УДК 51

ЦЕПИ МАРКОВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЁТАХ

Михайлова Дарья Владимировна, Стреж Александра Витальевна,
студенты 2-го курса кафедры «Автомобильные дороги»
(Научный руководитель – Забавская А.В., старший преподаватель)

Цепь Маркова – ряд случайных событий с конечным или же счётным количеством исходов, где возможность наступления всякого события находится в зависимости от состояния, достигнутого в прошлом. Конфигурации или же переходы множества естественных и искусственных систем нередко носят в себе случайный характер. Цепочка этих переходов из одного состояния в другое имеет возможность быть описана через вероятностные матрицы, владеющие определенными свойствами. Теория Марковских цепей считается инструментом для анализа этих процессов, в которых переход из одного состояния в другое находится в зависимости лишь только от ее состояния в реальное время, а не в зависимости от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (рис.1). Следовательно, главные объекты общих цепей Маркова есть переходные вероятности и начальное распределение возможностей.

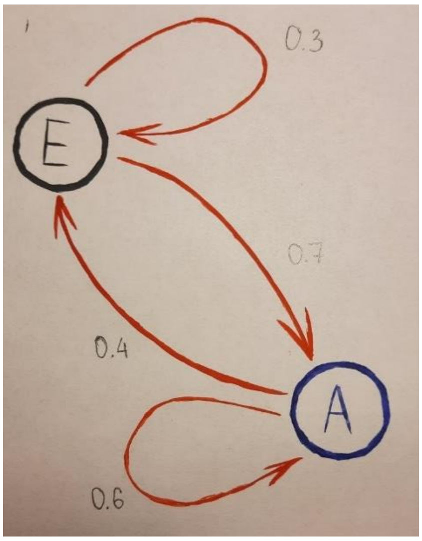

Рисунок 9 – Цепь с двумя состояниями

Рассмотрим так называемые однородные цепи Маркова, когда переходные вероятности pij(m) не зависят от момента времени tm, а зависят только от индексов i и j. Так как система может находиться в одном из n состояний, то полная вероятностная картина изменений состояния системы S задается матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} P11 & P12 & K & P1n \\ P21 & P22 & K & P2n \\ K & K & K & K \\ Pn1 & Pn2 & K & Pnn \end{bmatrix}$$

Данную матрицу называют переходной, элементы данной матрицы удовлетворяют следующим условиям:

1) $0 \le pij \le 1$;
2) $\sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1$ для любого значения i (i = 1,2, …, n), (сумма вероятностей по строчкам).

Пример использования цепи Маркова:

В процессе опроса инженеров, использующих в строительстве 3 марки щебня: марки A, марки B, марки C, им был задан вопрос о том, какую торговую марку они бы выбрали для следующей покупки.

1) Среди инженеров, использующих марку A 20% сказали что выберут опять эту же марку, 50% сказали, что они бы перешли на марку B, а 30% заявили, что предпочли бы марку C.
2) Среди инженеров, использующих марку B 20% сказали, что перейдут на марку A, в то время как 70% заявили, что приобрели бы опять автомобиль марки B, а 10% заявили, что в следующий раз предпочли бы марку C.
3) Среди инженеров, использующих марку C 30% ответили, что перешли бы на марку A, 30% сказали, что перешли бы на марку B, а 40% заявили, что остались бы верны той же марке C.

Вопрос 1 : Если для строительства будет приобретён щебень марки A, то какова вероятность, что в следующий раз для строительства будет приобретён щебень марки C?

Вопрос 2 : Если при покупке щебня в первый раз инженер подбросил монету, выбирая между щебнем марки B и C, то какова вероятность, что в третий раз он выберет щебень марки B?

Решение:

Матрица перехода для этого события имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Для ответа на первый вопрос имеем: p(0)= (1,0,0), поэтому

$$p(1)=(1,0,0)\times\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}=(0.2,0.5,0.3).$$

Вероятность того, что при покупке щебня во второй раз будет выбрана марка С, равна 0.3. Для ответа на второй вопрос требуется найти

$$T(2)=\begin{bmatrix}0.23 & 0.54 & 0.23\\ 0.21 & 0.62 & 0.17\\ 0.24 & 0.48 & 0.28\end{bmatrix}$$

Для (2) имеем p(2)=(0,0.5,0.5) и

$$p(2)= (0,0.5,0.5)\times\begin{bmatrix}0.23 & 0.54 & 0.23\\ 0.21 & 0.62 & 0.17\\ 0.24 & 0.48 & 0.28\end{bmatrix}= (0.225,0.55,0.225)$$ поэтому вероятность того, что во второй раз выберут щебень марки А равна 0.225.

В инженерной практике часто возникает проблема моделирования процессов случайного изменения состояний в исследуемом объекте. Техническое состояние объекта можно охарактеризовать дискретными состояниями: исправное – неисправное, заряжен – неактивен и т. д. Количество персонала меняется незаметно, количество объектов, ожидающих обслуживания в очереди, и многое другое. Таким образом, с помощью цепи Маркова можно наиболее точно и полно произвести любой технический расчет даже если предыдущие аналогичные расчёты имели положительные или наоборот отрицательные показатели.