УДК 51:004.9

ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Наварич Дмитрий Леонидович, *студент 2-го курса*
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
(Научный руководитель – Хотомцева М.А.., старший преподаватель)

Мы привыкли к тому, что у каждой поверхности – например, у листа бумаги, у футбольной или велосипедной камеры – две стороны. Ясно, что перейти с одной стороны на другую можно, только если каким-то образом перейти через край либо пройти сквозь поверхность.

Рисунок 1 – Лист бумаги

Если свернуть полоску бумаги в кольцо и склеить концы, то она, как была двусторонней, так и останется. А вот если, прежде чем склеивать, перекрутить один из концов, получится «лист Мебиуса», иначе называемый «лентой Мебиуса». Его свойства независимо друг от друга открыли два немецких математика – Август Фердинанд Мебиус и Иоганн Бенедикт Листинг, описавшие его в 1862–65 годах.

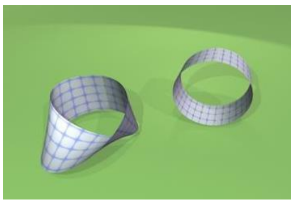

Рисунок 2 – Лист Мёбиуса

Во-первых, если путешествуешь по листу Мёбиуса, то, даже если нигде не пересечешь край, все равно можно побывать с обеих сторон полоски! Поэтому и говорят, что лист Мёбиуса имеет не две, а только одну сторону: это ***односторонняя поверхность***. Разумеется, если начать красить одну из сторон, то выкрашенным окажется весь лист, даже если мы и не перейдем через его край. Поэтому, собственно и говорят, что у листа Мебиуса не две, а только одна сторона – это односторонняя поверхность.

Обычное кольцо – это двусторонняя поверхность с краем (даже с двумя), но есть и двусторонние поверхности без края: например, сфера или тор.

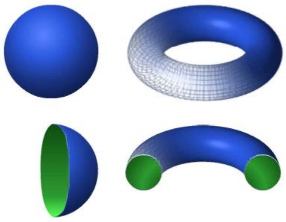

Рисунок 3 – Двусторонние поверхности

Лист Мебиуса – это односторонняя поверхность с краем. А существуют ли односторонние поверхности без края (двусторонними поверхностями без края являются, например, сфера или тор)? Оказывается, в трехмерном пространстве такие поверхности могут существовать только если разрешать им пересекать сами себя. Такова бутылка Клейна, названная в честь великого немецкого математика Августа Клейна. Она получается, если хитрым образом соединить концы трубы, которая может пересечь сама себя. Считается, что, проходя через линию пересечения, мы просто продолжаем свой путь, не отвлекаясь на нее. Для наглядности можно рассмотреть также продольный разрез бутылки Клейна.

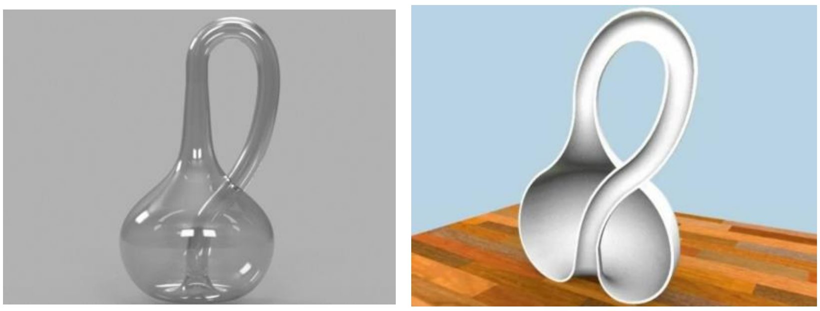

Рисунок 4 – «Бутылка Клейна» в стекле и в разрезе

Нетрудно видеть, что поперечный разрез бутылки Клейна напоминает лист Мебиуса, и действительно, оказывается, ее можно сделать, склеив два листа Мебиуса краями (с самопересечением). В том, что бутылка Клейна – действительно односторонняя поверхность, можно убедиться и с помощью двумерных существ. Односторонние поверхности фигурируют во многих произведениях литературы и искусства, например, на скульптуре Макса Билла. Лист Мебиуса изображен на ряде эмблем, связанных с математикой, в том числе на значке механико-математического факультета МГУ.

Теперь дадим общее определение односторонней поверхности: гладкая поверхность называется односторонней, если не существует ненулевого гладкого вектора поля нормалей, определенного на всей поверхности. То есть, проще говоря: если на гладкой поверхности существует хотя бы одна точка и хотя бы один замкнутый, не пересекающий границы поверхности контур, при обходе по которому направление нормали изменится на противоположное, то поверхность называется односторонней. Если для любой точки поверхности и любого замкнутого контура, не пересекающего границы поверхности, окажется, что после его обхода направление нормали не изменится, то поверхность называется двусторонней.

Теперь рассмотрим доказательство односторонней поверхности.

Пусть V — гладкая параметризованная поверхность, определяемая векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ и состоящая из регулярных точек. В каждой точке $M(u,v)$ поверхности V определен ненулевой нормальный вектор $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.Обе эти вектор-функции являются гладкими. Поэтому в достаточно малой окрестности точки $M(u,v)$ все нормальные векторы поверхности V образуют векторное поле (то есть в каждой точке задан единственный нормальный вектор). В этой же окрестности существует другое векторное поле, а именно $-\mathbf{N}$.

Теперь рассмотрим так называемую поверхность Мёбиуса (или лист Мёбиуса, пояс Мёбиуса), которая получается из прямоугольной полоски бумаги, если ее перекрутить один раз и склеить (рис. 2). Для каждой точки M этой поверхности существует замкнутый путь, лежащий на этой поверхности и такой, что при движении по этому пути из точки M в точку M ненулевой вектор нормали N изменяет свое направление на противоположное. Отсюда следует, что если мы зададим в некоторой окрестности точки M нормальное векторное поле, то после его гладкого продолжения на весь лист Мёбиуса оно перестанет быть векторным полем, поскольку в точке M окажется два различных значения вектора нормали.

Это свойство можно сформулировать по-другому: обойдя лист Мёбиуса по замкнутому контуру, мы перешли с одной стороны поверхности на другую.

Таким образом, и односторонние и двусторонние поверхности играют в дифференциальной геометрии большую роль.