УДК 37.016:514

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЕМОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ И КОНСТРУКТИВНЫХ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ КОНТЕКСТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Тухолко Л.Л., к.п.н, доцент,
Карневич О.Н., старший преподаватель
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка, Минск, Республика Беларусь

Аннотация.

Предлагается способ разрешения проблемы повышения эффективности обучения решению стереометрических задач, отличных от типовых, состоящий в применении системы эвристических указаний, базирующихся на использовании приёмов конструирования и конструктивных действий, направленных на создание различных контекстов для выявления связей между данными и искомыми величинами.

В работах [1, 2] подчеркивается, что геометрические конструк-ции выполняют контекстную функцию, состоящую в предоставлении конструкцией контекста для выявления свойств геометрических фигур и отношений между ними, зачастую определяя способ решения задачи, но обобщенные приемы нахождения таких конструкций не раскрываются, основные рекомендации по использованию дополнительных построений даются для курса планиметрии.

Проведенный в работе [1] анализ структуры процесса решения конструктивной задачи позволил выработать систему обобщенных эвристических указаний для решения геометрических задач, основанную на применении приемов конструирования и конструктивных действий, направляющих мыслительную деятельность учащихся по созданию различных контекстов одной и той же геометрической фигуры (конструкции).

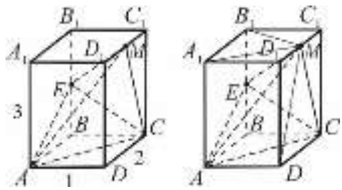
В случае, если после выяс-нения условия и требования задачи, выполнения схематического чертежа и его анализа с целью установления связей между дан-ными и искомыми элементами, учащимися сделан вывод о том, что для данной геометрической конструкции нет возможности применить известные ранее способы или методы решения задач, им предлагаются следующие вопросы:

- Как изменить данную геометрическую конструкцию, чтобы установить связи между данными и искомыми элементами?
- Можно ли реконструировать какую-либо опорную геометрическую конструкцию, содержащую данную конструкцию? (Тетраэдр, например, можно рассмотреть в контексте куба).
- Можно ли доконструировать (переконструировать) данную геометрическую конструкцию? (Например, наклонную призму можно разбить ортогональным сечением на два многогранника, из которых составляется прямая призма).
- Как можно изменить состав, расположение и способы соединения элементов конструкции для того, чтобы разрешить противоречие, мешающее решить задачу известным способом или методом? (Например, расположить конструктивные элементы внутри, вне, в пересечении; симметрично, ассиметрично; в одной или различных плоскостях; параллельно или под различными углами; заменить какую-либо фигуру равновеликой).

Рассмотрим пример организации деятельности учащихся по решению задачи, не являющейся типовой.

Задача. Точки E и M – середины рёбер BB_1 и D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Вычислите объём пирамиды $EAMC$, если $AD = 1$, $AB = 2$, $AA_1 = 3$.

Анализ условия задачи показывает, что использование формулы вычисления объёма пирамиды затруднительно в связи со сложностью нахождения высот этой пирамиды. Задаваясь вопросом о том, как изменить данную геометрическую конструкцию, чтобы установить связи между данными и искомыми элементами, учащиеся, как правило, предлагают найти её объём как разность объёмов параллелепипеда и дополнения пирамиды до параллелепипеда, разбив это дополнение на части (рисунок 1). При этом получается довольно громоздкое решение.



а) *б)*

Рис. 1. Иллюстрация приема разбиения конструкции на части

<u>1 способ.</u>

1) $V_{AEMC} = V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - (\ V_{MAA_1B_1E} + \ V_{MEB_1C_1C} \ + \ V_{MADC} \ + \ V_{MAA_1D_1D} \ +$
$+ \ V_{EABC}\ )$, $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AD \cdot AB \cdot AA_1 = 6.$

2) $V_{MAA_1B_1E} = \dfrac{1}{3} S_{AA_1B_1E} \cdot A_1D_1 = \dfrac{1}{3} \dfrac{\left(AA_1 + B_1E\right) \cdot A_1B_1}{2} \cdot A_1D_1 = \dfrac{3}{4}.$

3) $V_{MEB_1C_1C} = \dfrac{1}{3} S_{EB_1C_1C} \cdot A_1D_1 = \dfrac{1}{3} \dfrac{\left(CC_1 + B_1E\right) \cdot B_1C_1}{2} \cdot MC_1 = \dfrac{3}{4}.$

4) $V_{MADC} = \dfrac{1}{3} S_{ADC} \cdot DD_1 = \dfrac{1}{3} \dfrac{AD \cdot DC}{2} \cdot DD_1 = 1.$

5) $V_{MAA_1D_1D} = \dfrac{1}{3} S_{AA_1D_1D} \cdot MD_1 = \dfrac{1}{3} AD \cdot AA_1 \cdot MD_1 = 1.$

6) $V_{EABC} = \dfrac{1}{3} S_{ADC} \cdot DD_1 = \dfrac{1}{3} \dfrac{AB \cdot BC}{2} \cdot BE = \dfrac{1}{2}.$

7) $V_{AEMC} = 6 - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + 1 + 1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}.$

После решения задачи первым способом учитель предлагает найти другой способ решения, уменьшив количество рассматриваемых многогранников. Задаваясь вопросом о том, как переконструировать или доконструировать данную конструкцию, учащиеся приходят к мысли, что данную пирамиду можно дополнить до другой пирамиды, например, *XECA*, рассмотрев её с основанием *XEC*, которое лежит в плоскости грани BCC_1B_1 параллелепипеда (рисунок 2, *а* – *в*).

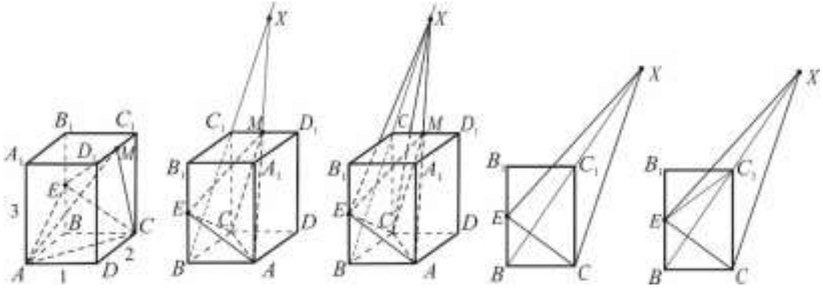


Рис. 2. Иллюстрация приема доконструирования

2 способ.

1) Пусть $X = AM \cap BC_1$ (прямые AM и BC_1 лежат в плоскости, заданной параллельными прямыми AB и D_1C_1, и не параллельны).

2) $V_{AEMC} = V_{AEXC} - V_{MEXC} = \frac{1}{3} S_{EXC} \cdot AB - \frac{1}{3} S_{EXC} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{6} S_{EXC} \cdot AB$.

3) $\Delta BXA \sim \Delta C_1XM$, так как $AB \parallel D_1C_1$, следовательно, $\frac{XC_1}{XB} = \frac{MC_1}{AB} = \frac{1}{2}$.

4) $S_{EXC} = (S_{BEX} + S_{BCX}) - S_{BEC} = (2\, S_{BEC_1} + 2\, S_{BCC_1}) - S_{BEC} = (2\, S_{B_1EC_1} + 2\, S_{BCC_1}) - S_{BEC} = (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot B_1E \cdot B_1C_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CC_1) - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BC = \frac{15}{4}$

(медианы EC_1, CC_1, C_1E разбивают каждый из треугольников BEX, BCX, BB_1C_1 соответственно на два равновеликих треугольника, рисунок 2*, г, д*).

5) $V_{AEMC} = \frac{1}{6} S_{EXC} \cdot AB = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{4} \cdot 2 = \frac{5}{4}$.

Такое решение не выглядит более рациональным, поэтому учащимся предлагается найти ещё один способ решения задачи, заменив данную пирамиду равновеликой ей пирамидой.

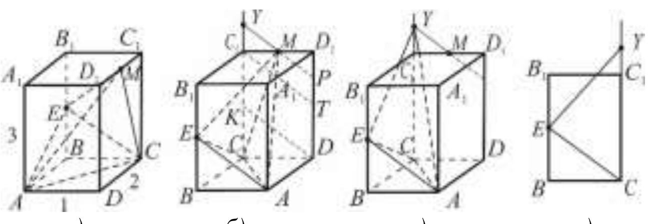


Рис. 3. Иллюстрация приема переконструирования

3 способ.

1) Построим $MP \parallel AE$, $P \in DD_1$ (рисунок 3, *а* , б). Пусть $MP \cap CC_1 = Y$, тогда $C_1Y = \frac{1}{4}CC_1$ ($DK \parallel AE$, K – середина отрезка CC_1; $C_1T \parallel KD$, T – середина отрезка DD_1; $D_1P = \frac{1}{2}D_1T$ по признаку средней линии треугольника C_1D_1T; $C_1Y = D_1P$, т.к. $\Delta C_1MY = \Delta D_1MP$).

2) $V_{AEMC} = V_{AEYC}$, так как основание пирамид общее, а высоты, проведённые из вершин M и Y равны, поскольку $YM \parallel (AEC)$.

3) $V_{AEYC} = \frac{1}{3} S_{CEY} \cdot AB = \frac{1}{3} \frac{CY \cdot BC}{2} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}25 \cdot CC_1 \cdot BC}{2} \cdot AB = \frac{5}{4}$.

Как показывает практика, абитуриенты и студенты, владеющие описанными в данной работе приемами конструирования, более успешно справляются с решением геометрических задач, не являющихся типовыми.

Список использованных источников

1. Тухолко, Л.Л. Развитие конструктивной деятельности учащихся при обучении стереометрии : монография / Л.Л. Тухолко. – Минск : БГПУ, 2019. – 248 с.

2. Карневич, О.Н. Типология учебных контекстов при обучении геометрии / О.Н. Карневич // Матэматыка. – 2018. – № 6. – С. 3–14.