В первом случае (рис. 2) длина шлейфа составила 7,3 м. Непосредственно за границей крепления *ab* образовалась воронка размыва, которая при длительном сбросе воды имеет тенденцию распространяться под свободно уложенный конец пленочного крепления в сторону верхнего бьефа. На рисунке показан характер воронки после 30-минутного сброса воды.

Во втором случае (рис. 3) наличие водобойной стенки на расстоянии, несколько превышающем длину гидравлического прыжка первого случая, ограничивает распространение шлейфа. Кроме того, величина воронки размыва в данном случае меньше, чем в предыдущем.

В обоих случаях установлено, что характер переформирований соответствует структуре потока при внезапном его расширении (рис. 1). Воронка размыва образуется в зоне слабо возмущенного ядра. Осаждение наносов в виде шлейфа происходит в основном в зоне интенсивного турбулентного перемешивания. Наличие преграды в виде невысокой водобойной стенки ограничивает величину размыва и длину распространения шлейфа.

Литература

1. Богославчик, П. М. Расчетная модель размыва грунтовых плотин при переливе / П. М. Богославчик // Наука и техника. − 2018, № 4. − С. 292–296.

2. Михалев М. А. Гидравлический расчет потоков с водоворотом / М. А. Михалев. – Л.: Энергия, 1971. − 184 с.

3. Стефанович Г. В. Плановое расширение потока в нижних бьефах, гидросооружений и акваториях / Г. В Стефанович // Изв. ВНИИ гидротехники. – 1997. – С. 70−87.

УДК 532.59+627.8

К вопросу об интегрировании дифференциальных уравнений неустановившегося движения потока воды в открытом русле в условиях высокогорья

Стриганова М. Ю.[1], Шаталов И. М.[2], Щербакова М. К.[2], Бандолик Н. Н.[1], Дмитриченко А. С.[3]

[1]Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь,
[2]Белорусский национальный технический университет,
[3]Белорусский государственный технологический университет
Минск, Республика Беларусь

В статье предложено использование конечно-разностного метода интегрирования дифференциальных уравнений (метода характеристиче-

ских уравнений С. А. Христиановича) для неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения в условиях высокогорья при прорыве плотины.

В реальных условиях высокогорья при прорыве плотины происходит относительно постепенное опорожнение водохранилища, при котором наблюдается падение уровня воды в водохранилище, уменьшение расхода воды в начальном створе и увеличение расхода в конечном сечении прямой отрицательной волны перемещения.

Движение воды в теле такой волны перемещения хорошо описывается двумя дифференциальными уравнениями баланса расхода и уравнением динамического равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial l} + \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \\ \left(i - AQ^2\right) g = \dfrac{g}{B}\dfrac{\partial \omega}{\partial l} + \alpha_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} + \alpha v \dfrac{\partial v}{\partial l}. \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial v}{\partial l} + v \dfrac{\partial \omega}{\partial l} = 0, \\ E = \dfrac{g}{B}\dfrac{\partial \omega}{\partial l} + \alpha_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} + \alpha v \dfrac{\partial v}{\partial l}. \end{cases} \tag{2}$$

Для численного (с использованием компьютерных технологий) решения системы уравнений (2) для условий высокогорья при прорыве плотины предлагается использовать метод характеристических уравнений С. А. Христиановича, при этом движение воды в теле волны перемещения будем считать постепенно или плавно изменяющимся.

Рассмотрим более подробно метод характеристических уравнений С. А. Христиановича, дополнив его моделированием волн на мелкой воде методом частиц.

На схеме движения потока (рис. 1) позиция *1* соответствует свободной поверхности в момент времени t_1, а позиция *2* – в момент времени t_2. Рассмотрим неустановившееся движение потока воды между сечениями I-I и II-II на бесконечно малом расстоянии Δl.

Представим неустановившееся постепенно или плавно изменяющееся движение в виде параллельных прямолинейных отрезков линий тока (рис. 1). Допустим, что в области решения системы уравнений (2) задан отрезок некоторой кривой линии тока функцией $l = l(t)$ и значений функций $v = v(l, t)$ и $\omega = \omega\,(l, t)$.

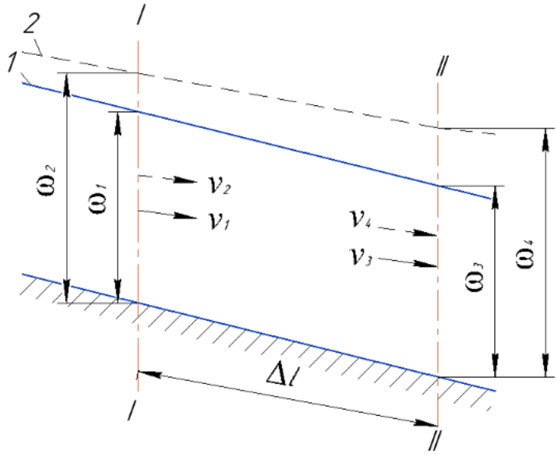

Рис. 1. Отрезок некоторой кривой линии тока:
1 – начальное положение поверхности волны перемещения в момент времени t;
2 – конечное положение поверхности волны перемещения в момент времени $t + \Delta t$

Тогда для каждой точки этой кривой (точки представляют собой частицы движущейся жидкости) $l = l(t)$ можно записать:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial l}\dfrac{dl}{dt} + \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\partial \omega}{\partial l}\dfrac{dl}{dt} + \dfrac{\partial \omega}{\partial t}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial v}{\partial l}\dfrac{dl}{dt}, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{d\omega}{dt} - \dfrac{\partial \omega}{\partial l}\dfrac{dl}{dt}. \end{cases}$$

Подставив значения $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ в систему (2), после простейших преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \omega\dfrac{\partial v}{\partial l} + \left(v - \dfrac{dl}{dt}\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial l} = -\dfrac{d\omega}{dt}, \\ \left(\alpha v - \alpha_0\dfrac{dl}{dt}\right)\dfrac{\partial v}{\partial l} + \dfrac{g}{B}\dfrac{\partial \omega}{\partial l} = E - \alpha_0\dfrac{dv}{dt}. \end{cases} \tag{4}$$

Откуда легко получить

$$
\begin{cases}
\left[\left(v-\frac{dl}{dt}\right)\left(\alpha v-\alpha_0\frac{dl}{dt}\right)-\frac{g\omega}{B}\right]\frac{\partial v}{\partial l}=\left(E-\alpha_0\frac{dv}{dt}\right)\left(v-\frac{dl}{dt}\right)+\frac{g}{B}\frac{d\omega}{dt},\\
\left[\left(v-\frac{dl}{dt}\right)\left(\alpha v-\alpha_0\frac{dl}{dt}\right)-\frac{g\omega}{B}\right]\frac{\partial \omega}{\partial l}=-\left(\alpha v-\alpha_0\frac{dl}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt}-\omega\left(E-\alpha_0\frac{dv}{dt}\right).
\end{cases}
$$

В условиях высокогорья в водотоках всегда наблюдается быстрое течение воды, называемое бурным. Бурный поток движется в развитом турбулентном режиме, для которого коэффициенты Кориолиса и Буссинеска можно принимать равными 1,0. В этом случае систему уравнений (5а) можно записать в более компактном виде, удобном для анализа и последующего решения

$$
\begin{cases}
\left[\left(v-\frac{dl}{dt}\right)^2-\frac{g\omega}{B}\right]\frac{\partial v}{\partial l}=\left(E-\frac{dv}{dt}\right)\left(v-\frac{dl}{dt}\right)+\frac{g}{B}\frac{d\omega}{dt},\\
\left[\left(v-\frac{dl}{dt}\right)^2-\frac{g\omega}{B}\right]\frac{\partial \omega}{\partial l}=-\left(v-\frac{dl}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt}-\omega\left(E-\frac{dv}{dt}\right).
\end{cases}
\tag{5}
$$

Системы уравнений (5*a*) и (5) можно применять для расчета неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения в открытых руслах произвольной формы поперечного сечения. Такие русла называются непризматическими, и для них должно соблюдаться условие $\omega = f(l;\ h)$, где ω – площадь живого сечения потока; l – длина потока;h –глубина потока.

Однако в условиях высокогорья при растекании бурного потока его глубина значительно меньше его ширины B (т.е. $B >> h$) и поперечное или живое сечение такого потока близко к прямоугольной форме. Прямоугольное сечение, равно как и любое другое сечение правильной формы (например, трапецеидальное, треугольное, овальное, параболическое и т.д.) относится к призматическим руслам, для которых $\omega = f(h)$ и $\partial\omega/\partial l = 0$. Учитывая это для условий высокогорья при прорыве плотины, можем записать

$$
-\left(\alpha v-\alpha_0\frac{dl}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt}-\omega\left(E-\alpha_0\frac{dv}{dt}\right)=0\,, \tag{6a}
$$

$$
-\left(v-\frac{dl}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt}-\omega\left(E-\frac{dv}{dt}\right)=0\cdot \tag{6}
$$

Для решения практических задач и компьютерного моделирования неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения воды в условиях высокогорья в виде волны перемещения прямой или обратной, положительной или отрицательной наиболее применим метод конечных приращений. Подобный метод был использован Томпсоном для расчета прямоугольных русел, который с некоторыми дополнениями и изменениями можно распространить на русла произвольной формы поперечного сечения.

Рассмотрим русло произвольной формы поперечного сечения (рис. 1). Разделим это русло на элементарные участки Δl, в пределах которых площадь живого сечения $\Delta\omega$ будет изменяться постепенно (или плавно). Рассмотрим конкретный элементарный участок, в начальном сечении которого, как и в последующих сечениях, параметры неустановившегося потока (глубины h, скорости v, площади живых сечений ω и т.д.) известны в данный момент времени t и в последующие отрезки времени Δt. Предположим, что на рисунке 1 линия *1* соответствует положению свободной поверхности волны перемещения в начальный момент времени t; а линия *2* – это положение свободной поверхности той же волны по истечении отрезка времени Δt, т. е. в момент времени $t+\Delta t$.

Определим средние значения параметров неустановившегося потока в любом его сечении для отрезка времени Δt:

$$\begin{cases} \overline{\omega} = \left(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4\right)/4, \\ \overline{B} = \left(B_1 + B_2 + B_3 + B_4\right)/4, \\ \overline{R} = \left(R_1 + R_2 + R_3 + R_4\right)/4, \\ \overline{v} = \left(v_1 + v_2 + v_3 + v_4\right)/4, \\ \overline{C} = \left(C_1 + C_2 + C_3 + C_4\right)/4, \end{cases} \tag{7}$$

где ω – площадь живого сечения, м^2; v – средняя скорость, м/с; B – ширина русла по поверхности потока, м; R – гидравлический радиус, м; C – коэффициент Шези, м^{0,5}/с.

В системе уравнений (1) неустановившегося постепенно или плавно изменяющегося движения уклон трения $i_{тр} = AQ^2$ на элементарном участке потока Δl можно выразить из уравнения Шези $i_{тр} = \dfrac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}}$. С учетом того, что для призматического русла $\dfrac{\partial\omega}{\partial l} = 0$ и $i = i_0 - \dfrac{\partial h}{\partial l}$, где i_0 – уклон дна водотока, уравнение движения системы (1) представимо в виде

$$i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} + \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g}\frac{\partial v}{\partial l}, \tag{8a}$$

$$i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} + \frac{\partial h}{\partial l} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial l}. \tag{8}$$

Частные производные в конечных приращениях представим в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial l} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_3 - h_1}{\Delta l} + \frac{h_4 - h_2}{\Delta l}\right) = -\frac{h_1 + h_2 - h_3 - h_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_3 - v_1}{\Delta l} + \frac{v_4 - v_2}{\Delta l}\right) = -\frac{v_1 + v_2 - v_3 - v_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{\partial(\omega v)}{\partial l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_3 v_3 - \omega_1 v_1}{\Delta l} + \frac{\omega_4 v_4 - \omega_2 v_2}{\Delta l}\right) = -\frac{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 - \omega_3 v_3 - \omega_4 v_4}{2\Delta l},\\
&\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_2 - h_1}{\Delta t} + \frac{h_4 - h_3}{\Delta t}\right) = -\frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4}{2\Delta t},\\
&\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} + \frac{v_4 - v_3}{\Delta t}\right) = -\frac{v_1 - v_2 + v_3 - v_4}{2\Delta t},\\
&\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} + \frac{\omega_4 - \omega_3}{\Delta t}\right) = -\frac{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4}{2\Delta t}.
\end{aligned} \tag{9}$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 – глубина потока в рассматриваемых сечениях за отрезок времени Δt; v_1, v_2, v_3, v_4 – средние скорости за отрезок времени Δt; ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 – площади живых сечений за отрезок времени Δt.

Согласно уравнениям (9) уравнения (8*a*) и (8) в конечных разностях примут вид

$$\begin{aligned}
&i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} - \frac{h_1 + h_2 - h_3 - h_4}{2\Delta l} - \alpha_0\frac{v_1 - v_2 + v_3 - v_4}{2g\Delta t} - \alpha\overline{v}\frac{v_1 + v_2 - v_3 - v_4}{2g\Delta l},\\
&i_0 = \frac{\overline{v}^2}{\overline{C}^2\overline{R}} - \frac{h_1 + h_2 - h_3 - h_4}{2\Delta l} - \frac{v_1 - v_2 + v_3 - v_4}{2g\Delta t} - \overline{v}\frac{v_1 + v_2 - v_3 - v_4}{2g\Delta l}.
\end{aligned}$$

Уравнение баланса расхода (или уравнение неразрывности) постепенно или плавно изменяющегося неустановившегося движения потока жидкости в открытом русле системы (1) в конечных приращениях согласно (9) принимает вид

$$-\frac{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 - \omega_3 v_3 - \omega_4 v_4}{2\Delta l} - \frac{\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4}{2\Delta t} = 0. \tag{11}$$

Уравнения ($10a$), (10) и (11) позволяют найти параметры h и v неустановившегося потока в любой отрезок времени Δt и в любых сечениях этого потока, а также построить кривую свободной поверхности волны перемещения (прямой и обратной) в условиях высокогорья при прорыве плотины.

УДК 532.59+627.8

Математическая модель неустановившегося движения потока воды при прорыве напорных гидротехнических сооружений

Стриганова М. Ю.[1], Шаталов И. М.[2], Щербакова М. К.[2], Бандолик Н. Н.[1], Дмитриченко А. С.[3]
[1]Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь,
[2]Белорусский национальный технический университет,
[3]Белорусский государственный технологический университет
Минск, Республика Беларусь

Приведена математическая модель пространственно изменяющегося неустановившегося движения потока воды в случае разрушения или прорыва напорного гидротехнического сооружения в условиях высокогорья.

Неустановившееся движение потока жидкости, при котором его характеристики (скорость v, глубина h и расход Q) изменяются в пространстве и во времени, часто относят к волновому. Отличительной чертой волн, движущихся при этом в открытых руслах водотоков и водоемов, является их способность переносить значительные расходы (массы) воды. В связи с этим такие волны называют волнами перемещения, существенно отличающихся от ветровых или колебательных (сейсмических) волн. Волны перемещения делятся на две основные группы: непрерывные (длинные) и прерывные (короткие).

Непрерывная волна перемещения характеризуется медленным (постепенным) или плавно-изменяющимся движением. Мгновенный продольный профиль такой волны обладает малой кривизной, при которой соблюдается неравенство:

$$\frac{2\pi h}{\lambda} < 2,65,$$

где h – глубина потока; λ – длина волны.

В гидродинамической постановке задачи неустановившееся движение принято рассматривать одномерным, при котором изучают только средние характеристики потока (средние по величине в сечении скорости и глуби-