УДК 621.317.3

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ВЕЛИЧИН В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ
METROLOGICAL ASPECTS OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF CONTINUOUS AND DISCRETE QUANTITIES IN ELECTRICAL MEASUREMENTS

Савкова Е.Н. к-т. техн. наук, доцент, Лагунов Д.В.,
Науменко М.В., Бороденок И.М.
Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь
Y. Saukova, Candidate of Technical Sciences, Docent,
D. Lagunov, M. Naumenko, I. Borodzionak
Belarusian national technical university, Minsk, Belarus

Аннотация. Сделан краткий обзор состояния вопроса в области применения распределений вероятностей величин в электрических измерениях. Приведены основные характеристики, математическое описание и свойства распределений логарифмических величин, Эрланга и Пуассона. Рассмотрены возможности применения данных распределений для решений конкретных задач в электрических измерений.
Abstract. A brief overview of the state of the question in the field of application of probability distributions of quantities in electrical measurements is made in the article. The main characteristics, mathematical description, and properties of logarithmic, Erlang, and Poisson distributions are given. The possibilities of using these distributions for solving specific problems in electrical measurements are considered

Ключевые слова: *функция распределения, измеряемая величина, электрические измерения, математическое ожидание, дисперсия.*
Key words: *distribution function, measured quantity, electrical measurements, mathematical expectation, variance.*

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности электрофизических измерений обуславливает необходимость корректного описания результата измерения как интервала охвата с заданным уровнем достоверности. Информативными параметрами интервала охвата являются точечная оценка измеряемой величины, интервальная оценка (расширенная неопределенность), вероятностная оценка (вероятность охвата, уровень доверия, доверительная вероятность) и функция распределения значений, приписываемых измеряемой величине в пределах интервала охвата. В большинстве случаев приписывают нормальное, равновероятное и распределение Симпсона [1]. Однако в метрологической литературе [2] приводятся другие виды распределений вероятностей (например, Эрланга, Пуассона и др.) для электрических и радиотехнических измерений.

Цель данной работы – выполнить обзор данных распределений и их характеристик и определить круг измерительных задач для их применения.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Согласно [2] функция распределения – функция, задающая каждому значению вероятность того, что случайная переменная величина X будет меньше или равна:

$$G(\varepsilon) = \Pr(X \leq \varepsilon) \tag{1}$$

В метрологической практике чаще используют функцию плотности вероятности (ФПВ) – «первую производную, если она существует, функции распределения непрерывной случайной переменной» [2]. Приведенные результаты, в которых сигнал постоянен и шум имеет нормальную ФПВ, могут быть распространены и на другие ФПВ, например, для случая, когда колебания вокруг постоянного значения распределены равномерно [2]. Непрерывное распределение описывает вероятности возможных значений непрерывной случайной величины. Вероятность того, что непрерывная случайная величина равна некоторому значению, всегда равна нулю. Для описания непрерывных величин применяют распределения Гаусса, Симпсона, равномерное, гамма, бета, стьюдента, экспо-ненциальное, двусторонне-экспоненциальное, логарифмическое, огнормальное, распределение Пуассона, Распределение Эрланга и другие. С точки зрения концепции неопределенности интерес представляют логарифмические величины -Логарифмические интервалы частоты, оптическая плотность, затухание и усиление в электросвязи, применяемые в электрофизических измерениях. В частности, если X имеет равномерное распределение на интервале [a, b] в линейных единицах [т. е. сосредоточена вокруг значения $\frac{a+b}{2}$ с половиной ширины $\frac{b-a}{2}$, то его преобразование в децибелы относительно одного вольта, вычисляемое как $Y = 20\log_{10} x$, имеет ФПВ [3]:

$$g_Y(Y) = \frac{\ln 10}{20(b-a)} 10^{\frac{Y}{20}} \tag{2}$$

в то время как ее преобразование в децибелы, вычисленное с помощью выражения $Z = 10\log_{10} X$, имеет ФПВ [2]:

$$g_Z(Z) = \frac{\ln 10}{10(b-a)} 10^{\frac{Z}{10}} \tag{3}$$

Для обратного преобразования из равномерной ФПВ величины в децибелах в линейные единицы для полей или напряжений ФПВ будет [3, 4]:

$$g_X(X) = \frac{20}{(b-a)\ln 10}\frac{1}{X} \tag{4}$$

В электрофизических помимо распределений Гаусса, Симпсона и равномерного в особых случаях применяются, логарифмическое логнормальное и др.

Логарифмическое распределение (иногда известное как распределение логарифмических рядов) – это дискретное положительное распределение, достигающее максимума при x = 1, с одним параметром и длинным правым хвостом. На рисунке 1 приведены два примера логарифмического распределения [4].

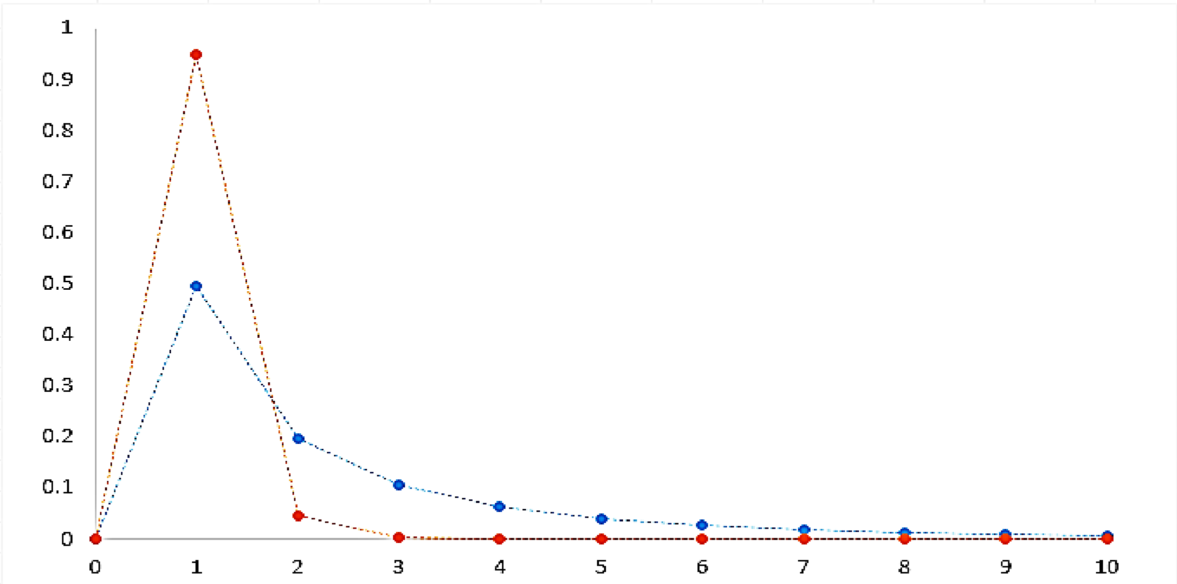


Рисунок 1 – Логарифмическое распределение вероятностей

Логарифмическое распределение довольно популярно в страховании для моделирования частоты претензий. Он используется для описания, например, количества предметов, приобретенных потребителем в определенный период. Существует некоторая теория, которая связывает последние два с наблюдением Ньюкомба (1881), что частота использования различных цифр в натуральных числах следует логарифмическому распределению [5]. В электрических измерениях данное распределение применяется для логарифмических величин – уровня электрического напряжения, уровня громкости, уровня шума и др.

Также для логарифмических величин применяют логнормальное распределение [6]. Случайная величина имеет нормальное логарифмическое распределение, если ее логарифм нормально распределен. Этому типу распределения часто подходят искаженные распределения с низкими средними значениями, большой дисперсией и полностью положительными значениями. Некоторые другие названия логнормального распределения – Гальтона, Гальтона-Макалистера, Гибрата, Кобба-Дугласа. Они позволяют определять размер частиц серебра в фотоэмульсии, живучесть промышленных агрегатов с режимами отказов, которые характеризуются усталостным напряжением, объем газа в нефтяном запасе. ФПВ логнормального распределения описывается выражением [7]:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})^2} \quad 0 < x < +\infty \tag{5}$$

Краткое описание других распределений вероятностей приведено в таблице 1 [6]. Распределение Пуассона применяется для описания дискретных величин, представляющих собой число некоторых событий, произошедших за фикси-рованное время, только при условии, что эти события происходили с некоторой фиксированной средней интенсивностью, а также независимо друг от друга [8]. Распределение Пуассона зависит только от одного параметра – λ, данный параметр зависит от вероятности успешного (редкого) события и общего числа событий.

Таблица 1 – Информация о некоторых распределениях вероятностей

Распределение	ФПВ	Параметры
для непрерывных величин		
Равномерное $[a, b]$	$\frac{1}{a-b}, \quad a \le x \le b$	$a, b \in R, \quad a < b$
Гамма	$\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, \quad x \epsilon R$	$\alpha > 0, \quad \beta > 0$
Бетта	$\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{\beta(r,s)}, \quad 0 \le x \le 1$	$r > 0, \quad s > 0$
Экспоненциальное	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$	$\lambda > 0$
Двусторонне-экспоненциальное	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\lvert x\rvert}, \quad x \in R$	$\lambda > 0$
Стьюдента	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{1+n}{2}}}, x \in R$	$n = 1,2 \ldots$
Коши	$\frac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)}, \quad x \in R$	$\theta > 0$
для дискретных величин		
Равномерное распределение	$\frac{1}{N}, k = 1,2, \ldots, N$	$N = 1,2, \ldots$
Бернулли	$p_1 = p$ $p_0 = q$	$0 \le p \le 1, \quad q = 1 - p$
Распределение Пуассона	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{\kappa}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$	$\lambda > 0$
Биноминальное	$C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1, \ldots n$	$0 \le p \le 1, q = 1 - p, n = 1,2, \ldots$
Геометрическое	$q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$	$0 \le p \le 1, \quad q = 1 - p$

«Успешное» событие: распределение Пуассона применяется тогда, и только тогда, когда есть разделение на результат «да» и «нет», например, лампочка перегорела: да - это успешное событие; шина прокололась: да – успешное событие и так далее. В электрических измерениях распределение Пуассона применяют при испытаниях электротехнических изделий на надежность. Параметр $\lambda = \mathbf{n} * \mathbf{p}$, где p – вероятность успешного события, а n – общее количество событий, для которых ведется расчет. Если количество проведенных испытаний n достаточно велико, а вероятность p появления некоторого события в отдельно взятом испытании весьма мала (0,05–0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний данное событие появится ровно m раз, можно приближенно вычислить по формуле Пуассона (6) где $\lambda = np$ [8]:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (6)$$

Распределение Эрланга является двухпараметрическим законом распределения, используемым для вероятностного задания любых положительных непрерывных случайных величин. Плотность вероятности некоторой величины, имеющей распределение Эрланга, определяется формулой [8]:

$$W(x) = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0 \quad (7)$$

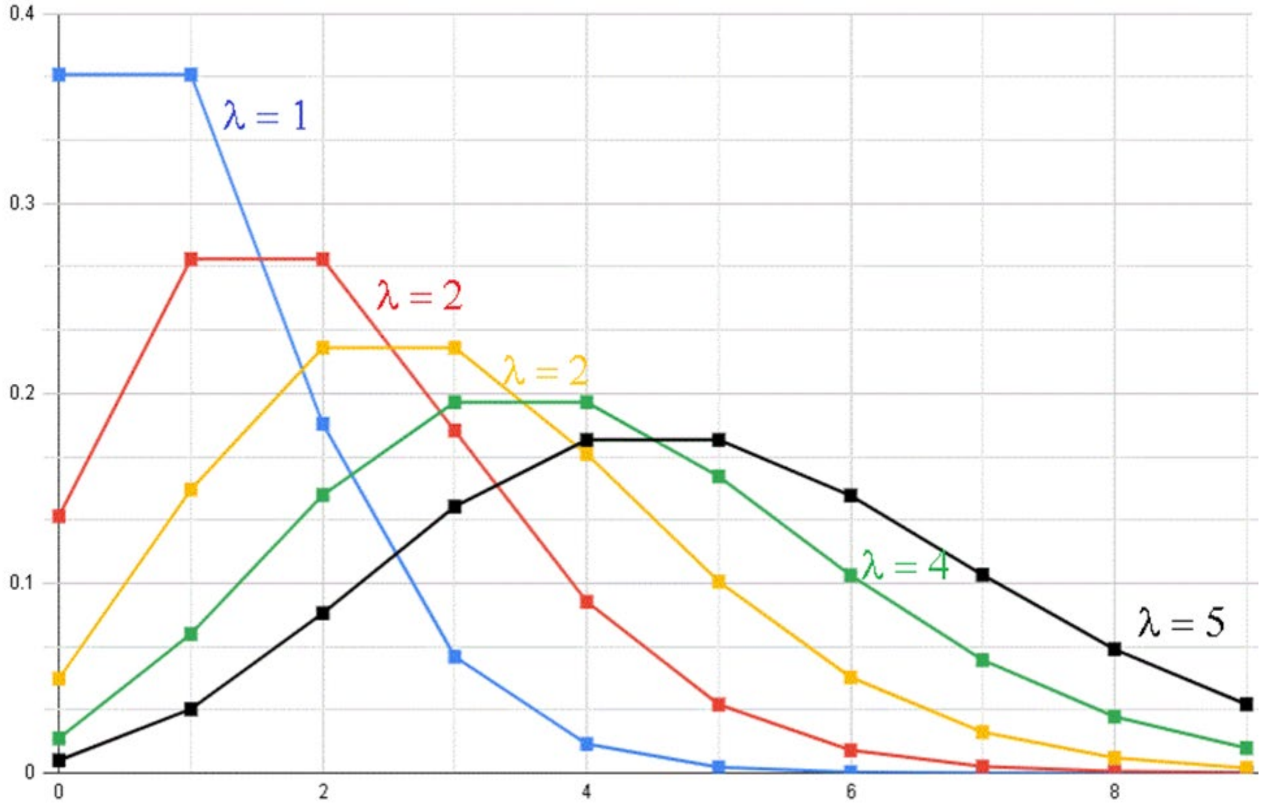
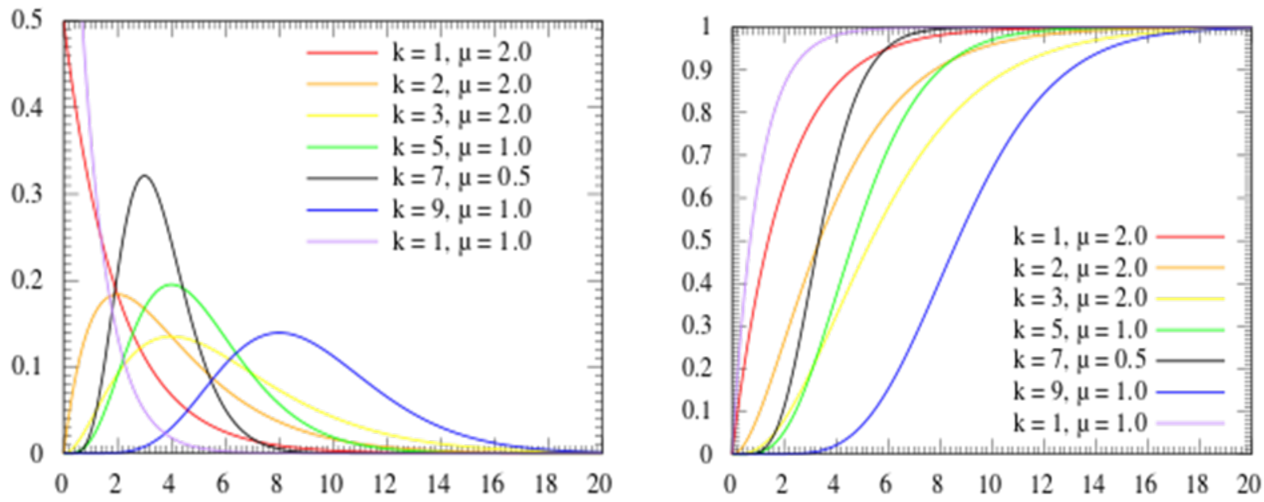


Рисунок 2 – ФПВ распределения Пуассона для различных значений λ

Как следует из формулы (7), плотность вероятности зависит от значения двух параметров – k и α. Параметр k называют порядком распределения Эрланга, и он имеет целочисленные значения $к = 0, 1, 2, m$. Для альтернативной, но эквивалентной параметризация используется параметр масштаба μ, который является обратной величиной параметра скорости ($\mu = \frac{1}{\lambda}$) Когда масштабный параметр μ равен 2, распределение Эрланга упрощается до распределения хи-квадрат с $2k$ степенями свободы. Поэтому его рассматривают как обобщенное распределение χ-квадрат для четных чисел степеней свободы. На рисунке 3 показаны распределения Эрланга для различных параметров k.



а) б)

Рисунок 3 – Распределение Пуассона: а – ФПВ; б – интегральная функция распределения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ужесточение требований к точности и достоверности результатов измерений обуславливает исследование возможностей применения распределений вероятностей электрических величин, отличных от нормального, равномерного и Симпсона, как это было рекомендовано в нормативных документах, утвержденных более десяти лет назад. На современном этапе требуются усилия метрологического сообщества для разработки вероятностно-статистических математических моделей измеряемых величин, применяемых в конкретных измерительных ситуациях. Данные вопросы являются актуальными и находятся в стадии разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК CG 4. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. Третье издание. QUAM:2012.P1-RU. 2012. 165 с.

2. ГОСТ 34100.3.1-2017/ ISO/IEC Guide 98-3/Suppl 1:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения.

Дополнение 1. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло. (ISO/IEC Guide 98-3/Suppl 1:2008, IDT). Москва. Стандартинформ. 2017. 21 с.

3. Logarithmic distribution [Электронный ресурс]. https://www.vosesoftware.com/riskwiki/Logarithmicdistribution.php - Дата доступа: 05.04.2021.

4. Logarithmic Scale [Электронный ресурс]. https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/logarithmic-scale – Дата доступа: 01.04.2021.

5. Probability Distributions for Measurement Uncertainty [Электронный ресурс]. https://www.isobudgets.com/probability-distributions-for-measurement-uncertainty/- Дата доступа: 04.04.2021

6. Математическая статистика [Электронный ресурс]. https://volpi.ru/files/vpf/vpf_library/Matematicheskaja_statistika.pdf - Дата доступа: 20.04.2021

7. Логнормальное распределение [Электронный ресурс]. https://excel2.ru/articles/lognormalnoe-raspredelenie-nepreryvnye-raspredeleniya-v-ms-excel - Дата доступа: 10.05.2021

8. ГОСТ Р ИСО 11843-6-2015 «Статистические методы. Способность обнаружения. Часть 6. Методология определения критического значения и минимального обнаруживаемого значения с применением аппроксимации распределения Пуассона нормальным распределением».