тронный ресурс]. – Режим доступа: https://rosuchebnik.ru/material/psikhologicheskaya-podgotovka-detey-k-konkursam-article/. – Дата доступа: 29.03.2021.

УДК 517.518.45

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Евец Д.В.
Белорусский национальный технический университет,
г. Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель: к.п.н., доцент Якимович В.С.

Аннотация:
Рассматриваются вопросы использования рядов Фурье для разложения сигналов в базисе гармонических колебаний. Показана межпредметная связь дисциплины «Математика» со специальными и общетехническими дисциплинами.

Любая периодическая функция времени $x(t)$, которая в пределах периода ее изменения T удовлетворяет условиям Дирихле (функция $x(t)$ на интервале $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ должна, во-первых, иметь конечное число максимумов и минимумов, во-вторых, может иметь разрывы непрерывности первого рода при некоторых значениях аргумента $t = t_i$, число которых должно быть конечно, в-третьих, должна иметь конечные (равные или неравные между собой) предельные значения), может быть представлена в виде разложения по тригонометрическим функциям Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nw_1 t + b_n \cdot \sin nw_1 t\right),$$

где w_1 — частота основной гармоники (т.е. гармоники, получаемой при $n=1$), а N — число гармонических копанет. Коэффициенты a и b рассчитываются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt,\ \ a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos nw_1 tdt,\ \ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin nw_1 tdt\ .$$

Таким образом, объединив косинусные и синусные составляющие получаем: $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kw_1 t + \varphi_k)$, где A_k – амплитуда а φ_k – фаза k-ой гармонической составляющей связаны с коэффициентами a_n и b_n соотношениями:

$$A_n = \sqrt{a^2{}_n + b^2{}_n},\ \ \varphi_n = \arg(a_n - jb_n) = -arctg\frac{b_n}{a_n} \text{ или } a_n = A_n\cos\varphi_n\,, b_n = A_n\sin\varphi_n\ .$$

Согласно данной формуле любой периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе независящую от времени постоянную составляющую $\frac{a_0}{2}$ и бесконечный набор гармониче-ских колебаний (гармоник), с частотами $w_n = nw_1,\ (n = 1,2,...)$ (высшие гармоники периодического сигнала), кратными основной частоте $w_1 = \frac{2\pi}{T}$ (основная гармоника) периодического сигнала. Представление произвольного сигнала в виде совокупности постоянной составляющей и суммы гармонических колебаний с кратными частотами называют спектральным разложением этого сигнала в базисе гармонических функций, или гармоническим анализом сигнала.

Рассмотрим спектральное разложение сигнала в базисе гармонических колебаний на конкретном примере. Нам необходимо разложить сигнал $s(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ u_0, & 0 < t < T_И \\ 0, & T_И < t < \frac{T}{2} \end{cases}$ используя спектральный анализ последовательности прямоугольных импульсов [1, С. 5]. Коэффициенты a и b рассчитаем по формулам:

$$a_0 = \frac{T}{2}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} 0dt + \int_{0}^{T_И} u_0 dt + \int_{T_И}^{\frac{T}{2}} 0dt\right) = \frac{T^2{}_И u_0}{T},\ \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T_И} u_0\cos(nw_1 t)dt = \frac{2\sin(nw_1 T_И)u_0}{nw_1 T},$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T_И} u_0 \sin(nw_1 t)dt = \frac{2\left(1-\cos(nw_1 T_И)\right)u_0}{nw_1 T}\ .$$

Тогда сигнал будет иметь вид:

$$s(t)=\frac{T^2{}_И u_0}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin(nw_1T_И)u_0}{nw_1T}\cdot\cos(nw_1Tt)+\frac{2(1-\cos(nw_1T_И))u_0}{nw_1T}\cdot\sin(nw_1Tt)\right).$$

На практике очень часто применяется запись ряда Фурье в комплексной форме, получаемая, используя формулы Эйлера, при замене тригонометрических функций экспоненциальными с введением в рассмотрение комплексных величин:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnw_1t},c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jnw_1t}dt .$$

Одним из главных достоинств этой формы записи ряда Фурье является компактность. Сигнал $x(t)$ представлен суммой комплексных составляющих вида $c_n e^{jnw_1t}$, где n изменяется от $-\infty$ до ∞. Отрицательному значению n соответствует отрицательная частота $-nw_1$. Конечно, же отрицательной частоты в природе не существуют, это лишь математическая абстракция появившееся в результате формального представления гармонических функций в комплексной форме. Однако достаточно перейти от комплексной формы записи к тригонометрической, и отрицательная частота исчезнет.

Коэффициенты c_n являются комплексными величинами. Поэтому для представления периодического сигнала в частотной области в общем случае необходимо иметь два вещественных спектра: амплитудный спектр $|c_n|$ фазовый спектр $\varphi_n=\arg c_n$. Для положительных n коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье, связаны следующим образом: $|c_n|=\frac{A_n}{2}$, $\varphi_n=\arg c_n=\arg(a_n-jb_n)$. Рассмотрим применение ряда Фурье в комплексной форме для разложения сигнала в базисе гармонических колебаний на конкретном примере.

Необходимо разложить сигнал с амплитудой U, периодом T и длительностью τ в спектр. Сигнал чётный (симметричен относительно начала координат). Найдем $x_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}x(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Udt=\frac{\tau}{T}U$. Тогда

$$x_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t)e^{-jkw_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ue^{-jkw_0 t}dt = \left|\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} = \sin t\right| = \frac{U}{\pi k}\sin\frac{kw_0\tau}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{U}{\pi k}\sin\frac{kw_0\tau}{2}e^{jkw_0 t}$$

Далее нам необходимо рассчитать коэффициенты a и b.

$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Udt = 2U\frac{\tau}{T}$, $a_k = X_k + X_{-k} = 2\mathrm{Re}|X_k| = \frac{2U}{\pi k}\sin kw_0\frac{\tau}{2}$. Так сигнал симметричен относительно начала координат, то $b_k = 0$. Таким образом, сигнал будет иметь вид:

$$s(t) = U\frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U}{\pi k}\sin kw_0\frac{\tau}{2}\cdot\cos(kw_0\tau).$$

Список использованных источников

1. Бойко Б.П., Тюрин В.А. Спектр сигнала: учебно-методическое пособие / Б.П. Бойко, В.А. Тюрин. — Казань: Казанский федеральный университет, 2014. — 38 с.

УДК 378.14

РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОСТИ БУДУЩИХ ПЕДАГОГОВ-ИНЖЕНЕРОВ

Еськов П.А., студент

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Научный руководитель: ст.преподаватель Игнаткович И.В

Аннотация:

Рассматривается вопрос о развитии креативности у будущих педагогов-инженеров как один из немаловажных навыков высококвалифицированного специалиста.