y''+4y=4x$;

20. $y=x+\sqrt{x^2+1}$ $\qquad \left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0$;

21. $xy-\ln y=1$ $\qquad y^2+(xy-1)y'=0$;

22. $y=\dfrac{x-e^{-x^2}}{2x^2}$ $\qquad xy'+2y=e^{-x^2}+\dfrac{1}{2x}$;

23. $y=\sin 2x+5\cos 2x$ $\qquad y''+4y'=0$;

24. $y=\dfrac{1}{1+x+\ln x}$ $\qquad xy'+xy^2+y^2=0$;

25. $y=e^{2\arcsin x}$ $\qquad \left(1-x^2\right)y''-xy'-4y=0$;

26. $y=e^{-3x}\cdot(1+5x)$ $\qquad y''+6y'+9y=0$;

27. $y=\operatorname{tg} x-1+e^{-\operatorname{tg} x}$ $\qquad y'\cos^2 x=\operatorname{tg} x-y$;

28. $y = x\left(\ln x^2 + 4\right)$ $\qquad xy' - y = 2x$;

29. $y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$ $\qquad y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$;

30. $y = 3e^x \sin x$ $\qquad y'' - 2y' + 2y = 0$.

Задание 8. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{0{,}5 - \sin^2 x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

2. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\cos 3x - e^{-x}}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{16}{(4x-\pi)^2}}$

3. а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln^2 x}{(1-x)^2}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$

4. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{x - \frac{\pi}{3} - \sin 3x}{\cos\frac{3x}{2}}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$

5. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{1}{x + \ln x}}$

6. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$

7. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$

8. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 2-0} \left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$

9. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 4x - 1}{\sin^2 5x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}$

10. а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{x - \frac{\pi}{6} - \cos 3x}{\sin 6x}$ $\qquad$ б) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{2/(x-\ln x)}$

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)^{1/\ln x}$

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{1/(x-1)}$

14. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to +0}(\sin x+1)^{\ln x}$

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\operatorname{tg} x)^{2/(3x)}$

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{1/(x^2-2x)}$

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+3x)}{e^{6x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}(\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{2/(x^2-x-6)}$

19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x^2\right)^{1/\ln x}$

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}{x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x^2\right)^{1/\sin \pi x}$

23. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{1/(2x)}$

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\operatorname{tg} 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x\cdot\operatorname{ctg} x}{x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/(4x-\pi)}$

26. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2+2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/\ln(1+2x^2)}$

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x-3x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{1/(x-\pi/4)^2}$

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{2/(4x-x^2)}$

29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{1+\cos(x+3\pi)}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{1/(x-1)}$

30. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{x\cdot(1-\operatorname{tg}x)}{\cos 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

Задание 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. $f(x)=x^5-x^3-2x+1,\ [-2,0]$
2. $f(x)=x^3-3x+2,\ [-2,3]$
3. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{7}{2}x^2+12x-1,\ [1,5]$
4. $f(x)=-2x^3-3x^2+3,\ [-3,5]$
5. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+6x-7,\ [1,5]$
6. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+5,\ [-3,4]$
7. $f(x)=x^3-9x^2+15x-3,\ [0,6]$
8. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3,\ [-1,2]$
9. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1,\ [-1,5]$
10. $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-2x^2,\ [-3,3]$
11. $f(x)=(x+1)(x-2)^2,\ [2,3]$
12. $f(x)=2x^3+3x^2+6,\ [-3,2]$
13. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x-1,\ [0,4]$
14. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3,\ [1,3]$
15. $f(x)=x^3-3x^2-2,\ [0,2]$
16. $f(x)=x^4-2x^2+4,\ [-2,2]$
17. $f(x)=x^3-3x^2-9x-35,\ [-4,4]$
18. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2,\ [-3,1]$
19. $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x}+4x-8,\ [1,8]$
20. $f(x)=6x^2-x^3,\ [-1,6]$
21. $f(x)=-x^3+9x^2-24x+10,\ [0,3]$
22. $f(x)=x+\sqrt[3]{x},\ [-1,1]$
23. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{1}{3},\ [-2,2]$
24. $f(x)=x+2\sqrt{x},\ [0,4]$

25. $f(x)=x^2-2x\sqrt{x}+x-4, [0,4]$

26. $f(x)=x+2\sqrt{-x},\ [-4,0]$

27. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x-4,\ [-4,2]$

28. $f(x)=2x^3-x^2,\ [-2,2]$

29. $f(x)=x^4-2x^2+3,\ [-3,2]$

30. $f(x)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{3}x,\ [1,8]$

Задание 10. Выполнить полное исследование и построить график функции.

1. $y=1-2x^2-\dfrac{x^4}{4}$

2. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$

3. $y=4x^2+\dfrac{25}{x-1}$

4. $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$

5. $y=x^3-3x^2+3$

6. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+5$

7. $y=2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$

8. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

9. $y=-\ln\left(x^2-4x+5\right)$

10. $y=\sqrt[3]{3x^2+2x^3}$

11. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

12. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

13. $y=e^{1/(2-x)}$

14. $y=\left(x^2+2\right)\cdot e^{-x^2}$

15. $y=x^3+6x^2+9x$

16. $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$

17. $y=\dfrac{x^2}{2x-3}$

18. $y=(x+1)(x-2)^2$

19. $y=x\cdot\sqrt{8-x^2}$

20. $y=\sqrt{x^2-4x+5}$

21. $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$

22. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$

23. $y=e^{2x-x^2}$

24. $y=x^2e^{1-x}$

25. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

26. $y=1{,}5\cdot\sqrt[3]{x^2}-x$

27. $y=x\cdot e^{0{,}5\cdot\left(1-x^2\right)}$

28. $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$

29. $y=-x^4+2x^2+8$

30. $y=x\cdot(x-1)^2$

3.3.1 Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^3-(n+2)^3}{4n^2+20n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем числитель дроби, используя формулу сокращенного умножения (разность кубов): $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)$:

$$(n+4)^3-(n+2)^3=(n+4-n-2)\cdot\left((n+4)^2+(n+4)(n+2)+(n+2)^2\right)=$$
$$=2\cdot\left(n^2+8n+16+n^2+6n+8+n^2+4n+4\right)=2\cdot\left(3n^2+18n+28\right).$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^3-(n+2)^3}{4n^2+20n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(3n^2+18n+28\right)}{4n^2+20n+1}.$$

Высшей степенью и в числителе и в знаменателе является n^2. Выносим его за скобки и сокращаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(3n^2+18n+28\right)}{4n^2+20n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+18/n+28/n^2\right)}{n^2\left(4+20/n+1/n^2\right)}=$$
$$=2\cdot\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{6}{4}=1{,}5.$$

б) Домножим и разделим выражение под знаком предела на его сопряжение, после чего применим к числителю формулу разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Теперь рассчитаем предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 0\cdot\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 0\cdot\frac{2}{2} = 0\,.$$

Задание 2. Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+2x^2-x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$

Решение.

а) Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и бесконечно малой функции (БМФ):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x-3}-1\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5-x+3}{x-3}\right)^{2x+7} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7}.$$

Вводим новую переменную $y = x-3;\ x\to\infty$. Тогда $x = t+3;$ $2x+7 = 2(t+3)+7 = 2t+13$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{8}{y}\right)^{2y+13} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{8}{y}\right)^{2y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{8}{y}\right)^{13} =$$

$$= e^{8\cdot 2}\cdot 1 = e^{16}.$$

б) Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2+x-2=0,\ \ D=1+4\cdot 2=9,\ \ x_1=\frac{-1+3}{2}=1,\ x_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

$$x^3+2x^2-x-2 = x^2(x+2)-(x+2) = (x+2)\left(x^2-1\right) = (x+2)(x-1)(x+1).$$

Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sin 4x\cdot\sin x}{x^2}.$$

Далее воспользуемся теоремой о замене функций в пределе эквивалентными бесконечно малыми функциями:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sin 4x\cdot\sin x}{x^2}=\left|\begin{matrix}4x\to 0\Rightarrow\sin 4x\sim 4x\\ x\to 0\Rightarrow\quad \sin x\sim x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot 4x\cdot x}{x^2}=-8.$$

Задание 3. Исследовать функции на непрерывность. Найти скачок функции в точках конечного разрыва.

а) $y=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ б) $y=\begin{cases}2x+5, & x<-1\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge -1\end{cases}.$

Решение. Функция не определена в точке $x=1$. Пределы слева и справа:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=1;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=1.$$

В точке $x=1$ функция терпит устранимый разрыв.

б) Неэлементарная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Это значит, что в точке $x=0$ функция разрывна.

Исследуем эту точку:

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty;\ \lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Следовательно, в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв; $x=0$ – *точка разрыва второго рода*.

Исследуем дальше точку $x=-1$. Поскольку функция $y=f(x)$ неэлементарная, она может иметь разрыв в этой точке, где меняется ее аналитическое выражение: $\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}(2x+5)=3$, так как слева от точки $x=-1$ функция $f(x)=2x+5$ и $\lim\limits_{x\to -1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}{}^{1}\!/_{x}=-1$, так как справа от точки $x=-1$ функция $f(x)=1/x$.

Найденные односторонние пределы функции конечные, но различные. Поэтому в точке $x=-1$ функция имеет *разрыв первого рода*; ее скачок в этой точке равен: $h=\left|f(-1-0)-f(-1+0)\right|=\left|3-(-1)\right|=4$.

Задание 4. Найти производную функции $f(x)=\sqrt[5]{4-3x^5}+4^x\cdot\frac{2}{\ln 4}$, и ее значение в заданной точке $x_0=1$.

Решение. Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных, находим:

$$f'(x)=\left((4-3x^5)^{1/5}+4^x\cdot\frac{2}{\ln 4}\right)'=\left((4-3x^5)^{1/5}\right)'+\frac{2}{\ln 4}\cdot\left(4^x\right)'=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\left(4-3x^5\right)^{-4/5}\cdot\left(4-3x^5\right)'+\frac{2}{\ln 4}\cdot 4^x\cdot\ln 4=\frac{1}{5}\cdot\left(4-3x^5\right)^{-4/5}\cdot\left(-15x^4\right)+$$
$$+2\cdot 4^x=-\frac{3x^4}{\sqrt[5]{\left(4-3x^5\right)^4}}+2\cdot 4^x.$$

Теперь вместо x подставим 1: $f'(1)=-\frac{3\cdot 1^4}{\sqrt[5]{\left(4-3\cdot 1^4\right)}}+2\cdot 4^1=-3+8=5$.

Задание 5. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=(5x+1)^{x/(x+2)}$ б) $e^y+xy=e$

Решение.

а) Прологарифмируем обе части равенства $y=(5x+1)^{x/(x+2)}$:

$$\ln y=\ln(5x+1)^{x/(x+2)}\Leftrightarrow \ln y=\frac{x}{x+2}\cdot\ln(5x+1).$$

Продифференцируем последнее равенство, причем в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения, а затем – производную частного:

$$(\ln y)' = \left(\frac{x}{x+2}\cdot\ln(5x+1)\right)' = \left(\frac{x}{x+2}\right)'\cdot\ln(5x+1) + \frac{x}{x+2}\cdot(\ln(5x+1))'.$$

Тогда: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x'\cdot(x+2) - x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}\cdot\ln(5x+1) + \dfrac{x}{x+2}\cdot\dfrac{(5x+1)'}{5x+1}$;

$$\frac{y'}{y} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2}\cdot\ln(5x+1) + \frac{x}{x+2}\cdot\frac{5}{5x+1};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{(x+2)^2}\cdot\ln(5x+1) + \frac{5x}{5x^2+11x+2}.$$

Отсюда $y' = y\cdot\left(\dfrac{2\ln(5x+1)}{(x+2)^2} + \dfrac{5x}{5x^2+11x+2}\right)$ или:

$$y' = (5x+1)^{x/(x+2)}\cdot\left(\frac{2\ln(5x+1)}{(x+2)^2} + \frac{5x}{5x^2+11x+2}\right).$$

б) Дифференцируем обе части данного равенства, имея в виду, что $y = y(x)$:

$$e^y\cdot y' + y + x\cdot y' = 0.$$

Отсюда находим: $y'\cdot\left(e^y + x\right) = -y \Rightarrow y' = -\dfrac{y}{e^y + x}$.

Задание 5. Функция $y = f(x)$ задана параметрически. Найти:

а) первую производную y'_x данной функции;

б) вторую производную y''_{xx} данной функции.

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

Решение.

а) Первая производная заданной параметрической функции рассчитывается по формуле:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь $x'_t = \left(\sin^3 t\right)' = 3\sin^2 t \cdot \cos t$; $y'_t = \left(\cos^3 t\right)' = -3\cos^2 t \cdot \sin t$, откуда:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{-3\sin^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t;\ (y'_x)'_t = \left(-\operatorname{tg} t\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = \dfrac{1}{3\sin t \cdot \cos^4 t}$.

Задание 6. Найти dy и $d^2 y$, если $y = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{1-x^2}$.

Решение.

а) Найдем первую производную. Продифференцируем функцию по переменной x:

$$y'(x) = \left(\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{1-x^2}\right)' = \left(x^2 - 1\right)' \cdot e^{1-x^2} + \left(x^2 - 1\right)\left(e^{1-x^2}\right)' = 2xe^{1-x^2} +$$

$$+ \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{1-x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)' = 2xe^{1-x^2} + \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = 2xe^{1-x^2} -$$

$$- \left(2x^3 - 2x\right) \cdot e^{1-x^2} = e^{1-x^2} \cdot \left(2x - 2x^3 + 2x\right) = \left(4x - 2x^3\right) \cdot e^{1-x^2}.$$

Тогда $dy = \left(4x - 2x^3\right) e^{-x^2}$.

Найдем вторую производную заданной функции:

$$y''(x) = \left(\left(4x - 2x^3\right) \cdot e^{1-x^2}\right)' = \left(4x - 2x^3\right)' \cdot e^{1-x^2} + \left(4x - 2x^3\right) \cdot \left(e^{1-x^2}\right)' =$$

$$= \left(4 - 6x^2\right) \cdot e^{1-x^2} + \left(4x - 2x^3\right) \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = e^{1-x^2} \cdot \left(4 - 6x^2 - 8x^2 + 4x^4\right) =$$

$$= e^{1-x^2} \cdot \left(4 - 14x^2 + 4x^4\right).$$

Запишем дифференциал второго порядка: $d^2 y = e^{1-x^2} \cdot \left(4 - 14x^2 + 4x^4\right)$.

Задание 7. Показать, что функция $y=-x-\frac{1}{2}\sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y''+\operatorname{tg} x\cdot y'=\sin 2x$.

Решение.

Дважды дифференцируя данную функцию, найдем $y'=-1-\cos 2x$, $y''=2\sin 2x$. Подставим эти выражения для первой и второй производных в данное уравнение:

$$2\sin 2x+(-1-\cos 2x)\cdot \operatorname{tg} x=\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x-2\cos^2 x\cdot \operatorname{tg} x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 2t-2\cos t\cdot \sin t=0 \Leftrightarrow 0\equiv 0.$$

Задание 8. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+5x)}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{8}{16x^2-8\pi x+\pi^2}}$

Решение:

а) Так как $e^{2\cdot 0}-1=0;\ \ln(1+5\cdot 0)=\ln 1=0$, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(\ln(1+5x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{5}{1+5x}}=\frac{2\cdot e^{2\cdot 0}}{\frac{5}{1+5\cdot 0}}=\frac{2\cdot 1}{5}=\frac{2}{5}.$$

б) Введем обозначение: $f(x)=\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{8}{16x^2-8\pi x+\pi^2}}$. С помощью непосредственной подстановки в данную функцию числа $x=\frac{\pi}{4}$, получим неопределенность типа 1^{∞}. Прологарифмируем эту функцию:

$$\ln f(x)=\frac{8\cdot\ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{16x^2-8\pi x+\pi^2}.$$

Последнее выражение в точке представляет собой неопределенность типа

$\frac{0}{0}$. Для устранения этой неопределенности найдем с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln f(x)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{8\ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{16x^2-8\pi x+\pi^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(8\ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)'}{\left(16x^2-8\pi x+\pi^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{8\left(-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{(32x-8\pi)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{4x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'}{(4x-\pi)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, получили $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln f(x) = -\frac{1}{4}$. В силу непрерывности логарифмической функции отсюда следует, что:

$$\ln\left(\lim_{x\to\pi/4} f(x)\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x\to\pi/4} f(x) = e^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

Задание 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-8x^2+3$ на отрезке $[-2{,}2]$.

Решение. Область определения функции – вся числовая ось. Находим производную: $y'=4x^3-8x$ и стационарные точки $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$.

Находим вторую производную: $y''=12x^2-8$. Так как $f''(0)=-16<0$, в точке $x=0$ имеем максимум, равный $f(0)=3$.

Точки $x_{2,3}$ принадлежат концам промежутка. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(-2)=(-2)^4-8\cdot(-2)^2+3=-13;\ f(2)=2^4-8\cdot 2^2+3=-13.$$

Итак, наибольшее значение равно $y_{\text{наиб}}=f(0)=3$, а наименьшее –

$y_{\text{наим}} = f(-2) = f(2) = -13$.

Задание 10. Выполнить полное исследование и построить график функции.

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Решение.

1. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$. Она равна нулю в точке $x = 0$.

2. Вычислим первую производную данной функции:

$$y' = \frac{\left(x^4\right)' \cdot \left(x^3 - 1\right) - x^4 \cdot \left(x^3 - 1\right)'}{\left(x^3 - 1\right)^2} = \frac{4x^3\left(x^3 - 1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^2} = \frac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$$

3. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

Приравнивая первую производную функции нулю, находим ее критические точки (с учетом тех точек, где производная не существует): $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{4},\ x_3 = 1$. Данные точки разбивают область определения функции на четыре промежутка монотонности: $(-\infty; 0), (0;1), \left(1; \sqrt[3]{4}\right), \left(\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$. Так как $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{4}, +\infty\right)$ и $y' < 0$ при $x \in (0;1) \cup \left(1; \sqrt[3]{4}\right)$, то в промежутках $(-\infty; 0)$ и $\left(\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$ функция возрастает, а на промежутках $(0;1)$ и $\left(1; \sqrt[3]{4}\right)$ – убывает. Точка $x = 0$ является точкой локального максимума $\left(y_{\max} = y(0) = 0\right)$, а точка $x = \sqrt[3]{4}$ – точкой локального минимума, $y_{\min} = y\left(\sqrt[3]{4}\right) = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

4. Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Для этого исследуем знак второй производной:

$$y'' = \left(\frac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(6x^5 - 12x^2\right) \cdot \left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 - 4x^3\right) \cdot 2 \cdot \left(x^3 - 1\right) \cdot 3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^4} =$$

$$=\frac{\left(6x^5-12x^2\right)\cdot\left(x^3-1\right)-6x^2\left(x^6-4x^3\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=\frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}.$$

Так как $y''>0$ при $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ и $y''<0$ при $x\in\left(-\sqrt[3]{2};0\right)\cup\left(0;1\right)$, то на промежутках $\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(1;+\infty\right)$ график функции является вогнутым (выпуклым вниз), а на промежутках $\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$ и $\left(0;1\right)$ график функции является выпуклым (выпуклым вверх). При этом точка $x=-\sqrt[3]{2}$ области определения функции, при переходе через которую вторая производная меняет знак, задает точку перегиба, $y\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$. Точка $x=1$ не задает точку перегиба, поскольку она не входит в область определения функции.

5. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая $x=1$, поскольку $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4}{x^3-1}=\infty$.

Найдем наклонные асимптоты графика функции $f(x)=\frac{x^4}{x^3-1}$. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$. Для определения ее параметров последовательно вычислим два предела:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x\cdot\left(x^3-1\right)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

В результате получаем, что наклонной асимптотой является прямая $y=x$.

График функции изображен на рисунке 3.1.

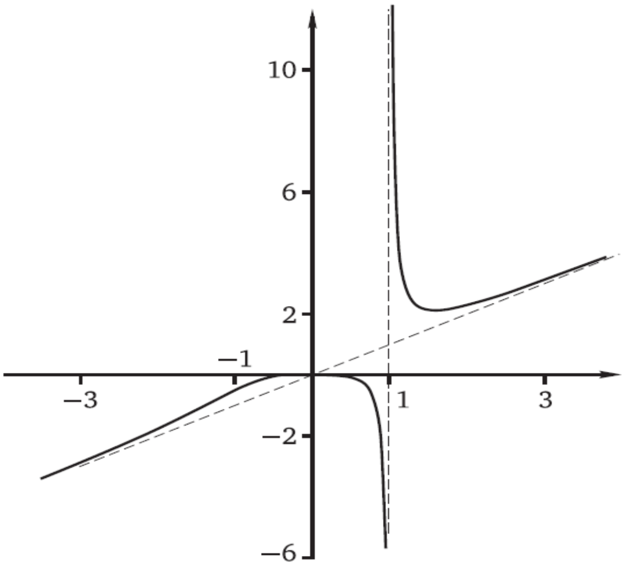


Рис. 3.1

3.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы, операции над ними и их свойства.
2. Определители второго и третьего порядка.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Определители n - го порядка.
4. Свойства определителей n - го порядка. Основные методы вычисления определителей n - го порядка.
5. Ранг матрицы и его нахождение.
6. Обратная матрица, её вычисление. Матричные уравнения.
7. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных систем линейных уравнений.
8. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса).
10. Однородные системы уравнений. Структура решений однородной системы. Фундаментальная система решений.
11. Векторы в пространстве R^3. Линейные операции над векторами и их свойства. Проекция вектора на ось.
12. Линейная зависимость и независимость векторов. Разложение вектора по базису. Направляющие косинусы вектора.
13. Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения.
14. Векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и приложения. Двойное векторное произведение.
15. Прямая линия на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости.

16. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, расстояние от данной точки до данной прямой (на плоскости).
17. Кривые второго порядка. Окружность, эллипс.
18. Кривые второго порядка. Гипербола, парабола.
19. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости.
20. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
21. Прямая линия в пространстве. Различные виды уравнений прямой.
22. Угол между двумя прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.
23. Прямая и плоскость в пространстве.
24. Определение и способы задания функций.
25. Монотонная, обратная и ограниченная функции. Гиперболические функции.
26. Числовая последовательность. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел числовой последовательности.
27. Предел числовой функции. Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей. Первый и второй замечательный пределы.
28. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых.
29. Односторонние пределы. Определение непрерывности и свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции и их классификация.
30. Определение производной, её геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
31. Связь непрерывности с дифференцируемостью. Таблица производных и основные правила дифференцирования функций.
32. Производная неявной функции. Понятие о логарифмической производной.
33. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Производная параметрической функции.
34. Дифференциал функции. Геометрический смысл и свойства дифференциала. Дифференциал сложной функции.
35. Дифференциалы высших порядков.
36. Основные теоремы дифференциального исчисления.
37. Виды неопределённостей. Правило Лопиталя вычисления пределов.
38. Условия возрастания и убывания функций. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
39. Точки экстремума. Необходимые условия локального экстремума. Достаточные признаки существования локального экстремума.
40. Асимптоты графика функции. Наибольшее и наименьшее значение функции (глобальный экстремум). Построение графиков функций.

IV. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1 ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНЫХ ИЗДАНИЙ.

4.1.1 Основная литература

1. Астровский, А.И. Высшая математика. 2-е изд. В 2 кн. Кн. 1: Учебно-методический комплекс/ А.И. Островский, Е.В. Воронкова, О.П. Степанович. – Минск: Изд-во МИУ, 2007 – 384 с.
2. Анкилов, А.В. Высшая математика: учебное пособие. В 2 ч. Ч.1 / А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов, Ю.А. Решетников; под общей редакцией П.А. Вельмисова. – 2-е изд. – Ульяновск, УлГТУ, 2011. – 250 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов / ред. Ефимов Н. В. – 17-е изд., стер. – СПб: Профессия, 2001. – 199 с.
4. Макарук, С.Ф. Конспект лекий по высшей математике для студентов экономических специальностей первого курса заочного обучения/ Макарук С.Ф., Дворниченко А.В. – Брест: Изд-во БГТУ, 2006 – 65 с.
5. Высшая математика: задачник: учеб. пособие / Е.А. Ровба [и др]. – Минск: Высш. шк., 2012. – 319 с. : ил.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, 7-е изд, стер. – СПб, Лань, 2010, 464 с.
7. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 216 с.
8. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике, 1 курс. /К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 6-е изд. – М., Айрис-пресс, 2007. – 576 с. : илл. – (Высшее образование).
9. Демин, С.Е. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. пособие / С.Е. Демин, Е.Л. Демина; М-во образования и науки РФ; ФГАО ВО «УрФУ им. первого президента России Б.Н. Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал УрФУ), 2016 – 272 с.
10. Губкина, Е.В. Простейшие приложения дифференциального исчисления: учебное пособие./ Губкина Е.В., Прохорович М.А.– Горно-Алтайск: РИО ГАГУ – 2012, 81 с.

4.1.2 Дополнительная литература

11. Воробейчикова, О.В. Высшая математика I Основы векторной алгебры. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Численные методы. *Краткие методические указания и контрольные задания.*/ Воробейчикова О.В., Колесникова С.И. – Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники – 2007 – 67 с.
12. Андреева, С.Г. Типовые расчеты по математике для студентов экономических специальностей: сборник задач / С.Г. Андреева, М.А. Корытова, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 142 с.
13. Судавная, О.И.. Типовые расчеты по высшей математике. Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения. I семестр./ Судавная О.И. Фролов С.В. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 46 с.

4.2. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

заочная форма получения высшего образования[1]

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1.	Матрицы, действия над ними. Определители, свойства определителей. Системы линейных алгебраических уравнений	2	2					Контрольная работа
2.	Векторы. Линейными операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и их свойства	2	2					
3.	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	2	2					
4	Производная функции, ее смысл в различных задачах. Основные правила дифференцирования. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Приложения дифференциального исчисления	4	2					
	Итого за семестр	10	8					Экзамен

[1] Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студента