УДК 514.116(076.2)

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛОЖНЫМ АРГУМЕНТОМ КАК МЕТОД СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЗНАНИЙ О ФУНКЦИЯХ

Ковалёнок Н.В., старший преподаватель,
Чернявская С.В., к.ф.-м.н., доцент
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь;

Аннотация:

Рассматриваются тригонометрические уравнения со сложным аргументом, определяются критерии отбора решений на основе свойств тригонометрических функций. Представленный материал рекомендуется для изучения на факультативных занятиях по математике для учащихся 10 классов и при подготовке к вступительным испытаниям.

Решение тригонометрических уравнений с отбором корней традиционно является одной из наиболее сложных тем курса школьной алгебры, поскольку даже хорошо подготовленные школьники не всегда грамотно и аккуратно производят отбор корней по поставленному условию, оставляя посторонние или не досчитывая нужные корни. Чаще всего отбор корней они производят методом «слепого перебора», когда легко пропустить или наоборот, включить лишний корень в ответ. Что касается уравнений со сложным аргументом, то здесь трудности отбора решений в промежуточных выкладках усиливаются, поскольку учащимся неясен сам критерий, по которому нужно произвести отсев неограниченного, как им кажется, количества получившихся уравнений после первого применения формул корней. Поясним сказанное на простых примерах, где в уравнениях в той или иной степени сложности присутствует функциональное выражение в аргументе тригонометрической функции.

Задача 1. Решить уравнение $\sin(\sin(\cos x - \sin x)) = 0$.

Решение. Решая это уравнение как простейшее, получим, что $\sin(\cos x - \sin x) = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Имеем бесконечное количество тригонометрических уравнений, поскольку правая часть будет принимать бесконечное количество значений. Произведем отбор возможных ее значений, исходя из ограниченности функции синус: $-1 \le \sin t \le 1$, тогда $-1 \le \pi n \le 1$, откуда $n = 0$.

Далее решаем уравнение $\sin(\cos x - \sin x) = 0$. Оно равносильно уравнению $\cos x - \sin x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ или уравнению $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi k}{2}$. Действуя аналогично предыдущему, замечаем, что значения k должны удовлетворять двойному неравенству $-1 \le \frac{\pi k}{\sqrt{2}} \le 1$, откуда $k = 0$.

Итак, остаётся решить уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ \text{откуда}\ x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.

Приведем еще ряд примеров с аналогичным подходом.

Задача 2. Решить уравнение $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\sqrt{\cos x}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Решая простейшее уравнение

$\cos z = \frac{1}{2}$, где $z = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\cos x}$, получаем

$\frac{2}{3}\pi\sqrt{\cos x} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, откуда $\sqrt{\cos x} = \pm\frac{1}{2} + 3n,$

$$n \in \mathbf{Z}.$$

В данном случае имеем бесконечное количество иррациональных уравнений с тригонометрической функцией. Поэтому, помимо ограниченности косинуса, учтем область допустимых значений квадратного корня, следовательно, будем иметь следующую систему ограничений: $0 \le \sqrt{\cos x} \le 1$, то $0 \le \pm\frac{1}{2} + 3n \le 1$. Произведем отбор решений. Неравенство $0 \le \frac{1}{2} + 3n \le 1$ имеет целое решение $n = 0$, а неравенство $0 \le -\frac{1}{2} + 3n \le 1$ не имеет решений в целых числах.

Итак, $\cos x = \frac{1}{4}$ и $x = \pm \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Пример 3. Решить уравнение $\sin\frac{\pi\cos x}{\cos^2 x + 1} = 0$.

Решение. Заметим, что в данном случае естественная область определения исходного уравнения - вся числовая ось. Решив простейшее тригонометрическое уравнение относительно функции синус, получим, что $\frac{\pi\cos x}{\cos^2 x + 1} = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, откуда следует, что

$n\cos^2 x - \cos x + n = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$ (при $n \neq 0$). Дискриминант уравнения равен $1 - 4n^2$. Рассмотрим, при каких значениях целочисленной переменной дискриминант будет неотрицательным. Целым решением неравенства $1 - 4n^2 \geq 0$ является $n = 0$, подставив которое в уравнение, получим, что $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sin^2(1 - \cos x) = \cos^2(1 + \cos x)$.

Решение: Применяя формулы понижения степени, приходим к уравнению $\cos(2+2\cos x) + \cos(2-2\cos x) = 0$, откуда, преобразуя сумму косинусов в произведение, получим

$\cos(2\cos x) = 0,\ \cos x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

Для нахождения возможных значений n рассматриваем двойное неравенство $-1 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq 1$, откуда $n=0$ или $n=-1$, и $|\cos x| = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\pm \arccos\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 5. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi\cos x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\cos x}\right)$.

Решение. Учитывая естественную область определения тангенса, для функции в левой части уравнения получим, что $\frac{\pi}{2}\cos x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \cos x \neq 1+2n$. Решением данного неравенства является $n = 0$.

Аналогично для функции $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi\cos x\right)$ приходим к неравенству $\sqrt{\cos x} \neq 1+2n$, откуда следует, что $\cos x \neq 1$ при $n=0$.

Преобразуем исходное уравнение к виду $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\cos x - \frac{1}{2}\pi\sqrt{\cos x}\right) = 0$, откуда $\cos x - \sqrt{\cos x} = 2n,\ n \in \mathbf{Z}$; и далее получим: $\sqrt{\cos x} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}$. Для определения допустимых значений n решим неравенства: $0 \leq \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \leq 1$ и $0 \leq \frac{1-\sqrt{1+8n}}{2} \leq 1$. Из первого неравенства следует, что $n = 0$. Но тогда $\sqrt{\cos x} = 1$, а $\cos x \neq 1$. Второе неравенство приводится к виду $-1 \leq -\sqrt{1+8n} \leq 1$, выполнимое только при $n = 0$.

Итак, окончательно получаем, что $\cos x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

Задача 6. Решить уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{2x^2}{\pi}=0$ на отрезке $[0;\pi]$.

Решение. Область определения уравнения: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z},$ $x\neq\frac{\pi}{2}\sqrt{1+2n},\ \ n\in\mathbf{N}.$

После приведения к общему знаменателю в левой части получаем уравнение:

$$\sin\left(x+\frac{2x^2}{\pi}\right)=0,\quad x+\frac{2x^2}{\pi}=\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

$$2x^2+\pi x-\pi^2 n=0,\ \ D=\pi^2(1+8n),\ \ n\in\mathbf{N}, x_{1,2}=\frac{-\pi+\pi\sqrt{1+8n}}{4}.$$

Очевидно, что $x_1=\frac{-\pi-\pi\sqrt{1+8n}}{4}\notin[0;\pi]$

Найдём значения n, при которых $x_2=\frac{-\pi+\pi\sqrt{1+8n}}{4}\in[0;\pi]$.

Решив двойное неравенство $0\leq\frac{-\pi+\pi\sqrt{1+8n}}{4}\leq\pi,\ \ n\in\mathbf{N},$ получим $n=0,1,2,3$. При $n=0$ $x=0$, при $n=1$ $x=\frac{\pi}{2}$ – не входит в область определения уравнения. При $n=2$ имеем $x=\frac{\pi}{2}(\sqrt{17}-1)$, при $n=3$ корень уравнения $x=\pi$.

Ответ: $0;\ \frac{\pi}{2}(\sqrt{17}-1);\ \pi$.

Задача 7. Найти количество корней уравнения $\sin(\sin x)=0{,}8$ на интервале $[0;2\pi]$

Решение. Исследуем функцию $f(x)=\sin(\sin x)$, $D(f)=R$.

Нули функции: $\sin x=\pi n$. Значит, при единственном значении $n=0$ $x=\pi k;\ \ k\in\mathbf{Z}$.Найдём производную функции, критические точки и исследуем знаки ее производной на интервале $[0;2\pi]$. Критические точки найдем из условия: $f'(x)=\cos x\cdot\cos(\sin x)=0$. Откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ \ m\in\mathbf{Z}$ и $\sin x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ \ l\in\mathbf{Z}$. Заметим, что второе уравнение корней не имеет.

Причем $x=\frac{\pi}{2}$ – точка максимума, а значит максимальное значение функции $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sin 1\approx 0{,}8415$, $x=3\pi/2$ – точка минимума, а значит минимальное значение $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\approx-0{,}8415$. Изобразив график функции, заключим, что уравнение $\sin(\sin x)=0{,}8$ имеет два различных корня.

Приведенные примеры показывают необходимость уметь применять свойства не только тригонометрических, но и других элементарных функций для ориентирования в непривычной ситуации нестандартного тригонометрического уравнения, решение которого, тем не менее, не выходит за рамки школьной программы по математике.

Список использованных источников

1. Математика для старшеклассников: методы решения М34 тригонометрических задач: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. Образования / А.И. Азаров [и др.]. – Мн.: Аверсэв, 2005. – 448 с.

2. В.В. Ткачук, математика – абитуриенту. – 8-е изд., исправленное и дополненное. М.: МЦНМО, 2001. – 892 с.

УДК 519.72

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА КОДОВ БЧХ C(1,3)

[1]Королёва М.Н., старший преподаватель,
[2]Липницкий В.А., д.т.н., профессор
[1]Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь
[2]Военная академия Республики Беларусь,
Минск, Беларусь

Аннотация:

В статье описан полиномиально-норменный метод коррекции ошибок для кода C(1,3), который обладает большим потенциалом для коррекции широких классов ошибок.

Практически каждый представитель Земной цивилизации осознанно или неосознанно имеет отношение к БЧХ-кодам, обладая тем или