УДК 51

СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Качанов Игорь Павлович, Крамковский Михаил Александрович,
студенты 2-го курса Кафедры «Автомобильные дороги»
(Научный руководитель – Забавская А.В, старший преподаватель)

Интерполяция - это метод построения новых точек данных в диапазоне дискретного набора известных точек данных. Этот метод можно разделить на два случая: случай, когда пространственный фактор не учитывается, и тот случай, когда он учитывается. Сначала мы рассмотрели интерполяцию, где методы, не учитывают пространственность данных. Эти методы используются для введения недостающего значения данных временного ряда в конкретную пространственную единицу, не учитывая пространственных факторов. Это означает, что дискретные точки данных, указанные в данных временных рядах, используются для смешения значений между точками. Существует три основных метода интерполяции: кусочно-постоянная интерполяция, линейная интерполяция и нелинейная интерполяция. Есть несколько методов нелинейной интерполяции, такие как полиномиальная интерполяция, сплайн интерполяция и т. д.

Немного о теоретической основе интерполяциями сплайнами. Пусть у вас имеются значения функции, измеренные в нескольких точках, возникает задача, как найти значения функции в промежуточных точках. Более формально, пусть нам даны значения некоторой функции в некоторых точках области определения. Перед нами стоит задача наиболее точно определить вид этой функции по заданным значениям. Один из возможных подходов - прибегнуть к интерполяции сплайнами.

Сплайн – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке $[\mathrm{x_i}, \mathrm{x_{i+1}}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Степенью сплайна называется максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов, а дефектом сплайна - разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на [a,b] производной. Например, непрерывная ломанная является сплайном степени 1 с дефектом 1 (так как сама функция – непрерывна, а первая производная уже разрывна).

На практике наиболее часто используются кубические сплайны $S_3(x)$ - сплайны третьей степени с непрерывной, по крайней мере, первой производной.

При этом величина $m_i = S'_3(x_i)$, называется наклоном сплайна в точке (узле) x_i.

Разобьём отрезок [a,b] на N равных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i = a + ih$, i=0,1,…,N-1, $x_N = b, h = (b-a)/N$.

Если в узлах x_i, x_{i+1}, заданы значения f_i, f_{i+1}, которые принимает кубический сплайн, то на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ он принимает вид:

$$s_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^\wedge 2}{h^3} f_i + \frac{(x-x_i)^\wedge 2(2(x_{i+1}-x)+h)}{h^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1}-x)^\wedge 2(x-x_i)}{h^2} m_i + \\ + \frac{(x-x_i)^\wedge 2(x_{i+1}-x)}{h^2} m_{i+1} \qquad (1)$$

В самом деле, это легко проверить, рассчитав $s_3(x)$ и $s'_3(x)$ в точках x_i, x_{i+1}.

Можно доказать, что если многочлен третьей степени принимает в точках x_i, x_{i+1} значения f_i, f_{i+1} и имеет в этих точках производные, соответственно, m_i, m_{i+1}, то он совпадает с многочленом (1).

Таким образом, для того, чтобы задать кубический сплайн на отрезке, необходимо задать значения f_i, m_i $i = 0,1 \dots, N$ в $N+1$ в узле x_i.

Кубический сплайн, принимающий в узлах те же значения , что и некоторая функция, называется интерполяционным и служит для аппроксимации функции f на отрезке [a,b] вместе с несколькими производными.

Существует несколько способов задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.

Способ 1 (упрощенный):

Положим:

$$m_i = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}, i = 1,2, \dots, N-1, (2)$$

$$m_0 = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, m_n = \frac{3f_N - f_{N-2} - 3f_{N-1}}{2h} \qquad (3)$$

Данные формулы являются формулами численного дифференцирования второго порядка точности относительно шага $h = (b-a)/N$

Способ 2:

Если у нас имеются значения f'_i производной f_i в узлах x_i, то полагаем $m_i = f'_i$, $i = 0,1, \dots, N$.

Первые два способа называются локальными, так как с их помощью сплайн строится отдельно на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, посредством применения формулы (1). Построенные таким образом сплайны, как правило, имеют деффект, равный двум, так как непрерывность первой производной в узлах соблюдается, а непрерывность второй производной при таком построении не гарантируется.

Способ 3 (глобальный):

Пусть $S''_3(x_i+0)$ - значение $S''_3(x)$ в узле x_i справа, его мы найдем из выражения (1), а $S''_3(x_i-0)$ значение $S''_3(x)$ в узле x_i слева – оно находится из соответствующего выражения $S_3(x)$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, которое получается из (1) заменой i на $i-1$.

Тогда получим:

$$s''_3(x_i+0) = \frac{-4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$$

$$s''_3(x_i-0) = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{f_i-f_{i-1}}{h}$$

Потребуем непрерывность $S''_3(x)$ в узлах:

$s''_3(x_i-0) = s''_3(x_i+0)$, i=1,2,…, N-1.

Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно наклонов:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(f_{i+1}-f_{i-1})}{h}, i = 1,2,\dots,N-1$$

Так как система содержит N+1 неизвестных, необходимо задать два дополнительных условия, называемые краевыми.

Приведем три варианта задания краевых условий:
1) В случае, когда известны $m_N = f'_N$ задаем

$m_0 = f'_0,\ m_N = f'_N$.

2) Производные f'_0, f'_N аппроксимируем формулами численного дифференцирования третьего порядка точности:

$$m_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3)$$

$$m_N = \frac{1}{6h}(11f_N - 18f_{N-1} + 9f_{N-2} - 2f_{N-3}) \quad . (6)$$

3) Иногда бывают известны значения на концах отрезка [a,b], т.е. величины $f''_0 = f''(a), f''_N = f''(b)$. Тогда требования $S''_3(a) = f''_0, S''_3(b) = f''_N$ приводят к краевым условиям

$$m_0 = \frac{-m_1}{2} + \frac{3f_1 - f_0}{2h} - \frac{h}{4}f''_0$$

$$m_N = \frac{-m_{N-1}}{2} + \frac{3f_N - f_{N-1}}{2h} + \frac{h}{4}f''_N \qquad (7)$$

Условия (5)-(7) можно комбинировать , т.е. выбирать их независимо в левом и правом узлах.

Система (4) при всех рассмотренных краевых условиях имеет единственное решение, которое можно найти с помощью методов прогонки и итераций.

Таким образом, решая систему (4) при выбранных краевых условиях, находим наклоны m_i i=0,1,…,N, во всех узлах. Затем по формуле (1) задаем сплайн на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, i=0,1,…,N-1. Построенный данным глобальным способом сплайн $S_3(x)$ имеет дефект не больше единицы, так как этот сплайн обладает на отрезке [a,b] непрерывной второй производной $S''_3(x)$.

Мы считаем ,что сплайн-интерполяция в дорожном строительстве широко используется в задачах геометрического моделирования. Интерполяция используется в программе «Free T-Geoplan6». Программа делает это в полуавтоматическом режиме ,а именно: самостоятельно интерполирует между выбранными точками точками и в последующем преобразует кривые ,получившиеся в результате соединения проинтерполирован-ных точек, в сплайны с разрывами и подписями, где в итоге для корректного построения необходимо интерполировать строго по возрастанию высот.