УДК 51:004.9

ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Картавенко Роман Игоревич, Хотькин Илья Александрович,
студенты 2-го курса кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
(Научный руководитель – Хотомцева М.А., старший преподаватель)

В данной работе мы опишем три геометрии поверхностей, а именно Евклидова, Лобачевского, Римана.

Как и евклидова, эти геометрии относятся к метрическим геометриям пространства постоянной кривизны. Нулевая кривизна соответствует евклидовой геометрии, положительная — совпадающим по локальным свойствам сферической или геометрии Римана, отрицательная — геометрии Лобачевского.

Евклидом в его главном труде книге «Начала», которая была создана около 300 года до н. э. Данная книга считается вершиной античной математики и в ней впервые были написаны аксиомы и постулаты.

Постулаты Евклида звучали так:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Наиболее интересен в аксиоматике Евклида последний, знаменитый пятый постулат. Среди других, интуитивно очевидных постулатов, он нарочито чужероден, его громоздкая формулировка закономерно вызывает некоторое чувство протеста и желание отыскать для него доказательство. Такие доказательства уже в древности пытались построить Птолемей и Прокл; а в Новое время из этих попыток развилась неевклидова геометрия. Следует отметить, что первые 28 теорем I книги относятся к абсолютной геометрии, то есть не опираются на V постулат.

За постулатами следуют аксиомы, которые имеют характер общих утверждений, относящихся в равной мере как к числам, так и к непрерывным величинам:

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Ранее мы затронули тему неевклидовой геометрии 7 февраля 1832 года Николай Лобачевский представил на суд коллег свой первый труд по неевклидовой геометрии. Этот день стал началом переворота в математике, а работа Лобачевского - первым шагом к теории относительности Эйнштейна.

На самом деле геометрия Лобачевского не слишком сильно отличается от привычной нам Евклидовой. Дело в том, что из пяти постулатов Евклида четыре первых Лобачевский оставил без изменения. То есть он согласен с Евклидом с четырьмя постулатами, а не согласился только с пятым, наиболее сомнительным с его точки зрения постулатом Евклида. Звучит его формулировка чрезвычайно мудрено, но если переводить ее на понятный простому человеку язык, то получается, что, по мнению Евклида, две непараллельные прямые обязательно пересекутся. Лобачевский сумел доказать ложность этого посыла.

Так как и Лобачевский постулаты Евклида рассматривал и Риман.

Риманова геометрия — многомерное обобщение геометрии на поверхности, представляющее собой теорию римановых пространств, т. е. таких пространств, где в малых областях приближённо имеет место евклидова геометрия (с точностью до малых высшего порядка сравнительно с размерами области). Риманова геометрия получила своё название по имени Б. Римана, который заложил её основы в 1854 г.

Простейший пример риманова пространства представляет любая гладкая поверхность. Действительно, в достаточно малой окрестности любой точки она совпадает (с точностью до величин высшего порядка малости) с касательной плоскостью в этой точке; поэтому в такой окрестности соотношения длин на поверхности будут такими же, как на плоскости (конечно, с точностью до малых величин высшего порядка). Таким образом, в малых областях поверхности имеет место (с точностью до малых величин высшего порядка) евклидова геометрия.

Например, при измерениях на участках земной поверхности, малых в сравнении с размерами земного шара, можно с успехом применять обычную планиметрию. Однако результаты измерений на больших участках обнаруживают существенное отклонение от законов планиметрии.

Таким образом, поверхность, рассматриваемая с точки зрения измерений, проводимых на ней, оказывается двумерным пространством, геометрия которого (т. н. внутренняя геометрия поверхности), будучи евклидовой в бесконечно малом, в целом не является евклидовой; к тому же, как правило, такое пространство неоднородно по своим геометрическим свойствам. Внутренняя геометрия поверхности есть не что иное, как риманова геометрия в случае двух измерений, а поверхность, рассматриваемая с точки зрения её внутренней геометрии, есть двумерное риманово пространство.